Помогая в усвоении аксиом стереометрии...

Н. М. Рогановский
Доцент кафедры методики математики Могилевского педагогического института

Система аксиом, предусмотренная новой программой по математике, довольно компактна и проста по своему содержанию. Она самым непосредственным образом связана с такими важными понятиями современной математики, как метрическое пространство и геометрические преобразования. Стереометрический вариант этой аксиоматики удачно сформулирован в учебном пособии для IX класса под редакцией З. А. Скопеца. Он насчитывает всего девять аксиом. Из них первые пять описывают теоретико-множественное понятие принадлежности применительно к основным (неопределяемым) понятиям: «точка», «прямая», «плоскость». Следующие три — к основному понятию «расстояние» для произвольных точек пространства. Последняя, девятая распространяет известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых на произвольную плоскость пространства.

При изучении аксиом важно, чтобы учащиеся поняли абстрактный характер геометрических понятий, увидели процесс абстрагирования в действии, научились замечать его в жизни и на производстве. Очень важно сформировать у них правильное представление о логике построения учебного материала и роли аксиом. Сделать это можно при помощи некоторых методических приемов, о которых нам хотелось бы рассказать подробнее.

Основу методики изучения аксиом, на наш взгляд, должен составлять тщательный отбор и разработка системы заданий и вопросов, которые наглядно иллюстрируют операцию абстрагирования, раскрывая тем самым суть аксиоматического метода в геометрии. Покажем это на конкретных примерах.

Так, изучая геометрические понятия «линия», «точка», «прямая», «плоскость» и др., учитель должен заострить внимание учащихся на том, что каждое из них — результат абстрагирования (отвлечения) от конкретных фигур. Этот процесс отвлечения от конкретного можно проиллюстрировать с помощью географической карты. Например, мы говорим о линии границы СССР и показываем ее по карте. Однако в действительности граница представляет собой не линию, а полосу определенной ширины. И пограничники правильно называют ее полосой. Причем для них ширина — существенное свойство границы.

Можно привести примеры и с понятием плоскости.

В жизни иногда плоскость называют *полотном* (полотно железной дороги). Большие плоские участки земли называют равнинами. Конечно, они не совершенно плоские, на них могут быть овраги, реки, холмы. Бывают ровные участки суши и на возвышенных местах — *плато*, что в переводе с французского и есть «плоский». Немало плоских поверхностей встречается в быту, технике, строительстве и т. д. Стоит вспомнить хотя бы, чем пользуются штукатуры для придания поверхности стены плоской формы, рассказать об инструментах, при помощи которых изготовляют предметы с плоскими поверхностями. После этого учащимся уместно задать вопрос: «Какими свойствами реальных объектов мы пренебрегаем, имея в виду плоскость как геометрическое понятие?»

Важно подчеркнуть, что отвлечение от реальных объектов может быть двояким: либо мы опускаем некоторые свойства, либо идеализируем, расширяем круг этих свойств. (Пример с равнинами: при абстрагировании мы игнорируем наличие оврагов, холмов, зато идеализируем большую плоскую поверхность. Кстати, подобное идеализирование размеров равнин, плоских поверхностей больших тел дает возможность наглядно представить неограниченность плоскости.)

Опыт показывает, что обращение к операции абстрагирования на хорошо знакомом учащимся конкретном материале, связанном с их жизненным и производственным опытом, помогает глубже осознать смысл этой операции, понять источники и пути образования геометрических понятий.

При характеристике аксиом целесообразно показать, что многие из них появились в результате внимательного наблюдения за различными способами практической деятельности людей, а затем мысленного абстрагирования от них. Так, например, до или после формулировки аксиомы о прямой линии можно рассказать об известном способе разделки бревна на доски вручную. Распиливая бревно, обычно натягивают между двумя точками на концах бревна натертый древесным углем шнур, а затем, оттягивая его, как тетиву лука, отпускают. При ударе о поверхность бревна образуется угольный след — часть прямой линии, проходящей через данные точки — отметины на концах бревна. Если этот пример привести до формулировки аксиомы, то он поможет сформулировать саму аксиому: «Через две различные точки проходит одна и только одна (единственная) прямая».

При изучении аксиомы 3 («Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости»), хорошо рассказать о приеме проверки качества обработки плоской поверхности с помощью выверенной линейки. Столяр, проверяя качество обработки поверхности доски, прикладывает край линейки к этой доске в самых различных направлениях. Если между краем линейки и поверхностью доски нет просветов, то считается, что поверхность обработана «под плоскость». Аналогично проверяется качество штукатурки стен. В основе этого приема как раз и лежит положение аксиомы 3. Здесь важно отметить, что свойство, выражаемое данной аксиомой, специфично только для прямой и плоскости. Например, если взять лист шифера, который имеет волнообразную форму, то прикладывая линейку к нему, увидим, что между краем и поверхностью листа просветы могут и не образовываться. Но так будет не всегда. Если край линейки прикасается к нескольким гребням листа, то линейка уже не прилегает к поверхности всеми своими точками.

Аналогичное правило действует и в случае с конической или цилиндрической поверхностью: к таким поверхностям приложить край линейки всеми его точками можно только в избранных направлениях (в отличие от плоской поверхности). Не случайно поэтому такие поверхности заметно отличаются от плоскости.

Аксиома 4 утверждает, что через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. Это можно подтвердить следующими примерами.

Если какой-либо предмет имеет три точки опоры, то он, как правило, обладает устойчивостью. Стол на трех ножках не качается, даже если пол неровный. По этой причине приборы, которые приходится устанавливать на неровной поверхности, снабжают тремя опорами (штатив для фотоаппарата, теодолита и т. д.). Мотоцикл с коляской стоит на дороге устойчиво. А вот для мотоцикла без коляски нужна дополнительная опора. Открытую оконную раму закрепляют крючком, чтобы она не захлопнулась, и т. д. С позиций аксиомы 4 нетрудно объяснить свойство жесткости тетраэдра, которое учитывается при сооружении различных конструкций из стержней. Именно оно заставляет инженеров при сооружении арок, мостов, перекрытий для крыш, несущих опор для линий электропередач и т. д. «разлагать» пространственные конструкции на тетраэдры внесением в них вспомогательных стержней-укосов.

До сих пор упорно держится определение аксиом как «истин, не требующих доказательства», что не верно. Важно подчеркнуть роль аксиом как исходных предложений при построении теории, пояснить учащимся, что выбор аксиом может быть сделан не однозначно. Наиболее удачно это можно показать на примере первых следствий из аксиом принадлежности, в частности следствий о задании плоскости при помощи двух пересекающихся, двух различных параллельных прямых, прямой и точки вне ее. Каждое из этих утверждений само по себе просто, и истинность их не вызывает сомнений. Зададим учащимся такие вопросы: «Из каких рассмотренных нами аксиом вытекают эти предложения? Как их можно получить с помощью логических рассуждений, опираясь на аксиомы?» Ответы на эти вопросы являются для учащихся далеко не очевидными.

Доказательство каждого из названных следствий состоит из двух частей: 1) доказательства существования плоскости, удовлетворяющей условию следствия, и 2) доказательства единственности такой плоскости (методом «от противного»).

Чтобы учащиеся получили более четкое представление о логике рассуждения, нужно попросить их перечислить все предложения (аксиомы, определения, теоремы), которые использовались при доказательстве этих следствий. Уяснению логики рассуждений способствует запись их на математическом языке. Здесь же уместно использовать запись структурных схем, изображающих связь доказываемого предложения с ранее известными.

Несколько неожиданной для учащихся оказывается мысль о возможности составления различных систем аксиом для построения геометрии. На эту сторону методики изучения аксиом в практике преподавания обычно обращается мало внимания. Именно поэтому у учащихся нередко складывается неверное представление о том, что аксиомы кем-то раз и навсегда открыты и другими их заменить нельзя.

Представление о вечности и незыблемости рассматриваемой в средней школе системы аксиом так или иначе связано с недостаточно четким пониманием сути аксиоматического метода. Думается, и в этом случае следует чаще прибегать к помощи уже понятных из предыдущих разделов математики примеров. Так, можно рассмотреть совокупность предложений, состоящую из пяти аксиом принадлежности и трех следствий о задании плоскости.

У учащихся была возможность убедиться, каким образом из аксиом принадлежности при помощи логических рассуждений рождались следствия о задании плоскости прямой и точкой вне ее, двумя пересекающимися прямыми, двумя различными параллельными прямыми. В результате был получен один вариант логической организации данной совокупности предложений. Этот вариант определился выбором системы аксиом. Здесь уместно задать вопросы: «Возможен ли другой вариант логической организации этой же совокупности восьми предложений? Можно ли некоторые предложения из разряда аксиом перевести в разряд следствий, и наоборот?»

Чтобы ответить на них, следует провести небольшой анализ, который поможет установить, что вместо аксиомы 4 можно взять, например, следствие о задании плоскости двумя пересекающимися прямыми или следствие о задании плоскости прямой и точкой вне ее. Аксиома 4 при этом переходит в разряд теорем и ее легко доказать. В данном случае становится особенно очевидной роль аксиом в качестве исходной основы для логических рассуждений.

Изучение аксиом неразрывно связано с выводом следствий из них. Обычно они весьма просты по содержанию и настолько убедительно подкрепляются чертежами, что учащиеся не чувствуют надобности в каких-то специальных рассуждениях и доказательствах. Многие из них так и заявляют: «Зачем это доказывать? Это и так видно!»

Между тем доказывать надо. Учащиеся должны знать, что доказательство приводится не только с целью убедиться в истинности какого-либо предложения, но и для того, чтобы свести данное предложение к ранее известным, показать, каким образом из ранее известных аксиом, определений и теорем следует данное предложение.

В некоторых случаях можно умышленно избежать чертежа, обратившись к другой модели (другому истолкованию) точек, прямых и плоскостей. Например, в модели в качестве пространства возьмем множество чисел: {1; 2; 3; 4}. Элементы этого множества будем считать точками. Двухэлементные множества {1; 2}, {1; 3} и т. д., составленные из данных точек, будем считать прямыми. Под плоскостями будем понимать трехэлементные множества {1; 2; 3}, {1; 2; 4} и т. д. Нетрудно убедиться, что подобное истолкование точек, прямых и плоскостей правомерно, так как аксиомы принадлежности по-прежнему выполняются.

Если в этой модели не составлять полного списка прямых и плоскостей, то предложение: «Через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость» не представляется таким уже очевидным. В этих условиях процесс доказательства воспринимается более естественно. Из этого примера следует, на наш взгляд, важный для понимания необходимости доказательства вывод: данный способ охватывает сразу все случаи возможных истолкований исходных геометрических понятий. А это очень важно.