

Н. М. РОГАНОВСКИЙ

НАУЧНО-
МЕТОДИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ПОСТРОЕНИЯ
УЧЕБНИКА
ГЕОМЕТРИИ
СРЕДНЕЙ
ШКОЛЫ

Электронный архив www.mathnet.ru Кулешова

Н. М. РОГАНОВСКИЙ

**НАУЧНО-
МЕТОДИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ПОСТРОЕНИЯ
УЧЕБНИКА
ГЕОМЕТРИИ
СРЕДНЕЙ
ШКОЛЫ**

МИНСК „ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА” 1992

Рогановский Н.М. Научно-методические основы построения учебника геометрии средней школы.— Мн.: Выш. шк., 1992.— 108 с.— ISBN 5-339-00651-4.

Сделана первая в нашей стране попытка разработать научно-методические основы построения учебника геометрии средней школы. Системному анализу подвергаются следующие параметры учебника: основной учебный материал, логико-математическая система построения теоретического материала, методический аппарат учебника и общий объем учебника. Авторская концепция школьного учебника геометрии ориентирована на совершенствование его ключевых параметров. В основе ее лежит идея своевременного введения и выборочного применения нескольких математических методов. Последние рассматриваются как естественное средство рационализации логико-математической системы учебника. В зависимости от этого решаются вопросы отбора содержания учебного материала, его организации в учебнике, включения методического аппарата. Особое внимание уделяется реализации принципа дифференциации обучения.

Для преподавателей и студентов педагогических институтов, научных работников, учителей средней школы.

Табл. 4. Ил. 18. Библиогр.: 119 назв.

Рецензент: кандидат педагогических наук, доцент А.Б. Василевский.

Р 4306010502 — 020

Зак. изд. — 92

М 304 (03) — 92

ISBN 5-339-00651-4

© Рогановский Н.М., 1992

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовке школьного учебника геометрии приходится решать ряд проблем, например: как отбирать математическое содержание, какое место в учебнике должен занимать традиционный материал, что относить к основному учебному материалу, каковы приемы отбора и формирования основного учебного материала, какое место в школьном курсе должны занимать обобщающие понятия, как достичь нормализации нагрузки учебника и учащихся, каким образом формировать логическую структуру учебного курса, какие требования следует предъявлять к уровню строгости изложения, как избежать крайностей в строгости изложения, какие применения в школьном курсе могут найти идеи аксиоматического метода, как сделать учебник доступным, какой методический аппарат должен присутствовать в учебнике и др. В настоящее время эти проблемы ставятся с особой остротой в связи с осуществлением непрерывного образования, гуманизации и демократизации учебного процесса, его дифференциации и индивидуализации. Все это не может не отражаться на содержании и характере учебников по математике для средней школы.

Данная монография посвящена вопросам совершенствования школьного учебника геометрии. В ней обсуждаются методические требования к построению учебника в условиях дифференциации обучения, способы рационализации теоретической части учебника, пути совершенствования его методического аппарата. Особое внимание уделяется усилению воспитывающих и развивающих функций учебника.

Отличительной особенностью работы является исследование основных параметров учебника в их взаимосвязи и взаимозависимости.

Перенасыщение многих учебников теоретическим материалом — одна из основных причин перегрузки учащихся. Поэтому ключом к совершенствованию учебника в целом является достаточно эффективная рационализация его теоретической части. Последняя представляет собой необходимое условие и средство совершенствования системы задач учебного курса. Эти два положения определяют логику данного исследования.

Рационализация теоретического материала учебника связывается с ранним введением и выборочным применением синтетических (в том числе традиционных, конструктивных) и аналитических методов геометрической науки. Ориентация школьного курса на сравнительно полную систему математических методов позволяет избежать абсолютизации некоторых из них и применять каждый из методов лишь в тех случаях, когда он дает наибольшие упрощения. Такая рационализация теоретической части учебника приводит к более экономному, краткому ее изложению и не обедняет

набор понятий и фактов школьного курса геометрии. Она позволяет нормализовать учебную нагрузку учащихся, больше внимания уделить активному решению математических задач, реализации воспитательных и развивающих функций обучения математике.

Условия для более полного соединения образовательных, воспитательных и развивающих функций обучения геометрии создаются за счет того, что разработанная технология создания учебника позволяет выделить на решение задач до $2/3$ учебного времени, отводимого на геометрию. (Заметим, что затраты времени на решение подготовительных, подводящих задач, рассмотрение примеров и контрпримеров, используемых в качестве дидактического средства при изучении теоретического материала, в указанные $2/3$ не входят. Кроме того, автор не имеет в виду ориентацию методики на „раздельное” изучение теории и решение задач.) Компактное изложение теоретического материала дает возможность, не перегружая учебник, ввести в него в систематическом виде методический аппарат, что улучшает доступность учебника и усиливает его роль в организации самостоятельной работы учащихся.

Автор выражает благодарность рецензенту – заведующему кафедрой методики преподавания математики Минского государственного педагогического института им. А.М. Горького кандидату педагогических наук А.Б. Василевскому – за ценные советы и замечания, способствовавшие улучшению книги. Автор признателен также профессору А.С. Мищенко, заместителю директора НИИ СиМО АПН России В.В. Фирсову, профессору В.И. Мишину, сотрудникам лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН России и кафедры методики преподавания математики Могилевского государственного педагогического института им. А.А. Кулешова – за помощь в работе при подготовке рукописи к изданию.

Автор

В.1. КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Ключевыми в данной работе являются следующие понятия: научно-методические основы построения учебника, совершенствование учебника, параметр учебника, системный подход к исследованию параметров учебника. Автор не претендует на создание каких-либо универсальных, абсолютных основ школьного учебника геометрии. Таких незыблемых основ просто не существует. Относительный, диалектический характер их объясняется изменчивостью факторов, влияющих на учебник. Меняются требования общества к среднему образованию, состояние современных математической, педагогической и психологической наук. Социальный заказ имеет различные педагогические и методические интерпретации. Учет современных научных достижений не может вестись в русле однозначных методических решений. Поэтому научно-методические основы школьного учебника обуславливаются выбором определенной научной концепции. Наличие концептуально различных учебников, расширение прав средней школы в выборе учебников – наиболее верный путь коренного улучшения обучения математике в средней школе.

С учетом сказанного дадим следующую расшифровку понятия „научно-методические основы построения учебника геометрии средней школы”.

Научно-методические основы построения учебника геометрии средней школы включают:

- 1) определенную теоретическую концепцию учебника, учитывающую социальный заказ, достижения современных математической, педагогической и психологической наук, специфику данного учебного предмета, системный подход к учебнику, ориентирующий на разработку целостной научно-методической теории учебника, соответствующей выбранной концепции;

- 2) выделение системы основных параметров учебника, оценку их современного состояния, определение направлений совершенствования параметров учебника, выделение ключевых параметров и использование их влияния на остальные с целью совершенствования всей системы параметров;

- 3) разработку методических требований к построению учебника с учетом выбранной концепции;

- 4) разработку способов рационализации теоретического материала учебника (последняя рассматривается как ключ к совершенствованию всей системы параметров);

5) определение содержания, структуры и формы предъявления методического аппарата учебника, способствующего более полной реализации воспитательной, образовательной и развивающей функций учебника.

В данном исследовании разработка научно-методических основ учебника геометрии средней школы ведется на базе концепции выборочного применения при изложении теоретического материала нескольких математических методов.

Под параметром учебника будем понимать показатель, характеризующий учебник, выражающий какое-либо основное его свойство. В математике и ее приложениях под параметром обычно подразумеваются измеримые величины. Применительно к учебнику понятие параметра целесообразно расширить, включив в него не только количественные, но и качественные показатели. Например, объем учебника – количественный параметр, а стиль изложения учебных текстов – качественный. В зависимости от решаемой исследователем задачи параметры можно объединять, укрупнять или, наоборот, делить на более мелкие части. Если изменение значений некоторого параметра вызывает существенные изменения значений других параметров, то такой параметр будем называть *ключевым* (или *параметром активного воздействия*). С помощью ключевого параметра можно воздействовать в определенном направлении на всю систему параметров. Таким параметрам в данной работе придается особое значение.

Под основными параметрами учебника будем понимать следующие:

1) *основной учебный материал* (состав теоретического и задачного материала, соотношение между теоретическим и задачным материалом, выбор трактовки понятий и фактов);

2) *логико-математическую систему построения теоретического материала учебника* (выбор математической базы для изложения школьного курса геометрии, математических методов изложения, последовательности введения математических методов, области применения математических методов, логической структуры построения, уровня строгости изложения);

3) *методический аппарат учебника*, относящийся к теоретической части учебника и задачному отделу;

4) *общий объем учебника* (соответствие его ресурсам учебного времени, отводимого на предмет учебным планом).

Под *содержанием учебного материала* понимается информация, сообщаемая учащимся посредством данного материала. *Формой предъявления учебного материала в учебнике* назовем совокупность способов передачи этой информации. Под *основным учебным материалом* (этот параметр мы относим к числу ключевых) будем понимать материал, удовлетворяющий следующим требованиям: 1) он имеет наибольшую образовательную ценность, обязателен для усвоения всеми учащимися; по нему планируется не только усвоение знаний, но и формирование умений и

навыков; включает в себе значительный воспитательный и развивающий потенциал, составляет инвариантную часть содержания образования в различных типах средних учебных заведений, остается постоянным в различных формах осуществления дифференцированного обучения; 2) играет базисную роль в построении значительной части учебного курса. Учебный материал, не относящийся к основному, назовем *дополнительным*. Содержание дополнительного материала зависит от той или иной формы дифференцированного обучения. На *общекультурном уровне обучения* дополнительный материал излагается с целью общего ознакомления; учащиеся узнают здесь некоторые новые геометрические понятия и факты, большинство из которых приводится без доказательства, знакомятся с отдельными их применениями. Для *повышенного уровня обучения* дополнительный материал по своему характеру изложения и требованиям к знаниям учащихся приравнивается (или почти приравнивается) к основному, не играя, однако, базисной роли при построении учебного курса. Внутри основного и дополнительного материала целесообразно выделить *вспомогательный учебный материал*. Если разбиение учебного материала на основной и дополнительный проводится в зависимости от его образовательного значения, то выделение вспомогательного учебного материала осуществляется по логическому критерию: вспомогательный материал базисной роли в построении курса не играет; по отношению к основному и дополнительному материалу он выполняет „обслуживающую” функцию, привлекается в целях упрощения изложения; вспомогательный материал может быть связан с пропедевтикой отдельных математических методов, опережающей начало их систематического применения.

Методический аппарат учебника характеризуется нами в категориях *функционально-структурного подхода*. С точки зрения функции, выполняемой им в обучении, под *методическим аппаратом учебника* будем понимать те его компоненты, которые приводятся в связи с изложением основного учебного материала и призваны помочь учащимся в его усвоении, в достижении планируемых целей обучения. В структурном отношении (согласно теории формирования умственных действий) методический аппарат представим следующими компонентами: *мотивационным, ориентировочным, исполнительным и контрольным*.

Под *логико-математической системой учебника* (этот параметр учебника также относим к ключевым) будем понимать определенное построение теоретического материала, включающее выбор некоторой математической базы, системы определений и доказательств.

Совершенствование учебника по отдельному параметру может привести к понижению качества учебника по другим параметрам. Поэтому важно системное исследование всей совокупности основных параметров. Системный подход к исследованию совокупности основных параметров учебника означает выявление взаимосвязи между ними, определение ключевых параметров, характера их влияния на остальные, целесообраз-

ное регулирование значений параметров путем изменения значений ключевых параметров. Под совершенствованием учебника будем понимать любое изменение значений одного или нескольких параметров, приводящее к улучшению учебника в целом. При этом могут быть использованы некоторые идеи математических методов оптимизации. В частности, определенное применение может найти *принцип оптимальности по Парето*, согласно которому под оптимизацией понимается улучшение одних показателей при условии, что другие показатели не ухудшились. Полезными могут оказаться идеи решения задач блочного и сепарабельного программирования. К отдельным количественным параметрам могут применяться методы линейного программирования [70].

В.2. О КОНЦЕПЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

Обратимся к международному опыту дифференциации обучения. В ряде стран наблюдается тенденция отказа от крайних форм дифференциации. Так, например, до 70-х гг. в Англии использовалась ранняя и довольно жесткая форма дифференциации – учащиеся после начальной школы (в возрасте 11 лет) подвергались тестированию и в соответствии с его результатами распределялись по школам следующих трех типов: грамматическая, готовящая в вуз; средняя современная с более низким уровнем образования; средняя техническая с профессиональным уклоном. В 70-е гг. появились объединенные, или всеохватывающие, школы, в которых обучается в настоящее время до 90 % школьников. Сохранились в небольшом количестве грамматические школы, охватывающие примерно 4 % учащихся, а также частные элитарные „публик скулз“, в которых обучается 6 % школьников. Изменились при этом формы дифференциации. Они принимают отчетливо выраженный характер в IV классе средней школы (в возрасте 14 лет). Около 50 % учебного времени выделяется на обязательные предметы, а остальное – на предметы по выбору; последние объединяются в несколько блоков. Из каждого блока учащийся обязан выбрать указанное число предметов. Более способные школьники изучают, как правило, отдельные предметы, менее способные – интегрированные курсы. Для слабоуспевающих предлагаются корректирующие курсы. Блоки сформированы таким образом, чтобы при различных вариантах выбора, произведенного учеником, его обучение проходило по относительно сбалансированному плану, обеспечивающему образовательную подготовку по различным направлениям. В „публик скулз“ доля обязательных предметов выше, чем в государственных. Дифференциация достигает кульминации в VI двухгодичном классе полной средней школы (в возрасте 16–17 лет). У каждого ученика формируется индивидуальный учебный план, составленный из

предметов определенной специализации. В средней школе применяется также группировка учащихся по способностям („стримз“, „бэндз“, „сетс“, смешанные группы). Все более распространяются группы по успеваемости. Создание временных групп дает возможность каждому ученику проявить себя хотя бы по одному предмету, т.е. попасть в группу сильных. Опыт ряда школ свидетельствует, что и в этих условиях около 10 % учащихся оказываются в слабой группе по всем предметам. С 1988 г. стал действовать единый „Национальный учебный план“. Обязательные предметы занимают в нем 75–85 % учебного времени. Увеличена доля естественно-научных предметов – до 20 %. На математику выделено 10 % времени.

В США также встали на путь создания единой всеохватывающей школы, в рамках которой учащиеся обучаются по различным направлениям (потокам). Основные формы дифференцированного обучения начинают осуществляться в младших классах средней школы. Блок обязательных учебных предметов составляет 70–80 % учебного времени. Индивидуальные интересы учащихся учитываются путем создания элективных курсов (обязательных и свободных по выбору). В IX классе создаются различные учебные программы, согласованные с потоками старшей школы. В старшей школе (X – XII классы) блок обязательных дисциплин сокращается и включает всего три предмета: английский язык, обществоведение, физкультуру. Для выбора предлагается иногда 150–200 курсов. Считается, что ученик может изменить характер обучения в сторону повышения его уровня. Однако на практике, как правило, срабатывает „лифт, идущий вниз“. По данным на 1984 г., отсеив из школы составил 27 %. Только 10 % выпускников получают диплом с правом поступления в колледж, а 8 % выдается диплом за практическую работу, выполненную вне школы (в магазине, конторе, на производстве). В настоящее время министерство образования предложило „Вариант Б“, в котором усиливается обучение в XI – XII классах на общеобразовательной основе (для 80 – 90 % учащихся).

Школам ФРГ присуща внешняя дифференциация, выражающаяся в существовании трех типов школ: основная, реальная, гимназия. Появилась новая, так называемая общая, или интегрированная, школа. Однако она охватывает только 5 % учащихся. В основной школе обучаются 38 %, в реальной – 29,2, в гимназии – 27,6 %. С 10 лет идет распределение учащихся по различным типам школ. Слишком ранняя дифференциация закрывает для большинства учащихся путь к полноценному, фундаментальному образованию. Практикуется создание временных групп по успеваемости. Наиболее распространенной является АБВ-дифференциация, предусматривающая наличие трех неравноценных по уровню курсов. На А-курсе математика изучается на более высоком теоретическом уровне, на Б-курсе – на среднем, на В-курсе – на пониженном. Применяется также более углубленная ПРОА-дифференциация, включающая четыре курса: прогрессивный, расширенный, основной, адаптированный, отличающиеся друг от друга своей сложностью и насыщенностью. Внутри этих форм дифференциации

применяется иногда дополнительный, так называемый „лифт-курс” для оказания интенсивной помощи учащимся. Распределение учащихся по курсам проводится каждые полгода по результатам тестирования.

Во Франции существует трехступенчатая школа: начальная с пятилетним сроком обучения, коллеж (неполная средняя школа, 4 года обучения) и лицей (полная средняя школа, 3 года обучения). С 1975 г. коллеж стал единым, без деления на классическое и реальное отделения. В IV – III классах предлагаются факультативные дисциплины. Обязателен выбор одной из них. Этот выбор определяет дальнейший характер обучения в лицее или профессионально-техническом учебном заведении. Основные формы дифференциации в коллеже: первые два года – разноуровневые программы по трем предметам (французскому и иностранному языкам, математике). Уровни: обычный и облегченный. В следующие два года дифференциация осуществляется с помощью факультативных предметов. На первом году лицея осуществляется повторная учебная ориентация учащихся – с помощью трех групп факультативных занятий, на втором году – дифференциация резко усиливается и ведется по секциям общеобразовательного и технологического направлений. Из детей, начавших учиться в коллеже, только 54 % приходят в лицей. Существующий механизм учебной ориентации срабатывает в основном в направлении „сверху вниз”.

Учитывая положительное содержание в международном опыте дифференциации обучения, традиции и задачи отечественной школы, выскажем ряд рекомендаций. Учебник обуславливается выбором форм дифференциации обучения, в первую очередь следующих: распределение учащихся после окончания IX класса по различным типам средних школ – общеобразовательной и профессиональной; факультативные курсы в VII – IX классах по углубленному изучению отдельных предметов; классы углубленного изучения отдельных предметов в неполной средней школе; дифференциация по возрастным особенностям учащихся; формирование классов с ускоренным изучением предметов; ограничение числа обязательных предметов и введение предметов по выбору с X класса; предоставление возможности выбора не только предметов, но и уровня сложности их изложения – общекультурного или повышенного; введение в X – XI классах по отдельным предметам курсовой системы обучения, при которой классы одной параллели делятся на потоки в зависимости от выбора учащимися уровня сложности изучения предмета. Опыт зарубежной школы свидетельствует о том, что ни одна из форм дифференциации не является оптимальной. Поэтому разумно идти на определенный компромисс, сочетание этих форм.

Успешному становлению и развитию дифференцированных учебников должна способствовать выработка *общей концепции дифференцированного обучения*. Наиболее существенными представляются следующие ее составляющие: нежелательность ранней дифференциации (по окончании начальной школы); отказ от крайних форм дифференциации в неполной средней школе; введение в неполной средней школе начальных форм

дифференциации, подготавливающих учащихся к основному этапу; введение основного этапа по окончании неполной средней школы; ориентация на сочетание различных форм дифференциации; постепенность введения каждой формы дифференциации, обеспечивающая поэтапность ее освоения.

Концепция должна включать в себя определенную детализацию *основного этапа*. Введение на основном этапе блока обязательных предметов и предметов по выбору соответствует широкой международной практике. Однако конкретные пути реализации этой формы дифференциации в разных странах различны. Они отличаются друг от друга составом блоков, разнообразием уровней сложности учебников, соотношением времени, выделяемого на обязательные предметы и предметы по выбору. В нашей стране пока отсутствует достаточный опыт дифференциации обучения. Поэтому на первых порах вряд ли следует стремиться к одному какому-либо варианту. В различных республиках и регионах страны можно было бы опробовать альтернативные варианты, а затем уже на основе накопленного опыта произвести отбор наиболее перспективных. Подробнее остановимся на одном из таких альтернативных вариантов. К блоку *обязательных предметов* мы предлагаем отнести следующие: родной язык и литературу, историю и обществоведение, естествознание, математику и физкультуру, с выделением на эти предметы не менее 50 % учебного времени. И обязательные, и предметы по выбору предлагаем излагать на двух уровнях – общекультурном и повышенном, которые могут иметь некоторые подуровни. Требование обязательности изучения некоторых предметов означает, что по этим предметам ученик должен выбрать для себя определенный курс – общекультурный или повышенный.

К примеру, отнесение математики к числу обязательных предметов (что согласуется с опытом большинства стран мира) допускает следующие варианты для ученика: ученик выбирает общекультурный курс и только ~~и~~ и ограничивается; он выбирает повышенный курс, общекультурный при этом не изучает, а освобождающееся время идет на изучение повышенного курса. Отнесение, например, химии в блок предметов по выбору означает следующее: ученик может этот предмет вообще не выбирать, он ограничивается сведениями по данному предмету, имеющимися в интегрированном курсе „естествознание”; если он выбирает химию, то может изучить ее по одному из курсов – общекультурному или повышенному; если ученик среди предметов по выбору выбирает все предметы, входящие в обязательный курс „естествознание”, то этот обязательный курс он не изучает. Все курсы целесообразно отнести к одному из двух направлений – академическому и профессиональному. Академическое направление можно представить тремя основными секциями: гуманитарной, естественнонаучной и физико-математической, профессиональное направление – секциями, имеющими ориентацию на промышленность, сельское хозяйство, сферу обслуживания. Для общекультурных курсов могут использо-

ваться как интегрированные, так и отдельные учебники, при изложении повышенных курсов — отдельные учебники.

Было бы крупной ошибкой ограничивать общекультурные курсы только сведениями, „необходимыми для жизни“. Механическое сокращение содержания учебного предмета неизбежно ведет к падению уровня развития учащихся, которое в еще большей мере „необходимо для повседневной жизни“. Избежать примитивизма, некоего ликбеза в общекультурных курсах может помочь такое соотношение: в содержание общекультурного курса должно входить не менее 75–85 % содержания повышенного курса. Такое соотношение оставляет ученику реальную возможность перейти от общекультурного курса к повышенному. При „ножницах“, превышающих 25 %, переход на повышенный курс делается практически невозможным.

Каждая форма дифференциации по возможности должна строиться таким образом, чтобы она играла роль „лифта, идущего вверх“, а не „лифта, идущего вниз“. В этих целях в X–XI классах один раз в полгода желательно ставить вопрос о возможном переводе некоторых учащихся на повышенный курс. Тем самым будут своевременно учтены возможные изменения в первоначальной профориентации учащихся. Общекультурный курс не должен быть урезанным и в отношении своей воспитательно-развивающей функции. Полноценному проявлению этой функции должен способствовать методический аппарат учебника. Успех дифференциации обучения невозможен без наличия достаточного количества альтернативных учебников. Среди них должны быть и такие, которые близки друг к другу по уровню изложения. Использование таких учебников может помочь ученику, не справившемуся с определенным уровнем обучения, удержаться на достаточно близком уровне. В этом случае повышается также вероятность возвращения ученика на прежний более высокий уровень.

Введение дифференцированного обучения в условиях недостаточно высокого профессионального уровня многих учителей и малокомплектности большинства сельских школ предполагает тщательную организационную подготовку. Излишняя поспешность, погоня за „широтой охвата“ могут только принести вред. Если в школе есть способный учитель, можно организовать класс с углубленным изучением предмета, но не торопиться объявлять таковой всю школу. Для учащихся сельской местности необходимы школы-интернаты типа гимназий и лицеев в городах, районных, областных и республиканских центрах. Свою подвижническую миссию должны выполнить высшие учебные заведения. Организационные меры необходимо подкреплять достаточной материальной базой, учебно-методической литературой, подготовкой учителей.

Применение единственного математического метода приводит к тому, что он используется и в таких случаях, когда не дает преимуществ в простоте и доступности изложения. Упрощение одних тем или вопросов неизбежно сопровождается усложнением других. В этом нет ничего противоземного, если учесть, что универсального математического метода, способного давать упрощения во всех случаях, просто не существует. Поэтому вопрос о рационализации логико-математической системы курса с помощью одного математического метода всегда остается открытым. С учетом сказанного в данном исследовании разрабатывается концепция выборочного применения нескольких математических методов при изложении школьного курса геометрии, состоящая из следующих положений:

1) одностороннее увлечение отдельными математическими методами изложения геометрии, взаимоисключающее противопоставление этих методов друг другу не может привести к существенному совершенствованию учебника по его ключевому параметру – рационализировать логико-математическую систему изложения. Упрощение логико-математической системы изложения (главным образом, системы доказательств) целесообразно связывать с выборочным применением нескольких математических методов в тех случаях, когда они дают явные упрощения по сравнению с другими;

2) применение различных математических методов не должно приводить к излишней методологической разнородности изложения, нарушению необходимого соотношения между знаниями о методах математики и фактологическим компонентом учебного курса;

3) нецелесообразно уравнивание образовательных целей в ознакомлении учащихся с различными математическими методами. В условиях дефицита учебного времени это уравнивание неизбежно приведет к неглубоким навыкам применения математических методов. Целесообразно выделить ведущего и вспомогательных математических методов;

4) с ведущим математическим методом учащиеся знакомятся с самого начала курса и интенсивно применяют его на протяжении всего курса. Для вспомогательного математического метода предусматривается подготовительный этап, на котором учащиеся знакомятся вначале лишь с отдельными применениями этого метода. Подготовительный этап осуществляется параллельно с применением ведущего метода. Цель подготовительного этапа – помочь учащимся избежать нежелательной психологической ситуации, когда стереотипы мышления, складывающиеся в процессе длительного применения одного математического метода, затрудняют переход к использованию другого метода;

5) должна соблюдаться определенная преемственность между математическими методами, применяемыми при изложении теоретического

материала и решении задач, при изложении планиметрии и стереометрии

6) в условиях углубленной дифференциации обучения выбор ведущего математического метода в учебниках различного уровня не является однозначно значимым. В учебниках для массового использования в качестве ведущего математического метода может быть выбран традиционно-синтетический, а в отдельных учебниках повышенного уровня – метод геометрических преобразований или координатно-векторный метод.

Проблемой данного исследования является построение научно-методических основ учебника геометрии средней школы, которые бы характеризовались: системным подходом к изучению совокупности основных параметров учебника; совершенствованием системы основных параметров учебника на основе рационализации логико-математической системы учебника; совершенствованием логико-математической системы учебника на основе выборочного применения нескольких математических методов в соответствии с их „конкурентоспособностью”; обеспечением своевременного введения нескольких математических методов; уточнением содержания методического аппарата учебника и устранением рядоположенности методического аппарата и других компонентов учебника; нормализацией общего объема учебника путем уточнения объема учебного материала в академических часах.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОТБОРУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ В ШКОЛЬНЫЙ УЧЕБНИК ГЕОМЕТРИИ

1.1. ТИПЫ УЧЕБНИКОВ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ. ОСОБЕННОСТИ ОТБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ В НИХ

Под *отбором математического содержания* понимается выбор понятий и фактов, их трактовок, математических методов изложения. При отборе в учебник математического содержания решаются прежде всего образовательные цели обучения. В этой связи значительный интерес представляют работы по дидактическому анализу состава и содержания требований к результатам обучения школьников (см. об этом в книге [102]). В предельно конкретной форме учебник фиксирует состав математического содержания, его объем, устанавливает соотношение между традиционными и новыми темами, определяет трактовки понятий и фактов, отдает предпочтение тем или иным математическим методам. В учебнике задается степень детализации отдельных тем. Средствами учебника выделяются основные виды учебных текстов: основной, дополнительный и вспомогательный. Учебник задает определенный уровень знаний, умений и навыков учащихся. Своим содержанием он программирует формирование определенного культурного уровня учащихся, их развитие.

Дифференциация обучения, на наш взгляд, должна вестись *при сохранении единого уровня общеобразовательной подготовки учащихся средней школы*. В этом плане мы придерживаемся концепции, приведенной в работе [83]. В ней выделяются фундаментальный, вспомогательный и дополнительный компоненты содержания учебного материала. Установление единого уровня связывается с унификацией фундаментального компонента.

Охарактеризуем некоторые *типы учебников для осуществления дифференцированного обучения*.

1. Учебник этого типа предназначен для массового обучения на общекультурном уровне. Он содержит основной учебный материал („обязательный минимум для изучения всеми” [5], „фундаментальный компонент содержания” [83]) и дополнительный материал, изучаемый на ознакомительном уровне („материал для общего ознакомления” [5]). Например, к основному учебному материалу могут быть отнесены традиционно-синтетические темы (измерение отрезков и углов, параллельность и перпендикулярность прямых, признаки равенства треугольников, свойства равнобедренного, равностороннего и прямоугольного треугольников, свойства четырехугольников, окружности, правильных многоугольников и др.),

а к дополнительному – новые темы (координаты, векторы, геометрические преобразования). Возможен также подход, при котором основной и дополнительный материал выделяется как в традиционно-синтетических темах, так и в темах, посвященных координатам, векторам, геометрическим преобразованиям. К дополнительному материалу могут быть отнесены доказательства ряда теорем, наборы более сложных задач и т.д.

II. С помощью учебника этого типа осуществляется повышенный уровень обучения. Он содержит основной и дополнительный материал, имеющийся в учебнике I типа, но дополнительный материал излагается уже не на ознакомительном уровне, а на таком же (или примерно таком же) уровне, как и основной материал. Например, темы, посвященные координатам, векторам и геометрическим преобразованиям, изучаются в их систематическом изложении, с выработкой определенных умений и навыков решения геометрических задач координатным, векторным методами и методом геометрических преобразований. Дополнительный материал в учебнике II типа может быть несколько шире по сравнению с учебником I типа. Особенно это замечание касается задачного материала. Часть дополнительного материала в учебнике II типа излагается на ознакомительном уровне.

III. Учебник этого типа соединяет в себе учебники I и II типов и обеспечивает оба уровня обучения. Он содержит основной учебный материал в таком же виде, как и учебники предыдущих типов, и дополнительный материал, состоящий из двух частей. Первая часть в общекультурном курсе предназначена для общего ознакомления, вторая – для желающих. В повышенном курсе первая часть изучается на таком же уровне, как и основной учебный материал, вторая часть – на ознакомительном уровне. В структурном отношении учебник III типа сложнее учебников двух предыдущих типов.

Индивидуализацию обучения можно обеспечить путем варьирования объема и глубины проработки как дополнительного, так и основного учебного материала. Сокращая или исключая дополнительный материал в учебнике I типа и делая определенные послабления при изучении основного учебного материала, можно получить *корректирующий курс* для классов и школ выравнивания. Увеличивая роль дополнительного материала в учебнике I типа, можно приблизить его (по выполняемым в обучении функциям) к учебнику II типа. Существенно, что в рамках общекультурного курса можно обеспечить все необходимые условия для „роста” учащегося и возможного его перевода на повышенный курс.

IV. Учебник обеспечивает только повышенный уровень обучения. Он содержит основной и дополнительный учебный материал, но при этом отходит от текстуального тождества в его изложении в учебниках предыдущих типов. Основной учебный материал излагается с соблюдением принципа единства состава и структуры учебного материала, но с изменением стиля, языка, уровня строгости. Например, если уровень строгости в учебниках I – III типов может быть таким, как в учебнике геометрии А.П. Кисе-

лева, то в учебнике IV типа – таким, как в учебнике А.В. Погорелова. Учебник IV типа можно использовать в классах с углубленным изучением математики (начиная с седьмого), а также при курсовой системе обучения.

V. Учебник обеспечивает только повышенный уровень обучения. По сравнению с учебником IV типа он содержит больше изменений в изложении основного учебного материала. Принцип структурного единства здесь не соблюдается. Однако состав основного учебного материала прежний. Например, в основной учебный материал входит тот же самый традиционный-синтетический материал, что и в учебнике I типа, но изложен он на иной математической базе, что и приводит к нарушению принципа структурного единства. Указанное отличие можно проследить на ряде существующих учебников. Если к учебнику I типа отнести учебник Н.Н. Никитина [74], то учебники А.Н. Фетисова [104], под редакцией В.Г. Болтянского [29] следует отнести к учебникам V типа.

VI. Этот тип учебника предназначен для оказания интенсивной помощи учащимся (для классов и школ выравнивания). Содержание теоретического материала в нем в основном дублирует содержание того или иного общекультурного курса, но разбивается на более мелкие части. Например, текст объемом 1,5–2 страницы может быть представлен в виде параграфа, в котором выделяется 3–4 пункта (примерно так организован текст в учебнике геометрии Н.Н. Никитина). После каждого пункта приводятся упражнения дидактического характера (на развитие математической речи, на закрепление и проверку понимания данного фрагмента теории). Более сложные упражнения и задачи помещаются в конец параграфа или всего учебника. Уровень сложности этих упражнений и задач должен соответствовать обязательным результатам обучения, при достижении которых ученик переводится на обучение по обычному общекультурному курсу.

VII. Учебник содержит общекультурный курс. Предназначен для учащихся старших классов. В интегрированном виде включает алгебру, начала анализа и геометрию.

VIII. Учебник строится на основе модульного принципа. В виде двух отдельных модулей строится учебник, содержащий только теоретический материал, и задачник. При этом один и тот же учебник снабжается несколькими различными задачками. Сочетая учебник с тем или иным задачником, можно получить достаточно широкий набор общекультурных или повышенных курсов. Важно, что конструирование учебного курса при этом может выполнить сам учитель с учетом особенностей своего класса. Разумеется, учебник и задачник должны находиться в полном соответствии друг другу, в противном случае стыковка их окажется нецелесообразной.

1.2. ОТБОР СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНОГО УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

1.2.1. Методологические аспекты

При отборе основного учебного материала надо с самого начала решить вопрос о том, какому учебному материалу отдать предпочтение, традиционно-синтетическому или новому – координатам, векторам, геометрическим преобразованиям. Нетрудно заметить, что уже в самой постановке этого вопроса содержится противопоставление традиционно-синтетического материала всему остальному. Такое противопоставление вряд ли целесообразно, так как оно фактически отрицает другой подход, при котором основной и дополнительный материал выделяется внутри как традиционно-синтетических, так и новых тем. Естественной методологической основой для разрешения этого вопроса является *диалектика исторического и логического подходов* к определению содержания учебника геометрии.

Принцип единства исторического и логического подходов [105, с. 180] ориентирует на сочетание традиционного и нового содержания. Это предполагает отбор наиболее ценного учебного материала как в традиционном, так и новом содержании. Однако общей методологической основы, при всей ее важности, совершенно недостаточно: фактически любое сочетание традиционного и нового содержания можно трактовать как определенную реализацию принципа единства исторического и логического подходов.

1.2.2. Отбор основного учебного материала в учебниках I – III типов

О роли традиционного материала. Обратимся к уточнению места традиционного геометрического содержания в основном учебном материале. Исторический подход находит отражение в программе [85]. Традиционные темы составляют костяк, остов этой программы. Отражением логического подхода в ней является включение координат, векторов и геометрических преобразований. Поиски современных изложений школьного курса геометрии нередко связываются с усилением алгебраизации геометрии. Эти попытки отражают реальные процессы, протекающие в самой математике, устанавливают более тесные связи школьного и вузовского курсов. Среди определенной части математиков существует мнение, что геометрия в ее традиционных синтетических формах исчерпала себя и уже не оказывает на систему научного знания прежнего влияния. С точки зрения проблем обучения более важной является „оптимистическая” точка зрения. Она объясняется ролью синтетических аспектов как наглядного материала для самых различных математических исследований. С развитием математики, повышением абстрактности ее теорий усиливается потребность в наглядном осмыслении результатов исследования. Для исследователей

геометрические представления играют роль эвристик, подсказывающих новые результаты, обобщения, направления и методы исследования. Именно такую роль наглядно-геометрические представления сыграли, например, в разработке теории оптимизации, где группой советских математиков под руководством академика Л.С. Понтрягина получены существенные результаты. По словам В.Г. Болтянского — одного из членов этой группы, — достижение таких результатов только аналитическими методами, без геометрических „картинок” практически было бы невозможным. Точная характеристика роли элементарной геометрии в современной математике дана А.Д. Александровым: „...Как бы ни выросла математика, как бы ни удалась она от греческой геометрии в новые высоты абстракции и глубины оснований, сущность ее заложена и остается выраженной в системе элементарной геометрии, дополненной затем алгеброй и математическим анализом” [5, с. 12]. *Традиционно-синтетический аспект геометрии должен занимать ведущее положение в школьном курсе и служить основой для формирования остального математического содержания.* (Сказанное, разумеется, не означает реанимацию монополии традиционно-синтетического изложения школьного курса геометрии.)

Наделение традиционно-синтетических тем наибольшими образовательными ценностями влечет за собой ряд важных методических „следствий”. Во-первых, это обстоятельство определенно указывает на содержание начала систематического курса геометрии: его необходимо теснее связывать с основным материалом. Во-вторых, должны быть обеспечены необходимые применения основного учебного материала в дальнейшем построении курса.

Приемы формирования основного учебного материала. Остановимся на двух приемах отбора основного учебного материала: *первый* основывается на учете роли того или иного учебного материала в построении логико-математической системы учебника, *второй* — на ранжировании его образовательной ценности. Поясним суть первого приема. Конечно, к основному учебному материалу относится далеко не весь традиционно-синтетический материал и не только он один. В каждом материале есть вспомогательный, который не играет большой роли в построении курса. В некоторых учебниках вспомогательный материал четко отделяется от всего остального. Такое отделение, например, широко практиковалось в учебнике А.П. Киселева. В нем термин „теорема” относился только к наиболее важным фактам, факты вспомогательного характера выделялись терминами „лемма”, „следствие”. Этот простой прием в современных учебниках, к сожалению, почему-то не используется. Уточнение содержания основного учебного материала благодаря учету его роли в построении логико-математической системы учебника — прием, непосредственно вытекающий из описанной выше методики системного исследования параметров учебника, использования влияния ключевого параметра. Наибольшее влияние

на построение логико-математической системы учебника оказывает тот математический материал, который закладывает основы определенного математического метода. В этом проявляется взаимодействие двух ключевых параметров учебника, которое позволяет усовершенствовать всю систему его параметров. Сказанное означает, что к основному учебному материалу в первую очередь необходимо относить материал, формирующий основы математического метода.

Перейдем к рассмотрению второго приема. Дефицит учебного времени вынуждает проводить более гибкую политику в отношении образовательных целей всех учебных тем. Сведения по отдельным темам могут быть представлены в самом минимальном виде, но эффективно использоваться при изложении других тем. Например, можно ограничиться самыми скромными сведениями о декартовых координатах, но максимально использовать их рационализирующие возможности при изложении векторов и геометрических преобразований. Различие образовательных целей отдельных тем может подчеркиваться неравномерным снабжением их задачным материалом. В теоретической части доказательства могут быть разбиты на три группы: обязательные; изучаемые на ознакомительном уровне; изучаемые только желающими. Доказательства, не отнесенные к обязательным, в основной учебный материал не входят.

Остановимся еще на некоторых приемах формирования основного учебного материала.

Об отборе обобщающих понятий. Как известно, обобщающие понятия экономят изложение, так как освобождают от введения ряда частных понятий. Вместе с этим неправильное использование обобщающих понятий усложняет изложение, делает его более абстрактным. Обобщающие понятия можно подразделить на следующие три группы: 1) обобщающие понятия внутри крупных разделов учебного предмета; 2) обобщающие понятия внутри всего учебного предмета; 3) общематематические понятия. Понятия первой группы служат связующим звеном между понятиями отдельного раздела. Понятия второй группы интегрируют различные разделы одного курса, а понятия третьей группы – различные математические дисциплины. Использование понятий в несвойственной им функции (например, использование общематематических понятий в роли понятий первой группы) способно усложнить изложение. Так, излишнее акцентирование теоретико-множественного подхода усложнило многие определения, сделало их менее наглядными, неудобными с точки зрения приложений. При обучении решению задач акцент часто делался не на процесс решения, не на отыскание способа решения, а на запись сообщаемого в готовом виде решения на символическом языке. Полное игнорирование теоретико-множественных понятий и символов также нецелесообразно. Программа-минимум для учебника I типа, на наш взгляд, может ограничиться определением геометрической фигуры как множества точек и использованием символов $\in$ и $\notin$.

В учебниках повышенного уровня умеренное применение могут найти символы $\subset$, $\notin$, $\cap$, $\cup$, $\emptyset$, а также логическая символика: $\Rightarrow$, $\neq$, $\forall$, $\exists$. В учебниках III типа ознакомление с этой символикой происходит в процессе изучения дополнительного материала. В учебниках IV и V типов она может быть введена в самом начале курса. Теоретико-множественную и логическую символику мы рассматриваем в основном как дидактическое средство, которое не является объектом специального заучивания, тренировок и т.п.

При отборе обобщающих понятий важно учитывать степень их наглядности. Обычно наглядность связывают с понятиями традиционной (синтетической) геометрии. Однако не менее наглядны при соответствующей методической обработке и многие нетрадиционные понятия. Обратимся, например, к понятию вектора. „Материализованными” векторами являются: стрелы для самодельного лука; стрелки-указатели; любой колющий инструмент; инструмент для пробивания отверстий. На вопрос: „Как пройти к аптеке?” ученик второго класса в ответ может показать рукой направление и сказать: „Идите туда. Через три дома будет аптека”. Как видно, здесь указываются и направление, и длина вектора. Перечень подобных примеров может быть продолжен. Это свидетельствует о том, что у детей еще до систематического курса накапливается довольно разнообразный опыт оперирования с векторами на наглядном уровне. Традиционное обучение не опирается на эти представления. В результате создается ложное впечатление, что понятие вектора менее наглядное, менее доступное и т.п. Аналогичное рассуждение можно провести и в отношении другого фундаментального математического понятия – системы координат. Приведем некоторые данные психологической науки. Понятие системы координат исследовано в данном аспекте в работах [115, 91, 78]. Оно присутствует на самых первых, самых начальных этапах формирования у детей навыков ориентации в пространстве. Как отмечает И.С. Якиманская [115], декартова система координат является теоретической абстракцией, но в своей основе она сохраняет вертикально-горизонтальное положение, свойственное схеме тела. Особенно близка к воспроизведению схемы тела прямоугольная система координат. Наряду с ориентацией по схеме тела у человека рано формируются и другие системы отсчета. Например, при выполнении сюжетного рисунка ребенок за основу берет не свое местонахождение, а какой-либо произвольный предмет и уже относительно него располагает все остальные. Переход к новой системе координат особенно отчетливо обнаруживается, когда дети выполняют различные условно-графические изображения: топографический план местности, географическую карту и т.д. „Стержнем общего развития понимания пространства, – подчеркивал С.Л. Рубинштейн [91], – является переход от фиксированной в себе точки отсчета (координат) к системе со свободно перемещаемой точкой отсчета”. И.С. Якиманская [115] отмечает, что дети очень рано проявляют способность к произвольной смене точки отсчета при оперировании пространст-

венными соотношениями. Однако эта способность не подкрепляется в обучении, а часто даже разрушается. Нематематическими примерами системы координат являются шахматная доска, план зрительного зала кинотеатра, игра „морской бой” и др. Одним из возможных подходов к развитию идеи координатных систем в школьном курсе геометрии является определение некоторых понятий (например, расстояния между двумя точками, суммы двух векторов, разности двух векторов, произведения вектора на число, скалярного произведения двух векторов, параллельного переноса и т.д.) на координатной основе. Выяснение вопроса о независимости этих определений от выбора системы координат естественным образом подводит к рассмотрению различных систем координат.

Наглядность понятия существенно зависит от выбора его трактовки. Не эквивалентными в этом отношении являются, например, трактовки вектора как направленного отрезка, класса эквивалентных направленных отрезков, параллельного переноса. Геометрическая наглядность теряется при арифметическом определении понятия вектора. Еще сложнее обстоит вопрос с наглядностью понятия вектора при его определении как элемента произвольного векторного пространства, описываемого соответствующими аксиомами. Иногда авторы сознательно идут на менее наглядные трактовки понятий, если они способствуют упрощению доказательств (что, по-видимому, неприемлемо для учебника I типа). Подтверждением этой закономерности служит работа [115]. Наглядности изложения в данной работе явно недостаточно. Вектор здесь определяется как параллельный перенос, угол как вращение, мера угла как непрерывное отображение. Параллельный перенос и середина отрезка определяются с помощью координат, прямоугольник – с помощью скалярного произведения двух векторов. Такое понижение наглядности чаще всего оказывается нежелательным даже при улучшении некоторых структурных качеств учебного материала. Сказанное не означает какого-либо запрета на алгебраизацию отдельных геометрических понятий в школьном курсе. Напротив, ограниченное применение такой алгебраизации может оказаться полезным, если оно не приводит к потере наглядности, если алгебраизация и наглядность дополняют друг друга. Обратимся к изложению векторной алгебры на координатной основе. Такое изложение чрезвычайно просто в структурном отношении. Можно ли сделать его наглядным? Конечно, роль рисунка при проведении доказательства здесь снижается, но при ознакомлении учащихся с понятиями и фактами никаких ограничений в использовании рисунков и моделей нет. Широкое применение их позволяет сделать координатное изложение не только простым в структурном отношении, но и наглядным. Основным средством наглядности при этом выступают рисунок и модель координатной сетки.

В отборе обобщающих понятий определенную помощь может оказать принцип межпредметных связей. Этот принцип ориентирует на устранение излишнего дублирования одного и того же учебного материала в различных

курсах, на установление тесных связей между различными учебными предметами. Курс геометрии призван своевременно готовить математический аппарат для изучения смежных учебных предметов. Для изучения курса физики, например, необходимо более раннее введение понятия вектора. Эта потребность вызвана тем, что в VII классе в курсе физики рассматриваются следующие вопросы: сила, сила тяжести, сила упругости, вес тела, сила тяжести на других планетах, сила – векторная величина, сложение сил, равнодействующая сил, сложение двух сил, направленных по одной прямой, сила трения, силы взаимодействия молекул, архимедова сила, равновесие сил на рычаге (см. [77]). Нельзя также признать нормальным, когда целый раздел векторной алгебры излагается в учебнике по физике (см. [48]). Этой аномалии не было бы, если бы в школьном курсе геометрии обеспечивалось своевременное введение элементов векторной алгебры. Такая возможность может быть обеспечена соответствующей перестройкой логико-математической системы учебника геометрии, более широким использованием целевой систематизации.

1.2.3. Некоторые выводы

Подводя итог, выскажем некоторые предложения об отборе основного учебного материала в учебниках I – III типов.

1. Необходимо тесное единство исторического и логического подходов. К основному учебному материалу следует относить как традиционный, так и новый: координаты, векторы, геометрические преобразования.

2. Особую роль в построении курса играет традиционно-синтетический материал: он является частью основного учебного материала и служит базой для построения остального учебного материала.

3. При формировании основного учебного материала необходимо учитывать роль каждого отдельного понятия, факта, метода в построении логико-математической системы учебника: к основному материалу относить прежде всего фундаментальные математические понятия, факты и методы, многократно используемые при построении курса.

4. Полное четкому выделению основного учебного материала способствовало неравномерное снабжение отдельных тем (или вопросов темы) учебным материалом: темы (вопросы), входящие в основной учебный материал, сопровождаются большим числом упражнений и задач; остальные вопросы – меньшим числом задач, причем и меньшей сложности.

5. В условиях дефицита учебного времени для усиления роли принципов дифференцированного и развивающего обучения целесообразно сокращение количества заучиваемых доказательств. Все доказательства (с помощью специальных сигналов-символов) разбиваются на три группы: 1) обязательные; 2) изучаемые на ознакомительном уровне; 3) изучаемые только желающими. Выделение обязательных доказательств существенным образом ограничивает рамки основного учебного материала.

6. Соотношение между традиционно-синтетическими трактовками понятий и трактовками их на векторном, координатном языках, языке геометрических преобразований целесообразно решать в пользу традиционно-синтетических. Алгебраизация отдельных геометрических понятий должна подкрепляться наглядностью.

7. При отборе основного учебного материала необходимо учитывать в полной мере потребности смежных учебных предметов.

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОБЪЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ

1.3.1. Некоторые приемы нормализации нагрузки учебника

Вопрос о нормализации нагрузки школьных учебников (в частности, учебника геометрии) неоднократно ставился в печати. (См., например, выступления А.И. Бородина („Математика в школе”, 1979, № 2), В.М. Гувернюк („Математика в школе”, 1979, № 5), Л.В. Ставраки, Д.Е. Сергеева („Математика в школе”, 1975, № 5)). Указывалось, что перегрузка учебника геометрии теоретическим материалом, особенно в шестом классе (имеется в виду старая нумерация классов), приводит к поверхностному его изучению, недостаточному выделению времени на решение задач, снижению возможностей для индивидуальной работы с учащимися на уроке. Данный вопрос не потерял остроту и в настоящее время (см., например, данные, приведенные А.Я. Халамайзером и Р.С. Черкасовым („Математика в школе”, 1987, № 2, с. 46)). В отношении „новейших” школьных учебников также высказываются предложения о „резком уменьшении” объема обязательного для всех учащихся учебного материала. Ряд авторов отмечают наличие значительной перегрузки курса планиметрии и вместе с этим недогрузки курса стереометрии („Математика в школе”, 1986, № 2, с. 26–27). В целях нормализации нагрузки предлагаются следующие приемы: сокращение усложненного и второстепенного материала, более рациональное распределение учебного материала по различным годам обучения, изучение некоторых вопросов программы на ознакомительном уровне и т.д. Более четко стали вырисовываться критерии нормализации объема учебного материала. Некоторые из таких критериев указываются авторами учебников. В.Г. Болтянский в статье [25] отмечает наличие перегрузки в первом издании учебников [26 – 28]. При подготовке второго издания [29] упрощено изложение теоретического материала, объем учебника доведен до 17 печатных листов, из которых 14 занимает обязательный материал. Материал разбит на пункты, изучение каждого из которых занимает в среднем 2 ч. На один урок выделяется примерно 4 задачи (из них 2–3 для решения в классе и 1–2 для решения дома). На шестой класс приходится 29 пунктов учебника и 226 задач. Такой объем учебного материала, как указывает В.Г. Болтянский, позволяет высвободить определенное время

на повторение, итоговый опрос по теме и т.п. В целях определения нагрузки учебников используется иногда хронометраж уроков. Такой прием описан О.А. Боковневым и И.И. Юдиной („Математика в школе”, 1980, № 6, с. 44). При использовании учебника [12] ими получены такие данные: на объяснение нового материала на уроке в среднем затрачивалось 13 мин, на решение задач – 13 мин, на самостоятельную работу – 8 мин. Встречаются попытки перераспределения учебного времени между курсами алгебры и геометрии. Л.С. Атанасян и Э.Г. Позняк [13] указывают, что при экспериментировании по их учебнику время на изучение геометрии в VII–VIII классах было увеличено на 36 ч за счет уроков алгебры. А.И. Медяник [64] приводит следующие показатели объема учебника [79]: на домашнее задание приходится в среднем $\frac{1}{3}$ страницы текста учебника, на решение задач выделяется более половины учебного времени. Иногда для характеристики объема учебника указывают соотношение (в страницах) между объемом теоретической части и набором задач, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк отмечают, что в их учебнике более $\frac{1}{2}$ объема книги занимают задачи и упражнения („Математика в школе”, 1983, № 4, с. 79).

Особый интерес, на наш взгляд, представляют такие приемы измерения объема учебного материала, которые связывают его с затратами времени. Качество обучения предмету существенно зависит от соотношения, в котором находится обучение теоретическим знаниям и обучение решению задач. Уточнение этого соотношения возможно путем приближенной прикидки затрат времени, производимых отдельно на изучение теоретического материала и на решение задач. Ниже приводятся результаты такой прикидки.

1.3.2. Об измерении объема существующих учебников

Поясним, каким образом велся подсчет времени, затрачиваемого на изучение теоретического материала. Время, необходимое для изучения теоретического материала, складывалось из следующих составных частей: 1) времени для изложения этого материала учителем на уроке; 2) времени для воспроизведения учащимися данного материала после объяснения учителя при его закреплении; 3) времени для воспроизведения теоретического материала при опросе на следующем уроке. (Определенное количество времени затрачивается на текущее повторение теоретического материала; однако такое повторение осуществляется учителем сугубо индивидуально, что затрудняет подсчет затрачиваемого на него времени; в данных расчетах это время не принималось во внимание.) Отметим еще одну существенную особенность производимой прикидки. Время, необходимое для изложения теоретического материала учителем на уроке, существенно зависит от выбора метода обучения. В качестве „условного” метода обучения, с учетом которого велся подсчет времени, мы брали репродуктивный метод. Этот метод является самым экономным

по затратам времени. При использовании проблемных методов затраты времени возрастают. Несколько слов о точности такой прикидки. Например, если положить возможные расхождения в подсчете времени для порции теоретического материала в 1 академический час равными 5 мин, то для 30 таких порций эти расхождения составят примерно 3 академических часа, для 40 порций – 4,4 академических часа. Для наших целей такая точность вполне достаточна. Важнее обеспечить сохранение точности прикидки, применяя ее к различным учебникам. Это поможет выявить определенные объективные данные об объеме теоретического материала. Заметим также, что другого более точного метода измерения объема учебного материала в часах не существует. Наиболее емким по затратам времени является изучение теорем и их доказательств. Покажем, каким образом велся подсчет времени, затрачиваемого на эту часть теоретического материала. В целях более точного учета структурной сложности доказательств применяется прием разбиения доказательства на отдельные шаги. (Под *шагом доказательства* понимается отдельное умозаключение, совершаемое на основании определенного правила вывода.) Обратимся к пункту „Сумма углов треугольника” пособия [79]. Вначале дается формулировка теоремы о сумме углов треугольника, затем доказательство. Не внося в текст этого доказательства каких-либо изменений, разобьем его на следующие шаги.

1. Пусть $\triangle ABC$ – данный треугольник. Отметим середину O стороны CB треугольника. Отложим на продолжении отрезка AO отрезок OD , равный отрезку OA .
2. Треугольники BOD и COA равны, так как у них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OB = OC$ и $OA = OD$ по построению.
3. Из равенства треугольников следует, что угол DBO равен углу ACO .
4. Для прямых AC и BD и секущей BC углы DBO и ACO являются внутренними накрест лежащими. Действительно, точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC , так как отрезок AD пересекает BC (в точке O).
5. Из равенства внутренних накрест лежащих углов DBO и ACO (теорема 4.2) следует, что прямые AC и BD параллельны.
6. Для прямых AC и BD и секущей AB углы DBA и CAB являются внутренними односторонними. Действительно, точки C и D находятся в одной полуплоскости относительно прямой AB , именно в той, где лежит точка O .
7. Так как прямые AC и BD параллельны, то сумма внутренних односторонних углов CAB и DBA равна 180° .
8. Угол DBA равен сумме углов DBC и ABC , так как луч BC пересекает отрезок AD с концами на сторонах угла ABD .
9. По доказанному угол DBC равен углу ACB . Следовательно, сумма углов треугольника ABC , т.е. $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, равна сумме внутренних односторонних углов при параллельных AC и BD и секущей AB .
10. Следовательно, $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB = 180^\circ$. Теорема доказана.

Рассмотренное доказательство в структурном отношении является достаточно сложным (оно насчитывает 10 шагов), опыт учащихся в проведении доказательств еще незначительный (теорема рассматривается в VII классе), доказательство содержит непривычные для учащихся логические тонкости (обоснование того, какие углы являются внутренними на-

крест лежащими, внутренними односторонними). Одноразового изложения этого доказательства учителем недостаточно. Для закрепления доказательства необходимо, чтобы учащиеся имели возможность потренироваться в его воспроизведении. Примерные затраты таковы: 10 мин на первичное изложение доказательства учителем, 5 мин на вторичное изложение доказательства учителем, 15 мин на две попытки воспроизведения доказательства учащимися, 10 мин на воспроизведение доказательства учащимися на следующем уроке. В итоге при самом скупом выделении времени на изучение данной теоремы и ее доказательства будет израсходовано 40 мин. В данную порцию мы включаем и следствие: „У любого треугольника хотя бы два угла острые”. Доказательство этого следствия состоит из четырех шагов. Для однократного изложения доказательства учителем необходимо примерно 5 мин. Этим заканчивается порция учебного материала, рассчитанная на 1 академический час.

Аналогично измерялся объем теоретического материала в ряде учебников. В табл. 1.1 приведены данные по курсу VI класса (имеется в виду старая нумерация классов). После подсчета „чистого” времени, затрачиваемого на изучение теории, определялось „чистое” время, предназначенное для решения задач (из расчета, что на весь курс VI класса отводится 68 ч).

Таблица 1.1

Время, ч (академ.)	Учебники					
	[74]	[26]	[54]	[53]	[79]	[10]
На изучение теории	36	34	48	30	29	30
На решение задач	32	34	20	38	39	38

Приведенная выше таблица подсказывает следующие выводы: наблюдается определенная тенденция сокращения затрат времени на изучение теоретического материала; заметно стремление выделить на решение задач не меньше времени, чем на изучение теоретического материала; в источнике [54] имеет место случай явной перегрузки учебника теоретическим материалом (эта перегрузка впоследствии компенсировалась отнесением части теоретического материала к категории необязательного).

Использование проблемных методов обучения увеличивает время, затрачиваемое на изучение теоретического материала. В результате соотношение между затратами времени на изучение теоретического материала и решение задач ухудшается. Перегруженность учебников теоретическим материалом имеет место и в настоящее время, что подтверждается данными хронометража, проведенного автором в ряде школ г. Могилева (хронометражу подвергались уроки опытных учителей). Так, при обучении по пособию [53] на решение задач отводилось не более 1/3 учеб-

ного времени. Некоторое улучшение этого показателя имеет место при обучении по пособию [79]: на решение задач отводится от $1/3$ до $1/2$ учебного времени. Дефицит времени, необходимого на изучение теоретического материала, нередко ставит учителя в затруднительное положение. Необходимый запас времени для решения задач обычно изыскивается, во-первых, путем „деформации” системы методов обучения (использованием в основном репродуктивного метода), во-вторых, изучением большинства доказательств лишь на ознакомительном уровне (доказательство проводится, как правило, самим учителем, без последующего его закрепления, воспроизведения учащимися). Такие „урезывания” в методике изучения теоретического материала снижают его ведущую роль при решении задач. В подтверждение сказанному приведем данные хронометража урока опытного учителя Г.Ш. одной из средних школ г. Могилева.

Тема урока: „Третий признак равенства треугольников” (по учебнику [79]).

Ход урока: 1) организационный момент – 1 мин; 2) проверка домашних задач и фронтальный опрос пройденного материала (на уровне воспроизведения формулировок определений и теорем) – 14 мин; 3) переход к изучению новой темы – 2 с; 4) формулировка третьего признака равенства треугольников – 16 с; 5) выполнение чертежа к доказательству признака – 47 с; 6) проведение доказательства – 38 с; 7) решение задач – 22,3 мин; 8) закрепление новой темы, постановка домашнего задания – 4 мин.

Обращает на себя внимание тот факт, что на изложение третьего признака равенства треугольников (вместе с его доказательством) затрачено 3 мин 31 с. Не проводилось закрепление доказательства, отсутствовала „обратная связь”, которая могла бы дать представление о характере восприятия учащимися данного теоретического материала.

Существует потребность в дополнительном увеличении времени на решение задач, что требует дальнейшей рационализации теоретической части учебника. Показателем хорошей рационализации теоретической части могло бы служить соотношение, при котором $1/3$ учебного времени отводится на изучение теории, а $2/3$ – на решение задач. Приведенные выше данные свидетельствуют о том, что существующие учебники, хотя и имеют тенденцию на сокращение объема теоретического материала, все же далеки от того, чтобы обеспечить в обучении геометрии указанное соотношение.

1.3.3. О корректировании объема учебника в процессе его создания

Остановимся на некоторых приемах нормализации объема теоретического материала школьного учебника геометрии. Ряд рекомендаций по уточнению объема содержания учебного материала приведен в работе [16]. В этой работе, в частности, отмечается, что если для объяснения фактов достаточно ограничиться минимумом сведений, то на этом минимуме следует остановиться, принимая его, разумеется, в качестве примерного ориентира. Каковы возможные приемы выделения минимума сведений

в процессе конструирования учебника? Избежать завышения объема учебника может помочь опыт создания учебников прошлых лет. В частности, ориентиром в определении объема теоретической части учебника могут служить те из них, которые длительное время применялись на практике и в них данный вопрос более или менее решен. В качестве такого эталона можно взять, например, учебник А.П. Киселева [49] с учетом имеющей место тенденции сокращения числа часов, отведенных на математику. Определенная ориентация на учебник А.П. Киселева имеется в учебниках [79] и [9]. Разумеется, этот прием должен подкрепляться соответствующей рационализацией теоретической части учебника. В пособии [79] достижению ее способствует компактная система аксиом, позволяющая сравнительно коротким путем перейти к содержательной части курса. В логическом плане упрощено изложение векторной алгебры, геометрических преобразований. В данном пособии нет общей теории отображений, что позволило разгрузить тему „Геометрические преобразования”, больше внимания уделить изучению отдельных видов преобразований. Выделение главной части, „ядра” теоретического материала целесообразно проводить на основе построения целостной логико-математической системы учебника с привлечением минимального количества вспомогательных понятий и фактов. Этот этап конструирования (далеко не окончательный), как правило, состоит из нескольких попыток построения логико-математической системы школьного учебника. Построение логико-математической системы учебника с минимальным привлечением вспомогательного материала является естественным рабочим инструментом уточнения объема теоретической части учебника, объема основного учебного материала. Минимальное привлечение вспомогательного учебного материала может быть обеспечено применением в доказательствах достаточно общих математических методов изложения геометрии (синтетических и аналитических). Выборочное применение математических методов изложения способно существенно рационализировать систему доказательств курса, сохранив при этом ценный фактический материал.

Определение затрат времени на изучение теоретического и задачного материала необходимо проводить в процессе создания учебника с целью своевременной коррекции значений параметров учебника. Каковы особенности методики измерения объема учебного материала, проводимого в процессе создания учебника? Здесь логика измерительной процедуры существенно меняется. Главное состоит в том, что автор с самого начала (быть может, не приступая еще к построению учебника) должен ориентироваться на определенное соотношение затрат времени на изучение теоретического материала и на решение задач. Каким должно быть это соотношение? Не претендуя на абсолютный характер такого соотношения, выскажем некоторые рекомендации по его определению. Центр тяжести в обучении математике, что вполне согласуется с имеющими место традициями, должен находиться в обучении учащихся решению задач.

Это означает, что на решение задач желательно выделять не менее 50 % учебного времени. Для отдельных тем оно может быть доведено до 80 %. Необходимо учитывать, что время на изучение теории на практике имеет тенденцию в сторону увеличения. Особенно это обстоятельство проявляется в условиях недостаточной дифференциации и индивидуализации обучения, в период освоения вновь вводимых школьных учебников. Стремление к усвоению сложных доказательств всеми учащимися в ряде случаев приводит к перерасходу запланированного времени. Перерасход времени вызывается несовершенством методики обучения (см., например: „Математика в школе”, 1983, № 6, с. 4), пропусками занятий учащимися, недостаточно систематичным и добросовестным выполнением домашних заданий и т.п. Нехватка времени на решение задач приводит к тому, что решаются чаще всего первые задачи, а наиболее содержательные – остаются нерешенными. По этой же причине учитель иногда вынужден задавать для домашнего выполнения мало подготовленные задачи. Естественно, что большинство учащихся с ними не справляются. Очевидно, что такого рода „запланированный” срыв выполнения домашнего задания деморализует учащихся, расхолаживает их, отрицательно сказывается на отношении к учебе. Нехватка времени на решение задач обнаруживается нередко и в календарном планировании (см., например: „Математика в школе”, 1982, № 3, с. 17; „Математика в школе”, 1986, № 4, с. 14). Она проявляется в том, что перед контрольной работой, проводимой по всей теме, далеко не всегда выделяется специальное время на повторение, закрепление и обобщение приемов решения задач по этой теме. Выполнить качественно такую работу по ходу изучения текущего материала учитель часто не может вследствие сложности и достаточно большого объема данного материала. Если при построении учебника проигнорировать эти факты, то на решение задач будет выделяться менее 50 % времени (что и имеет место в настоящее время). Опыт показывает, что 50 % времени, выделяемого на решение задач, оказывается достаточным не для всех учащихся. Для учащихся со средними способностями требуется больше времени. Эти данные привели нас к необходимости того усредненного соотношения, о котором говорилось во введении: $\frac{1}{3}$ учебного времени отводить на изучение теоретического материала, а $\frac{2}{3}$ – на решение задач и выполнение упражнений. Для курса планиметрии VII – IX классов это означает, что примерно 73 ч выделяется на изучение теории и 147 ч – на решение задач. В отдельных темах это соотношение меняется в ту или другую сторону. Указанное соотношение было реализовано нами при построении экспериментальных учебных материалов (см.: *Рогановский Н.М.* Геометрия 6–8. Могилев, 1983). С учетом этого соотношения производилась ориентировочная разбивка теоретического материала на порции, соответствующие 1 академическому часу. Теоретический материал курса планиметрии разбивался при этом на 73 порции. Естественно, что не сразу удастся построить теоретический материал таким образом, что-

бы он уместился в 73 „единичные” порции. Выявление такого рода „излишков” заставляет вновь пересмотреть все содержание курса, способы его изложения и изыскать дополнительные возможности сокращения теоретической части, не приводящие, однако, к нарушению целостности измененной логико-математической системы учебника. Изложенная выше методика разбиения теоретического материала на отдельные порции применялась с одним весьма существенным изменением: порция в расчете на применение репродуктивного метода обучения подбиралась не на один академический час, а на 30 мин (включая сюда время объяснения и закрепления материала на первом уроке и время опроса по этому материалу на втором уроке). Образующийся при этом резерв времени в 15 мин отводился на затраты, связанные с применением других методов обучения (проблемных методов, самостоятельной работы и т.д.). Приведем примеры такой разбивки теоретического материала.

Порция А. Обратимся к пункту „Основные свойства градусной меры угла” указанных выше учебных материалов. При отборе учебного материала этой порции исходили из того, что почти все понятия и факты известны учащимся из предшествующих классов. Поэтому основная дидактическая цель изучения данной порции заключается в повторении и систематизации имеющихся знаний, в формировании представлений о построении системы понятий, в развитии математической речи учащихся, умении сопровождать логические формулировки показом на моделях, рисунках и т.п. Начинается порция с определения угла, сторон угла, вершины угла, развернутого угла, равных углов, прямой, проходящей между сторонами данного угла. При использовании репродуктивного метода обучения на изучение этих определений достаточно выделить 5 мин. Центральную часть порции составляют аксиомы измерения и откладывания углов: каждый угол имеет определенную неотрицательную меру; развернутый угол равен 180° ; градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами; от любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и только один. На эту часть материала выделяется 10 мин. Завершается данная порция определениями прямого, острого и тупого углов. На эту часть материала отводится 5 мин. На воспроизведение материала учащимися на первом и втором уроках достаточно выделить 10 мин. В итоге изучение данного материала репродуктивным методом будет проведено в течение 30 мин. Резерв в 15 мин может быть использован для проведения самостоятельной работы по выполнению геометрических построений, относящихся к изучаемым понятиям и аксиомам.

Порция Б. Обратимся к пункту „Накрест лежащие углы и параллельность прямых” рассматриваемых учебных материалов. Содержание данной порции составляют определение накрест лежащих углов и две теоремы с доказательствами. Углы CAB и DBA (приводится рисунок) называются накрест лежащими, если полупрямые AC и BD лежат в дополнительных по-

луплоскостях относительно прямой AB . На формулирование определения, выполнение рисунка достаточно выделить 3 мин. Далее формулируются теоремы.

Теорема. I. Если накрест лежащие углы CAB и DBA равны, то прямые AC и DB параллельны.

II. Если прямые AC и DB параллельны, то накрест лежащие углы CAB и DBA равны.

Доказательства. I. 1. Могут ли прямые AC и BD пересекаться? Допустим, что $AC \cap DB$. 2. Пусть E – точка пересечения этих прямых. Отложим отрезок AK (на продолжении отрезка AE за точку A), равный BE , соединим точки K и B отрезком. 3. На основании первого признака равенства треугольников $\triangle KBA = \triangle EAB$. 4. Из их равенства следует, что $\angle KBA = \angle BAE$. 5. Но углу BAE равен также угол DBA (по условию). 6. В результате приходим к противоречию с аксиомой откладывания угла. 7. Следовательно, $AC \parallel BD$.

II. 1. Пусть $AC \parallel DB$. Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 2$ (приводится рисунок). 2. Отложим $\angle C_1AB$, равный $\angle 2$. 3. На основании предыдущей теоремы $AC \parallel b$. 4. Что противоречит аксиоме параллельности. 5. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

На формулирование и доказательство этих теорем выделим соответственно 7 и 5 мин. На воспроизведение доказательств на первом и следующем уроках отведем 15 мин. В итоге изучение данной порции теоретического материала репродуктивным методом займет примерно 30 мин. Резерв времени в 15 мин может быть использован в целях активизации учебной работы учащихся, привлечения их к поиску доказательства. Аналогичная процедура выполняется для теоретического материала всего курса.

Выбор уровня строгости в изложении доказательств определяет детализацию рассуждений, проводимых в доказательстве. Это обстоятельство также сказывается на объеме теоретического материала. Если, например, доказательство теоремы о сумме углов треугольника изложить на традиционном уровне строгости (без обоснования шагов, связанных с геометрией порядка), то порцию, рассчитанную на один академический час, можно составить уже иначе.

Порция В. Обратимся к теореме о сумме углов треугольника.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180° .

Доказательство. 1. Через вершину C $\triangle ABC$ проведем прямую a , параллельную стороне AB (приводится рисунок). 2. Так как $a \parallel AB$ и углы 1 и A – накрест лежащие, то $\angle A = \angle 1$. 3. Аналогично $\angle B = \angle 2$. 4. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ$. 5. Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Теорема доказана.

Пользуясь репродуктивным методом обучения, учитель может изложить это доказательство за 5 мин. На воспроизведение доказательства учащимися выделим 8 мин. После этого приведем определение внешнего угла треугольника, сообщим термин „внутренний угол треугольника”. Отведем на изложение этой части учебного материала 6 мин. Заключительную часть порции составляют следствия: каждый угол равностороннего треугольника равен 60° ; внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, несмежных с ним. На изложение этих следствий выделим 13 мин. В итоге будет израсходовано 32 мин. Оставшиеся 13 мин могут быть использованы для воспроизведения доказательства на втором уроке.

Компактность изложения теоретического материала (а следовательно, и его объем в часах) существенно зависит от применяемых математических методов, с помощью которых проводятся доказательства. Сравним, например, с этой точки зрения, объем темы „Векторы” в учебных пособиях [53] и [79]. Подсчет показывает, что в пособии [53] материал этой темы, не содержащий скалярного умножения двух векторов, может быть уложен в 6 „единичных” порций, рассчитанных на 1 академический час. В пособии [79] материал темы включает скалярное умножение двух векторов и тем не менее укладывается в 5 „единичных” порций. Выигрыш во времени (с учетом полного изложения данной темы) составляет минимум 2 академических часа. Этот выигрыш получен за счет того, что векторная алгебра в пособии [79] изложена более компактно с помощью координатного метода.

Порцию теоретического материала, рассчитанную на один академический час, учитель может распределить, например, на два урока, перемежая ее изучение решением задач. Это будет зависеть от выбора им конкретной методики обучения. Главное состоит в том, что и в таком случае суммарное время изучения данного теоретического материала не превышает одного академического часа.

Выскажем некоторые рекомендации по уточнению объема задачного материала. В задачном отделе целесообразно выделить задачи основного раздела, контрольные задания, дополнительные задания и задания для повторения. Задачи основного раздела должны содержать минимум обязательных задач для всех учащихся. Дополнительные задания служат для осуществления углубленного изучения предмета. Контрольными заданиями фиксируется уровень требований к учащимся в отношении их умений и навыков. Особый интерес с точки зрения нормализации нагрузки учащихся представляет регулирование объема обязательного для всех учащихся задачного материала. Посмотрим, какие выводы можно сделать из практики конструирования учебников. Обратимся, например, к учебникам [10, 29, 53, 79] и приведем в табл. 1.2 данные о численности задач по курсу VI класса (имеется в виду старая нумерация классов). Отметим, что эти данные приведены по основному разделу задач, без дополнительных заданий и задач повышенной трудности.

Таблица 1.2

Учебники	[10]	[29]	[53]	[79]
Количество задач	389	226	352	197

Из таблицы можно определить, что в среднем в VI классе приводится 291 задача. Если исходить из того, что 4 задачи требуют для своего решения примерно 1 ч (по данным В.Г. Болтянского), то для решения 291 задачи потребуется примерно 73 ч. Учитывая, что более половины задач должны быть решены в классе, на классную работу по решению задач выделим

41 ч. Оставшееся время работы в классе $68 - 41 = 27$ ч отводится на изучение теоретического материала. Время изучения теоретического материала составляет примерно $1/3$ времени, отводимого на изучение геометрии в VI классе. В итоге получили еще одно достаточно объективное свидетельство в пользу критерия: $1/3$ времени отводить на изучение теоретического материала и $2/3$ – на решение задач.

Общее количество задач, соотношение различных их видов должны определяться с учетом образовательных целей каждой темы (в различных учебниках эти цели могут существенно отличаться друг от друга). Различие целей изучения отдельных тем приводит к неравномерному подбору задач. К одной и той же теме в одном учебнике может быть дано больше задач, а в другом – меньше. *Принцип неравномерного подбора задач* является именно тем инструментом, который позволяет отразить в учебнике динамизм образовательных целей обучения. Это положение наглядно подтверждает практика конструирования учебников. Обратимся еще раз к только что рассмотренным четырем учебникам и приведем данные о численности задач по теме „Признаки равенства треугольников” (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Учебники	[10]	[29]	[53]	[79]
Количество задач	43	–	17	40

Различие образовательных целей изучения отдельных вопросов сказывается и в неравномерном подборе численности задач внутри одной темы. Например, в учебнике А.В. Погорелова [79] к теме „Преобразования фигур” дается 61 задача, причем 43 из них посвящены использованию признаков подобия треугольников и только 18 – осевой и центральной симметрии.

Одно из главных требований к системе задач, вытекающее из соображений экономии, состоит в том, чтобы задачи ложились на основную линию курса, не отвлекали учащихся от нее. Они должны быть достаточно содержательными в математическом и психологическом отношениях, ориентированы не только на применение изучаемого теоретического материала, но и на подготовку нового. Определенное внимание целесообразно уделить решению задач различными математическими методами, учитывая, что часто больше пользы можно извлечь из решения одной задачи различными методами, чем из решений нескольких задач одним методом. В теоретической части учебника целесообразно выделять специальные параграфы, посвященные методам решения задач. В задачном отделе должны быть представлены задачи с дидактическими, познавательными, практическими и развивающими функциями. Особенно требуется увеличить долю развивающих задач. Сложность задач должна учитывать зону ближайшего развития учащихся (это важно и при дифференцирован-

ном обучении), обеспечивать подвижность этой зоны, поступательное развитие учащихся. Указанное выше соотношение – не менее $\frac{2}{3}$ учебного времени выделять на решение задач – является средним и относится ко всему курсу. В зависимости от постановки образовательных целей отдельных тем это соотношение может изменяться в ту или другую сторону.

Высказанные рекомендации проверены нами в экспериментальном обучении. Эксперимент проводился в течение трех лет в средней школе № 1 г. Могилева (начиная с 1983/84 учебного года). Указанное соотношение позволило увеличить объем самостоятельной работы учащихся на уроке. На тему в 10–15 ч приходилось, как правило, 4–5 самостоятельных работ по 7–10 мин и 1–2 контрольные работы на 1 ч. Регулярная самостоятельная работа хорошо дисциплинирует школьников. С ее помощью в процессе эксперимента велась оперативная диагностика усвоения, определялись необходимые коррективы. Процесс обучения делался более управляемым и результативным. Возрастала уверенность учащихся в своих силах. Наблюдения показали, что в экспериментальном обучении учитель лучше ориентирует свою работу на основной состав класса, больше внимания уделяет индивидуализации и дифференциации обучения. Материал прорабатывается без спешки, создаются условия для завершения основной части учебной работы непосредственно на уроке. Основательная проработка учебного материала помогает сильному ученику удержаться на высоком уровне обучения, у среднего ученика появляется возможность повысить уровень обучения, слабый ученик также застрахован от скатывания на уровень полного непонимания. В данном случае принципы дифференциации и гуманизации действуют в одном направлении.

1.3.4. Некоторые выводы

Резюмируем наши предложения, относящиеся к уточнению объема учебного материала.

1. В целях повышения точности определения объема учебника объем его теоретической части целесообразно измерять в часах, разбивая теоретический материал на порции, соответствующие одному академическому часу.

2. Одно из возможных приближений к нормализации объема учебника целесообразно связывать с таким изложением теоретического материала, которое позволяет выделить на его изучение $\frac{1}{3}$ учебного времени, оставляя $\frac{2}{3}$ учебного времени на решение задач.

3. При уточнении объема основного учебного материала целесообразно отталкиваться от целостной логико-математической системы, строящейся с минимальным привлечением вспомогательного теоретического материала.

4. В задачном отделе следует выделять основной раздел, содержащий минимум задач, достаточный для обязательной общеобразовательной

подготовки учащихся, и дополнительные задания, ориентированные на повышенный уровень изучения курса.

* *

*

В заключение данной главы отметим особенность примененного системного подхода к отбору математического содержания в школьном учебнике геометрии. При разработке данных требований были связаны три основных параметра учебника: основной учебный материал, объем учебника, логико-математическая система учебника. Параметры „основной учебный материал” и „логико-математическая система учебника” играли роль ключевых параметров. Они активно действовали друг на друга и на параметр „объем учебника”. Взаимодействие ключевых параметров между собой проявлялось в том, что к основному учебному материалу предлагалось относить в первую очередь такое математическое содержание, которое закладывает основы определенных математических методов. Подобное содержание основного учебного материала позволяет решать вопросы рационализации логико-математической системы учебника, на базе которой окончательно уточняются значения параметров „основной учебный материал” и „объем учебника”.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ

2.1. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫБОРУ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИЗЛОЖЕНИЯ

2.1.1. О методической классификации математических методов

Проблему определения содержания школьных учебников нельзя решать в отрыве от другой проблемы – поисков методов изложения математического содержания, в том числе методов конструирования логико-математической системы изложения. Рассмотрим ряд требований к построению логико-математической системы учебника геометрии, позволяющих реализовать роль данного параметра учебника как ключевого, активно влияющего на совершенствование учебника в целом.

Как было показано в предыдущей главе, отбор математического содержания в учебник, определение его объема существенным образом связаны с рационализацией логико-математической системы учебника. В свою очередь рационализация логико-математической системы тесно связана с построением системы доказательств. Естественным приемом рационализации системы доказательств является выборочное применение математических методов в доказательствах теорем, использование математических методов в соответствии с их „конкурентоспособностью” с точки зрения упрощения доказательства.

Проанализируем роль математических методов исходя из указанных аспектов. Прежде всего выясним, о каких математических методах может идти речь при построении школьного курса геометрии. Рассмотрим с этой целью возможную методическую классификацию математических методов. (табл. 2.1).

Методы, выделенные курсивным шрифтом в табл. 2.1, являются для школьного курса традиционными. Таблица показывает, что в школьных курсах, предназначенных для массового использования, недостаточно представлены современные синтетические методы, методы алгебры и методы аналитической геометрии. Остается актуальной и проблема построения школьного курса геометрии на основе геометрических преобразований.

**Математические методы, применяемые при изложении
школьного курса геометрии**

Синтетические		Аналитические		
Традиционные	Современные	Методы алгебры (аналитические методы без при- менения системы координат)	Методы ана- литической геометрии	Методы ма- тематическо- го анализа
Методы, ос- нованные на применении признаков равенства треугольников Методы, ос- нованные на применении свойств пер- пендикуляр- ных, парал- лельных прямых и т.д.	Метод геометри- ческих пре- образова- ний в синте- тической форме Метод параллель- ных проек- ций и др.	Методы эле- ментарной алгеб- ры (применение уравнений, их систем, метод площадей и др.) Векторный ме- тод в алгебраи- ческой форме Метод геомет- рических преоб- разований в ал- гебраической форме (теоре- тико-групповые методы, основан- ные на записи геометрических отношений на языке компози- ции геометриче- ских преобразо- ваний)	Коорди- натный метод на тради- ционно-син- тетическом материале Векторный метод в коор- динатной фор- ме Метод гео- метрических преобразований в координатной форме	Методы элементар- ных функ- ций (в том числе методы тригонометрии) Методы, осно- ванные на поня- тиях непрерыв- ности и преде- ла функции

2.1.2. О взаимной дополнителности математических методов

Каждый из математических методов применим к изучению лишь некоторых сторон объектов, вскрывает отдельные их свойства и закономерности. Совокупность же методов способна „воспроизвести” целостный объект математического исследования. Ни один из имеющихся в распоряжении современной математики методов изолированно, вне связи с другими не может дать исчерпывающих результатов. Отсюда и возникает необходимость во взаимной дополнителности методов.

Высказанное положение самым непосредственным образом относится к школьному курсу геометрии. Например, доказательство того, что осевая симметрия является движением, можно провести с помощью различных математических методов. Не все эти доказательства в дидактическом плане являются равноценными.

Если пользоваться традиционно-синтетическим методом, то необходимо рассмотреть последовательно две пары треугольников AKT и A_1KT , ABT и A_1B_1T (рис. 2.1). Это рассуждение пока неполно. В случае, представленном на рис. 2.2, двух пар треугольников уже не будет и нужно проводить отдельное доказательство. Однако и оно не обеспечивает полноты рассуждений. Необходимо еще рассмотреть третий случай (рис. 2.3), когда точки A и B лежат в дополнительных полуплоскостях относительно прямой s . Доказательство этого случая своеобразно: прежде чем перейти к установлению равенства треугольников, необходимо доказать, что отрезок A_1B_1 пройдет через точку P — точку пересечения отрезка AB и прямой s . В целом доказательство получается довольно громоздким.

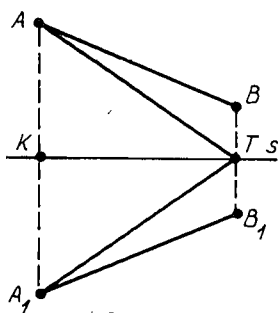


Рис. 2.1

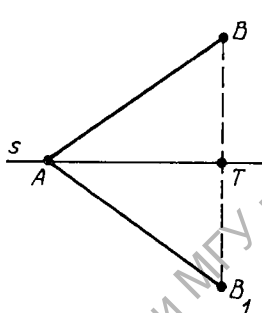


Рис. 2.2

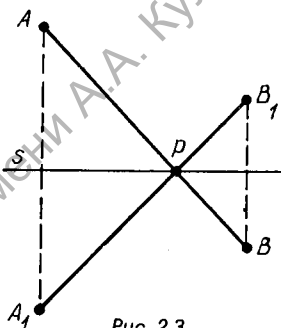


Рис. 2.3

Можно воспользоваться векторным методом в алгебраической форме.

Пусть $\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KT} + \vec{TB}$, $\vec{A_1B_1} = \vec{A_1K} + \vec{KT} + \vec{TB_1}$ (рис. 2.4). Рассмотрим скалярные

квадраты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{A_1B_1}$:

$$\vec{AB}^2 = \vec{AK}^2 + 2\vec{AK} \cdot \vec{KT} + \vec{KT}^2 + 2\vec{AK} \cdot \vec{TB} + 2\vec{KT} \cdot \vec{TB} + \vec{TB}^2, \quad (2.1)$$

$$\vec{A_1B_1}^2 = \vec{A_1K}^2 + 2\vec{A_1K} \cdot \vec{KT} + \vec{KT}^2 + 2\vec{A_1K} \cdot \vec{TB_1} + 2\vec{KT} \cdot \vec{TB_1} + \vec{TB_1}^2. \quad (2.2)$$

Учтем, что $\vec{AK} \perp \vec{KT}$, $\vec{TB} \perp \vec{KT}$, $\vec{A_1K} \perp \vec{KT}$, $\vec{TB_1} \perp \vec{KT}$: $\vec{AK} \cdot \vec{KT} = 0$, $\vec{KT} \cdot \vec{TB} = 0$, $\vec{A_1K} \cdot \vec{KT} = 0$, $\vec{KT} \cdot \vec{TB_1} = 0$ и $\vec{AK}^2 = \vec{A_1K}^2$, $\vec{AK} \cdot \vec{TB} = \vec{KA} \cdot \vec{BT} = \vec{A_1K} \cdot \vec{TB_1}$, $\vec{TB}^2 = \vec{TB_1}^2$. Сравнив соотношения (2.1) и (2.2), получим в итоге: $\vec{AB}^2 = \vec{A_1B_1}^2$, $AB^2 = A_1B_1^2$, $AB = A_1B_1$.

Проведенное доказательство обладает общностью, так как не нужно рассматривать какие-либо особые случаи. Но следует признать, что оно содержит ряд трудных для учащихся моментов. Например, почему именно такими суммами следует представить векторы $\vec{AB}$ и $\vec{A_1B_1}$? Почему $\vec{AK} \cdot \vec{TB} = \vec{A_1K} \cdot \vec{TB_1}$? Доказательство выглядит громоздким даже при сокращенной форме его записи. Кроме того, такое доказательство предполагает наличие у учащихся навыка применения векторного метода в алгебраической форме.

Координатный метод свободен от указанных недостатков.

Пусть точки A и B (рис. 2.5) имеют следующие координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда точки A_1 и B_1 имеют координаты: $A_1(x_1; -y_1)$, $B_1(x_2; -y_2)$. Поэтому

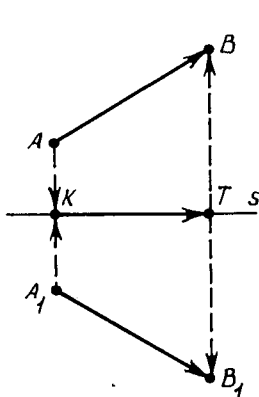


Рис. 2.4

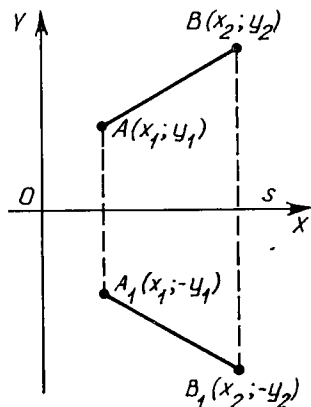


Рис. 2.5

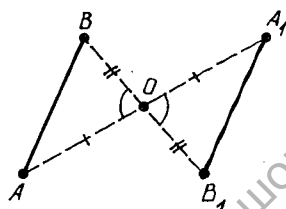


Рис. 2.6

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad (2.3)$$

$$A_1B_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.3) и (2.4) получаем $AB^2 = A_1B_1^2$, $AB = A_1B_1$. Простота и естественность применения координатного метода в данном случае очевидна.

В случае центральной симметрии аналогичное утверждение проще всего доказывается традиционно-синтетическим методом: равенство отрезков AB и A_1B_1 (рис. 2.6) следует из равенства по первому признаку треугольников AOB и A_1OB_1 . (Необходимо рассмотреть также случай, когда отрезки AB и A_1B_1 лежат на одной прямой.)

Доказательство аналогичного утверждения для параллельного переноса удобно провести векторным методом: по определению параллельного переноса (или по его свойству – в зависимости от системы изложения) $\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{m}$ (рис. 2.7). Поэтому $\vec{AB} + \vec{BA_1} = \vec{BA_1} + \vec{A_1B_1}$. Отсюда $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$. Следовательно, $AB = A_1B_1$.

Как видно, для обеспечения простоты изложения в доказательствах трех близких по смыслу утверждений применялись три различных метода: координатный, традиционно-синтетический и векторный. Выборочное применение этих методов явилось эффективным средством рационализации системы доказательств данного фрагмента учебного материала.

Целесообразность применения математических методов в соответствии с их конкурентоспособностью можно подтвердить многочисленными примерами. Сравним некоторые доказательства теоремы об ортоцентре треугольника по различным учебникам. В пособии [36, с. 183] доказательство проводится с применением признаков подобия треугольников, в пособии [104, с. 26] – с применением осевой симметрии. Использование признаков подобия треугольников и осевой симметрии приводит к довольно сложному, хотя и во многих отношениях поучительному, доказательству. Рассмотрим традиционно-синтетическое доказательство.

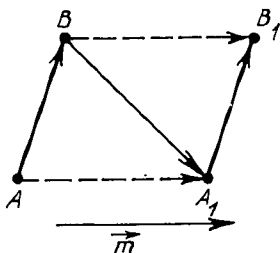


Рис. 2.7

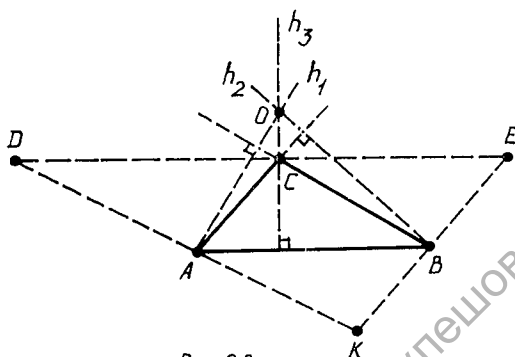


Рис. 2.8

Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, h_1 , h_2 и h_3 — его высоты (рис. 2.8). Построим треугольник DEK : $DK \parallel BC$, $DE \parallel AB$, $EK \parallel AC$. Высоты $\triangle ABC$ являются серединными перпендикулярами сторон $\triangle DEK$ (почему?). Поэтому h_1 , h_2 и h_3 пересекаются в одной точке O .

Данное доказательство опирается на свойство серединного перпендикуляра к отрезку и на свойства параллелограмма. Как видно, оно много проще рассмотренных выше доказательств. Приведенное сравнение, разумеется, не умаляет роли геометрических преобразований для школьного курса. Но вместе с этим оно показывает, что стремление к сплошному применению одного какого-либо метода приводит к появлению ряда сложных доказательств. Такой подход не может привести к оптимизации логико-математической системы школьного учебника геометрии. При абсолютизации какого-либо математического метода упрощение одних тем неизбежно сопровождается усложнением других. (Заметим, что сделанный вывод относится и к учебникам алгебры и начал анализа.)

2.1.3. О влиянии математических методов на формирование логической структуры учебного курса

Отметим одну особенность применения математических методов в доказательствах. Часто логическая структура системы теорем является *линейной*: теорема T_1 используется при доказательстве теоремы T_2 , теорема T_2 — при доказательстве теоремы T_3 и т.д. (рис. 2.9), причем для доказательства этих теорем могут быть использованы и некоторые вспомогательные факты (леммы 1, 2, 3 и т.д.). Такая структура особенно характерна для тех случаев, когда в доказательствах не используется какой-либо общий математический метод. Применение общего математического метода, если это возможно, изменяет логическую структуру системы теорем

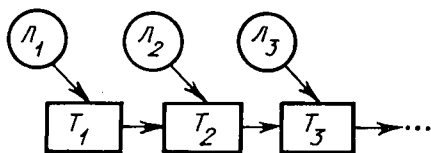


Рис. 2.9

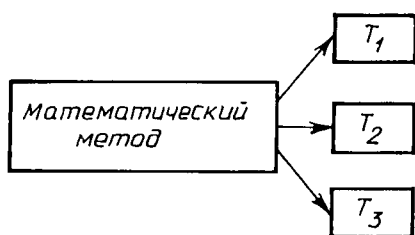


Рис. 2.10

$T_1 - T_3$. Она становится *нелинейной* (рис. 2.10), причем, что особенно важно, часто отпадает необходимость в использовании вспомогательных предложений (лемм $\Lambda_1 - \Lambda_3$). В этом и состоит рационализирующая роль математических методов: обеспечение целостности логико-математической системы учебника минимальным привлечением вспомогательного учебного материала. Применение нескольких математических методов при изложении школьной геометрии (по указанной выше причине) снижает зависимость логико-математической системы от вспомогательных понятий и фактов. Повышается возможность большего варьирования последовательности изучения отдельных учебных вопросов, а значит, выбора оптимального варианта этой последовательности. Конструирование учебника по такой „гибкой” технологии точнее указывает направление его оптимизации, сокращает индуктивный (эмпирический) процесс поиска. Усиливаются возможности исчерпывающего изложения родственных вопросов в определенном месте курса.

2.1.4. Ведущие и вспомогательные математические методы

Какие математические методы использовать в школьном курсе, сколько таких методов необходимо отобрать? Методы математики, ориентированные на школьный курс геометрии, ранее были представлены (см. табл. 2.1) двумя довольно большими группами: синтетические и аналитические. В соответствии с ведущей ролью традиционно-синтетического материала в школьном курсе геометрии более полно должны быть представлены традиционно-синтетические методы. Эти методы необходимо дополнить аналитическими, играющими вспомогательную роль. На уровне систематических применений количество методов математики может быть строго ограниченным. Остальные методы могут только обозначаться. Излишняя ориентация на большое количество математических методов неизбежно усилит разнородность учебного курса. Кроме того, вследствие дефицита учебного времени не будут сформированы навыки учащихся в применении этих методов. Выдвинутые требования относятся прежде всего к изложению основного учебного материала.

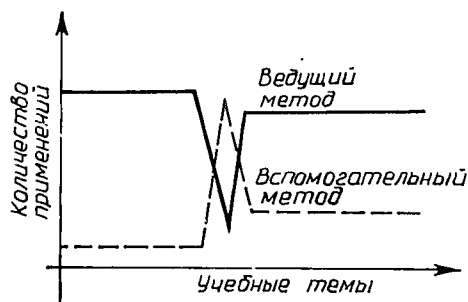


Рис. 2.11

Остановимся на возможной методике применения математических методов при построении школьного курса геометрии. Во-первых, эта методика должна учитывать деление математических методов на ведущий и вспомогательные. К ведущему методу в данной работе относится традиционно-синтетический метод, к вспомогательному — координатно-векторный. Такое деление означает, что область применения ведущего метода должна быть шире области применения вспомогательных. В разработанных нами учебных материалах синтетический метод применялся в 70 % случаев, а около 30 % приходилось на координатно-векторный метод. Применение геометрических преобразований сводилось всего лишь к отдельным случаям. Во-вторых, начало систематического курса целесообразно связывать с синтетическим методом, обеспечивая тем самым раннее и непрерывное формирование у учащихся навыков его применения. В-третьих, должна вестись своевременная подготовка вспомогательного метода. Использование неподготовленного метода, на долю которого приходится не менее 30 % применений всех математических методов, приведет к несостоятельности учебника. Эта подготовка может выразиться в ознакомлении учащихся с некоторыми примерами решения задач координатным методом. Отдельные рационализирующие применения координатного метода (на этапе его подготовки) необходимы и при изложении теоретического материала. Если, например, координатно-векторный метод широко применяется в VIII классе (при изложении элементов тригонометрии и векторной алгебры), то подготовительный этап целесообразно отнести к VII классу, т.е. к началу систематического курса геометрии. Общий характер динамики применений ведущего и вспомогательного математических методов может быть охарактеризован графиками, представленными на рис. 2.11.

Приведем примеры учебных тем, рациональное изложение которых может быть достигнуто применением выделенных математических методов. В табл. 2.1 выделены две разновидности традиционно-синтетического метода: первая основана на признаках равенства треугольников, вторая не использует признаки равенства треугольников, а опирается на иной

аппарат синтетической геометрии (параллельность, перпендикулярность, теорему о сумме углов треугольника и т.д.). Анализ различных учебников позволяет выделить область применения традиционно-синтетического метода (ряд тем, в которых традиционно-синтетический метод обеспечивает необходимые упрощения и может занять доминирующее положение). С опорой на признаки равенства треугольников обеспечивается упрощение доказательств, например, следующих утверждений: признака параллельности двух прямых, формулируемого в терминах накрест лежащих углов; свойств углов равнобедренного и равностороннего треугольников; свойств биссектрисы, медианы и высоты равнобедренного треугольника; признаков равенства прямоугольных треугольников; признаков параллелограмма; свойств прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции; формул площади прямоугольника, прямоугольного треугольника, параллелограмма; свойств серединного перпендикуляра к отрезку, биссектрисы угла; свойств правильного многоугольника; некоторых свойств движений и преобразования подобия. Синтетический метод, не опирающийся на признаки равенства треугольников, также во многих случаях вносит существенные упрощения (см., например, доказательство теоремы об ортоцентре треугольника, приведенное в п. 2.1.2).

Остановимся на выяснении области применения координатно-векторного метода. Обратимся к теме „Векторы”. Изложение векторной алгебры традиционно-синтетическим методом приводит к сложной логической системе. Значительные упрощения могут быть получены путем применения координатно-векторного метода. Векторная алгебра – наиболее благоприятная тема для интенсивного применения системы координат. Потребность в таком ее изложении диктуется достижением максимальной простоты изложения теоретического материала, а также созданием условий для закладывания основ единого координатно-векторного метода, более удобного и эффективного в применениях. Приведем пример использования координатного метода в этой теме. Рассмотрим теорему о коммутативности сложения двух векторов: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Доказательство ее таково.

Пусть данные векторы имеют координаты $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $x_1 + x_2, y_1 + y_2$, вектор $\vec{b} + \vec{a}$ – координаты $x_2 + x_1, y_2 + y_1$. Координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$ равны, поэтому равны и сами векторы: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Заметим, что синтетическое доказательство этой теоремы с использованием параллелограмма намного сложнее; кроме того, необходимо рассмотреть случаи, когда параллелограмм оказывается вырожденным. Особенности приведенного выше доказательства остаются характерными для координатного изложения этой темы в целом. Координатно-векторный метод вносит определенные упрощения в изложение элементов тригонометрии и геометрических преобразований.

Целесообразность применения координатного метода диктуется следующими дополнительными соображениями. Система координат вводится

в VI классе и хорошо усваивается учащимися. Координатный метод применительно к вопросам школьного курса обладает значительной универсальностью, способностью к упрощению изложения. Особенно эффективны применения координатного метода в сочетании с векторным. В этой связи будем говорить о координатно-векторном методе. Применение координатно-векторного метода позволяет установить тесные качественно новые связи между курсами геометрии и алгебры. Применение в геометрии координатного метода устанавливает тесную связь между геометрией и арифметическим содержанием курса математики V – VI классов.

Отметим, что применение нескольких математических методов усиливает воспитательно-развивающую функцию учебника. Ориентируя учащихся на избирательное применение математических методов, учебник способствует формированию у школьников более гибкого математического мышления, приучает их к рационализации учебной деятельности.

2.1.5. Математические методы и типология школьного учебника геометрии

Остановимся на типологии школьного учебника геометрии, определяемой в зависимости от выбора математических методов изложения. С учетом ориентации учебника на те или иные математические методы выделим следующие три типа школьного учебника: традиционно-синтетический, аналитический и смешанный.

1. *Традиционно-синтетические учебники геометрии* являются исторически первыми. Их особенность – слабая связь с аналитическими методами. Эти учебники, как правило, ориентированы на гильбертовскую аксиоматику, значительная часть которой направлена на то, чтобы обосновать конгруэнтность отрезков, углов и треугольников. Использование цепочки конгруэнтных треугольников составляет основную идею многих доказательств, выполняемых в стиле Евклида.

Понятие конгруэнтности в значительной мере является наглядным. Во многих случаях доказательства с использованием признаков равенства треугольников дают существенные упрощения. Но этот метод не является универсальным. В целом ряде случаев доказательства упрощаются, если пользоваться другими методами. Отметим, что в 50-е гг. XVIII в. первая „трудная“ для учащихся теорема стала камнем преткновения как раз из-за громоздких манипуляций в доказательствах конгруэнтными треугольниками (см. об этом в работе [97]). Речь идет о следующей теореме: „В равнобедренном треугольнике углы при основании равны“. Вот как выглядит доказательство самого Евклида.

Пусть в треугольнике ABC стороны AB и AC конгруэнтны. Необходимо доказать, что углы B и C этого треугольника конгруэнтны. Выполним дополнительные построения,

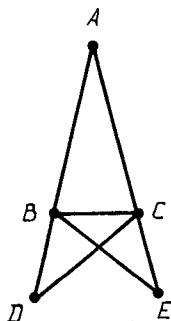


Рис. 2.12

представленные на рис. 2.12 (на этом рисунке $AD = AE$). Тогда $\triangle ACD = \triangle ABE$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle ABE = \angle ACD$ и $DC = EB$. Отсюда следует, что $\triangle DBC = \triangle ECB$ (по трем сторонам). Поэтому $\angle DCB = \angle ECB$. Из соотношений $\angle ABE = \angle ACD$ и $\angle DCB = \angle ECB$ вычитанием получаем $\angle ABC = \angle ACB$, что и требовалось доказать.

Отметим некоторые общие особенности построения школьного курса геометрии с ориентацией на гильбертовскую аксиоматику. Эта аксиоматика довольно громоздка. Для формулирования ее требуется большое число определяемых понятий. Применение только традиционно-синтетических методов порождает сложную логическую систему евклидовой геометрии. Прежде чем перейти к изложению содержательных геометрических фактов, приходится проводить длинные доказательства многих тривиальных положений. Подобные доказательства неприемлемы для школьных курсов. (Подробнее об этом см. в книгах [107, с. 36; 24, с. 404].) Вместе с этим в аксиоматике Гильберта исходные понятия „точка“, „прямая“, „плоскость“ и другие являются сравнительно наглядными. Свойства указанных понятий в определенной мере подкрепляются опытом. Очевидно, что это обстоятельство не может не учитываться при построении школьного курса геометрии. Не случайно многие изложения школьного курса, отличающиеся от евклидовского, сохраняют понятия „точка“, „прямая“ и „плоскость“ в качестве исходных.

Упрощение логико-математической системы учебника традиционно-синтетического типа возможно путем использования в доказательствах координат, векторов, геометрических преобразований. Однако аксиоматика Гильберта плохо ориентирована на эти методы. Поэтому введение их, как правило, носит запоздалый характер и требует громоздких предварительных построений.

Определенное применение в учебниках традиционно-синтетического типа находят методы элементарной алгебры (использование тождественных преобразований выражений, составление и решение уравнений, неравенств и их систем) и тригонометрические функции. В ряде случаев эти методы удачно сочетаются с традиционно-синтетическими. Такие сочетания встречаются уже при рассмотрении первых доказательств школьного курса геометрии. Так, например, доказательство равенства вертикальных углов в учебнике Н.Н. Никитина и А.И. Фетисова [75] приводится с использованием следующих алгебраических соображений: записываются равенства $\angle a + \angle b = 2d$ и $\angle b + \angle c = 2d$. Здесь $\angle a$ и $\angle b$ — данные вертикальные углы, равенство которых доказывается, а $\angle c$ — угол, смежный с ними на основании полученных равенств записывается следующее: $\angle a + \angle b = \angle b + \angle c$, после чего делается вывод: $\angle a = \angle c$.

Отметим еще некоторые другие особенности традиционно-синтетического метода. Он недостаточно алгоритмичен. При доказательстве какой-либо теоремы " $A \Rightarrow B$ " обычно стремятся получить B в качестве логического следствия из T, A , где T — весь ранее изученный теоретический материал. Какими предложениями из T необходимо воспользоваться, каким образом — заранее эти вопросы не раскрываются, так как по существу они являются конечной целью доказательства. При доказательстве очередной теоремы необходимо выбирать из T какие-то „свои" предложения, а получаемое доказательство чаще всего совсем непохоже на предыдущее. Таким образом, говорить о традиционно-синтетическом методе как о методе, имеющем инвариантную структуру, не приходится. С некоторой натяжкой такую структуру можно усмотреть в доказательствах, опирающихся на признаки равенства треугольников.

Схема доказательств, использующих признаки равенства треугольников, обычно такова: отрезки или углы, равенство которых надо доказать, включают в „подходящие" треугольники; доказывают равенство этих треугольников; из равенства треугольников выводят требуемые равенства. Отсутствие общей идеи в доказательствах, идейная разобщенность их затрудняют усвоение теоретического материала. Не случайно учащиеся быстро забывают такие доказательства и путают их. В этой связи важно строить доказательства таким образом, чтобы они опирались на сравнительно небольшое (в рамках каждой темы) число достаточно фундаментальных, узловых теорем. В итоге доказательства приобретают общие черты, схожую структуру, что позволяет говорить о наличии общего приема или метода доказательства. Сконструировать такие доказательства нелегко, и при этом часто требуется существенная перестройка логической структуры темы, раздела или всего курса. Некоторый опыт построения таких доказательств изложен нами в работе [90]. В этих материалах, например, большинство вопросов параллельности прямых и плоскостей в пространстве изложено на основе одной и той же теоремы: „Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую".

II. Учебники геометрии могут строиться на основе аналитических методов. Из методической литературы известна критика педагогической концепции Г. Шоке французским математиком Ж. Дьедонне. Шоке в своей „Геометрии" [112] приспособливает аксиоматику Вейля для школьного преподавания путем нарушения „чистоты" этой аксиоматики. Вместо векторных аксиом Шоке вводит гильбертовские аксиомы принадлежности, геометрические преобразования, аксиомы метрического пространства. По мнению Дьедонне, надо не аксиоматику Вейля приспособлять к сознанию учащихся, а наоборот, сознание учащихся нужно доводить до такого уровня, на котором бы делалось возможным изложение геометрии на основе аксиоматики Вейля в ее „чистом" виде. Аксиоматика Вейля является хорошим примером аксиоматики алгебраического типа. Такой же тип приобретают учебные руководства, ориентированные на нее. Следует

отметить, что спор между Дьедонне и Шоке школьная практика решает в пользу Шоке. Попытки воспользоваться алгебраическими аксиоматиками в их „чистом” виде оказываются несостоятельными, но частичная алгебраизация находит в учебниках все большее и большее применение.

Векторное изложение геометрии не является единственным примером алгебраизации геометрии. Другим примером служит построение Ф. Бахмана [20]. В нем аксиоматизируются групповые свойства осевых и центральных симметрий. Доказательства по Бахману сводятся к оперированию с равенствами композиций симметрий.

Третьим примером алгебраизации геометрии является построение ее на основе аксиоматики координатных систем [81]. В нем также постулируются свойства некоторых алгебраических операций. Координатное изложение геометрии, известное под названием „аналитическая геометрия”, исторически является самым первым алгебраическим изложением.

Алгебраические аксиоматики предоставляют максимум возможностей для введения и применения алгебраических методов. В дидактическом плане необходимо иметь в виду, что сплошное применение алгебраических методов приводит к потере наглядности изложения. Заметим, что учебники геометрии, построенные на основе алгебраических методов, характерны для высшей школы. Для массовой общеобразовательной средней школы таких учебников практически нет. Недостаточность методологической преемственности школьных и вузовских учебников геометрии мы рассматриваем как их существенный недостаток. Можно назвать лишь некоторые руководства для учителей, пособия для проведения факультативных занятий, в которых сравнительно широко применяются алгебраические методы [50, 81, 103].

Роль аналитических методов в геометрии хорошо показана Ф. Клейном в его книге [52]. Хотя изложение в этой книге подчеркнуто аналитическое, Клейн разъясняет, что речь идет о создании у учителя целостного понимания геометрии, тогда как школьное преподавание должно быть генетическим, наглядным и (до определенного места) синтетическим. (Подробный комментарий педагогических взглядов Клейна на преподавание геометрии в средней школе см. в предисловии редактора этой книги В.Г. Болтянского.) Утверждение Клейна о том, что изложение геометрии должно быть до определенного места синтетическим, мы принимаем не буквально (до сих пор — изложение только синтетическое, а после — только аналитическое), а как тенденцию, указывающую на главенство традиционно-синтетического метода и до определенного момента курса, и после него. Поэтому выделение подготовительного этапа для координатного метода в первый год обучения систематическому курсу (на котором речь идет о небольшом предварительном ознакомлении учащихся с координатным методом) не противоречит высказанному Клейном положению. Подготовительный этап возможно ограничить только координатным методом, не связывая его пока с векторным. В этих целях достаточным оказывается

использование самого понятия системы координат и одной-двух формул, например формулы расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

Отметим еще одну особенность учебников, в которых имеет место усиление роли алгебраических методов математики. В них логико-математическая система не находится в жесткой зависимости от вспомогательных фактов, что существенно с точки зрения конструирования учебника. Это обстоятельство объясняется усилением роли в доказательствах общематематических методов. По этой причине логико-математическая система легче поддается переконструированию (упрощениям, сокращениям и т.п.). В частности, могут быть сокращены понятия и факты, избыточные по отношению к целостной логико-математической системе и не представляющие большой общеобразовательной ценности.

III. *Учебники, в которых сочетается применение синтетических и аналитических методов.* Примером изложения, сочетающего в себе применение традиционно-синтетических и аналитических методов, является упомянутая выше „Геометрия” Шоке [112], относящаяся к смешанным учебникам. Учебники этого типа стремятся соединить в себе достоинства учебников первых двух типов. Они ориентируются на смешанные аксиоматики. „Сырьем” для построения смешанных аксиоматик служат традиционно-синтетические и алгебраические аксиоматики. Вместе с тем смешанная аксиоматика не представляет собой механический конгломерат, составленный из разнородных частей различных аксиоматик.

Аксиоматика Шоке не является единственным примером смешанной аксиоматики. Другим примером может служить синтетический вариант аксиоматики Бахмана [20]. В ней формулируются традиционно-синтетические аксиомы инцидентности: „Существует по крайней мере одна прямая. Каждой прямой инцидентны по крайней мере три точки. Для всяких двух разных точек существует единственная прямая, которой они инцидентны”. В этой аксиоматике имеется также аксиома о трех симметриях, носящая четко выраженный алгебраический характер: „Суперпозиция симметрий относительно трех прямых, имеющих общую точку или общий перпендикуляр, совпадает с симметрией относительно некоторой четвертой прямой”.

Смешанная аксиоматика может быть сконструирована на базе аксиоматик различного типа. Если, например, к исходным понятиям аксиоматики Вейля присоединить избыточные понятия „прямая” и „плоскость”, а в качестве избыточных аксиом взять аксиомы принадлежности Гильберта, то получится *избыточная смешанная аксиоматика*. В дидактическом плане она представляет определенный интерес.

Аксиоматики смешанного типа и соответствующие им учебники ориентируют на сочетание традиционно-синтетических и аналитических методов математики. Идея сочетания аналитического и синтетического методов в изложении геометрии привлекает внимание многих исследователей. Г.В. Лудина, например, предлагает [59] метод изучения геометрических

преобразований, который „соединяет в себе силу аналитического метода с наглядностью синтетического и позволяет при необходимости переходить от одного метода к другому”.

В пользу смешанной аксиоматики говорят некоторые данные *генетической психологии*. Установлено, что в возрасте около 7 лет дети различают фигуры по топологическим признакам; в это же время происходит интуитивное усвоение прямой линии и идеи измерения расстояний. Специфические свойства евклидовой геометрии (в равной мере с остальными) начинают фиксироваться в возрасте 9–10 лет; „... лишь значительно позже того, как ребенок овладеет топологическими отношениями, он начинает развивать свои понятия евклидовой и проективной геометрии. И тогда он строит их одновременно” [78]. Данное положение хорошо согласуется с выбором смешанной аксиоматики. Оно свидетельствует о том, что к началу изучения систематического курса геометрии геометрические представления детей складываются как своего рода комплексы, сплавы, синтетические образования, без намеков на потребность расчленения их по видам геометрий. Преждевременное расчленение геометрических представлений детей по видам геометрий неизбежно вступает в противоречие с отмеченной психологической закономерностью. Эти данные говорят о том, что школьный учебник не может быть чисто векторным, построенным одним только координатным методом или методом геометрических преобразований и т.д. Школьная аксиоматика (особенно в среднем звене обучения) должна отражать комплекс научных идей, соответствующих многообразным представлениям учащихся. В этой связи особенно важно, чтобы школьная аксиоматика и дальнейшее изложение школьного курса отражали традиционно-синтетические аспекты геометрии, создавали условия для введения аналитических методов.

В математике в готовом виде такой системы аксиом для построения евклидовой геометрии нет. Существующие системы аксиом, как правило, обеспечивают отдельные узкоматематические цели. Они опираются на одну какую-либо математическую идею: идею метрического или векторного пространства, группы геометрических преобразований или аксиоматики координатных систем и т.д. Смешанные аксиоматики, к сожалению, не характерны для математической науки. Они стали появляться в последнее время только в чисто методических целях. Такие аксиоматики, как правило, теряют внешнюю привлекательность и внутреннее идейное единство в их традиционном понимании. Поэтому можно предвидеть некоторые возражения против смешанной аксиоматики. Однако, нам кажется, что в математических и методических целях правильнее на аксиоматику смотреть не с внешней стороны, а как на инструмент рационализации логико-математической системы евклидовой геометрии. С этой точки зрения смешанная аксиоматика по сравнению с „чистой” содержит в себе больше потенциальных возможностей. Такая аксиоматика закладывает основы не одного, а нескольких математических методов. Обеспечивая раннее введение раз-

личных математических методов, в дидактическом плане она создает условия для своевременной пропедевтики этих методов, для выработки прочных навыков их применения. Необходимо также учитывать, что большинство „чистых” аксиоматик просто непригодно для школы в силу их недоступности. Потребность в смешанной аксиоматике в настоящее время возрастает в связи с усилением *разнородности содержания школьного курса геометрии*, которое все больше становится не только традиционно-синтетическим, но и координатным, векторным, насыщенным сведениями по геометрическим преобразованиям и т.п. Смешанная аксиоматика в таком случае является более адекватной его характеру.

Конечно, отношение к конкретному варианту смешанной аксиоматики зависит от качества его „исполнения”. Построение такой аксиоматики необходимо связывать с фундаментальными понятиями и фактами евклидовой геометрии. Важно, чтобы в смешанной аксиоматике были представлены такие предложения, которые закладывают основы ведущего и вспомогательных математических методов.

Говоря о „школьной аксиоматике”, мы вовсе не имеем в виду какое-либо аксиоматическое построение школьного курса. Речь идет об определенном этапе конструирования учебника, его логико-математической системы. Допустимы различные дидактические формы приведения аксиом в учебнике.

2.1.6. Логическая связь с числовыми системами

К смешанной аксиоматике близки аксиоматики, связанные с числовыми системами, с понятием числа. К ним относятся, например, аксиоматики, содержащие аксиомы измерения отрезков, углов, площадей фигур. В отношении таких аксиоматик требуется решить вопрос о методической форме реализации связи геометрических и числовых понятий в школьном курсе. Существуют две возможности: 1) формулируется аксиоматика действительных чисел, которая предпосылается построению геометрии; 2) аксиомы действительных чисел в школьном курсе не приводятся, сведения о числах используются в геометрии в таком виде, в каком они традиционно изучаются в средней школе.

В данной работе принята вторая точка зрения. Для связей школьного курса геометрии с понятием числа важны не формально-логические связи, а связи содержательного характера. Вместе с тем вызывают значительный интерес попытки раннего введения действительных чисел в средней школе. Одна из таких попыток сделана в пособии [76].

2.1.7. Некоторые подходы к конструированию смешанной аксиоматики

1. Рассмотрим подход, принятый в учебнике Э.Э. Моиза и Ф.Л. Даунса [69]. Здесь приводятся следующие планиметрические аксиомы.

I (аксиома расстояния). Каждой паре различных точек соответствует

некоторое определенное положительное число.

II (*аксиома масштабной линейки*). Точкам прямой можно поставить в соответствие действительные числа так, что:

1) каждой точке прямой будет соответствовать одно и только одно действительное число;

2) каждому действительному числу будет соответствовать одна и только одна точка прямой;

3) расстояние между любыми двумя точками будет равно абсолютной величине разности соответствующих чисел.

III (*аксиома прикладывания линейки*). Каковы бы ни были две точки A и B на произвольной прямой, система координат на этой прямой может быть выбрана так, что координата точки A будет нулевой, а точки B – положительной.

IV (*аксиома прямой*). Для любых двух различных точек существует одна и только одна прямая, содержащая обе эти точки.

V. Каждая плоскость содержит по крайней мере три неколлинеарные точки.

VI. Даны прямая и содержащая ее плоскость. Тогда точки этой плоскости, не принадлежащие данной прямой, образуют два таких множества, что:

1) каждое из этих множеств выпукло;

2) если точка A принадлежит одному из этих множеств, а точка B – другому, то отрезок AB пересекает данную прямую.

VII (*аксиома измерения углов*). Каждому углу BAC соответствует некоторое действительное число, заключенное между 0 и 180.

VIII (*аксиома построения углов*). Пусть AB – луч, принадлежащий ребру полуплоскости H . Тогда для каждого действительного числа α , заключенного между 0 и 180, существует ровно один такой луч AP , что точка P принадлежит полуплоскости H и мера угла PAB равна α .

IX (*аксиома сложения углов*). Если точка P лежит внутри угла ABC , то мера угла ABC равна сумме мер углов ABP и PBC .

X (*аксиома пополнения*). Если два угла являются смежными, то они дополнительные (т.е. их общая мера = 180).

XI (*первый признак равенства треугольников*). Каждое СУС-соответствие является конгруэнтностью.

XII (*второй признак равенства треугольников*). Каждое УСУ-соответствие является конгруэнтностью.

XIII (*третий признак равенства треугольников*). Каждое ССС-соответствие является конгруэнтностью.

XIV (*аксиома параллельности*). Существует только одна прямая, проходящая через данную точку, не принадлежащую данной прямой, и параллельная данной прямой.

XV (*аксиомы площади*). 1. Каждой многоугольной области соответствует определенное положительное число.

2. Если два треугольника конгруэнтны, то определяемые ими треугольные области имеют одну и ту же площадь.

3. Если область R является объединением двух областей R_1 и R_2 , причем области R_1 и R_2 пересекаются не более чем по конечному числу отрезков и точек, то $S_R = S_{R_1} + S_{R_2}$.

4. Площадь квадратной области равна квадрату длины ее стороны.

Данная система аксиом является модификацией аксиоматики Д.Д. Биркгофа, базирующейся на использовании масштабной линейки и транспортира. Эта система аксиом позволяет упростить изложение вопросов геометрии порядка на прямой и плоскости, меры отрезка и угла. Существенным упрощениям данная аксиоматика способствует и при изложении вопросов измерения площадей фигур. Включение второго и третьего признаков равенства треугольников в качестве избыточных аксиом также позволяет более просто изложить вопросы, связанные с понятием равных треугольников. В целом изложение в учебнике [69] является традиционно-синтетическим. Имеется отдельная небольшая глава, посвященная аналитической геометрии на плоскости. Векторы и геометрические преобразования в данном учебнике вообще не рассматриваются.

Из отечественных учебников к установкам Д.Д. Биркгофа весьма близок учебник А.В. Погорелова [79].

2. Рассмотрим одну из модификаций аксиоматики Д.Д. Биркгофа, ориентированную на одновременное введение нескольких математических методов. В качестве аксиом примем следующие предложения.

I (аксиома расстояния). Каждой паре различных точек соответствует единственное положительное число, называемое расстоянием между данными точками.

II (аксиомы системы координат на плоскости). Система координат ставит в соответствие точкам плоскости пары действительных чисел таким образом, что:

1) каждой точке плоскости будет соответствовать одна и только одна пара действительных чисел;

2) каждой паре действительных чисел будет соответствовать одна и только одна точка плоскости;

3) квадрат расстояния между любыми двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равен $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, т.е. $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Из аксиом I и II следует, что расстояние между двумя точками не зависит от выбора системы координат.

Понятие прямой в данной системе является определяемым. Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Прямой, проходящей через эти точки, называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2.5)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$;

$$y = y_1, \quad (2.6)$$

если $y_1 = y_2$;

$$x = x_1, \quad (2.7)$$

если $x_1 = x_2$.

Прямая, точки которой имеют координаты $(x; 0)$, называется *осью абсцисс*. Прямая, точки которой имеют координаты $(0; y)$, называется *осью ординат*. Точка $O(0; 0)$, принадлежащая обоим координатным осям, называется *началом координат*.

Следствия. 1. Через две различные точки можно провести прямую и притом только одну. 2. Прямую можно задать любыми двумя ее точками.

III (аксиома о выборе системы координат). Каковы бы ни были две точки A и B на произвольной прямой, оси системы координат можно расположить так, чтобы точка A была началом координат, а точка B принадлежала положительной полуоси оси абсцисс.

Следствия. Точкам прямой можно поставить в соответствие действительные числа так, что:

1) каждой точке прямой будет соответствовать одно и только одно действительное число;

2) каждому действительному числу будет соответствовать одна и только одна точка этой прямой;

3) расстояние между любыми двумя точками прямой будет равно абсолютной величине разности соответствующих чисел.

Числа, о которых говорится в предыдущих следствиях, называются *координатами точки на прямой*.

Точка C называется *лежащей между точками A и B* , если эти три точки лежат на одной прямой и выполняется равенство $AC + CB = AB$. Множество точек, состоящее из точек A , B и точек, лежащих между ними, называется *отрезком AB* , а точки A и B — *концами отрезка*. Если расстояния AB и CD равны, то отрезки AB и CD называются *равными*. Расстояние AB называют *длиной отрезка AB* .

Следствия. Даны прямая и принадлежащая ей точка O . Тогда точки этой прямой, отличные от точки O , образуют два таких множества, что:

1) каждое из этих множеств выпукло;

2) если точка A принадлежит одному из этих множеств, а точка B — другому, то точка O лежит между точками A и B .

Каждое из множеств, о которых говорилось в предыдущих следствиях, называется *лучом* или *полупрямой*, а точка O — *началом луча*. Каждое из этих множеств вместе с точкой O также считается лучом (полупрямой).

Следствия. Даны прямая и содержащая ее плоскость. Тогда точки плоскости, не принадлежащие данной прямой, образуют два таких множества, что:

- 1) каждое из этих множеств выпукло;
- 2) если точка A принадлежит одному из этих множеств, а точка B — другому, то отрезок AB пересекает данную прямую.

Каждое из множеств, о которых говорится в предыдущих двух следствиях, называют *полуплоскостью*, а прямую — *границей полуплоскости*. Каждое из этих множеств вместе с данной прямой также считается *полуплоскостью*.

Вопросы измерения отрезков решаются с помощью приводимых ниже следствий.

Следствия. 1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. 2. Если точка C лежит на отрезке AB , то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB .

Далее можно перейти к рассмотрению понятия угла. Фигура, образованная двумя полупрямыми с общим началом, называется *углом*, полупрямые — *сторонами угла*, общее начало полупрямых — *вершиной угла*. Угол, образованный двумя дополнительными полупрямыми, называется *развернутым*. Полупрямая, выходящая из вершины угла и пересекающая отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, называется *проходящей между сторонами данного угла*.

IV (аксиомы измерения углов). 1. Каждому углу соответствует определенная неотрицательная градусная мера.

2. Развернутый угол равен 180° .

3. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую градусную меру.

V (аксиома откладывания угла). От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один.

Далее можно перейти к рассмотрению понятия треугольника.

Фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих их, называется *треугольником*, данные точки — *вершинами треугольника*, отрезки — *сторонами треугольника*. Затем могут быть введены понятия внутренней и внешней областей треугольника. Фигура, образованная сторонами и внутренней областью треугольника, также называется *треугольником*.

Треугольник ABC называется *равным* треугольнику $A_1B_1C_1$, если выполняются равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. (Заметим, что в данной системе в качестве определения принят третий признак равенства треугольников.)

VI (аксиома о равенстве треугольников). Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Следствие. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

Используя аксиому VI, легко доказать „второй” признак равенства треугольников.

Теорема. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Далее вводится понятие перпендикулярных прямых.

Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются *пересекающимися*. Если две прямые пересекаются под углом в 90° (под прямым углом), то они называются *перпендикулярными*.

Теорема. Оси системы координат — перпендикулярные прямые.

Для доказательства этой теоремы на оси абсцисс выбираем две точки $A(a; 0)$ и $B(-a; 0)$, на оси ординат — точку $C(0; c)$. Пользуясь формулой расстояния между двумя точками плоскости (аксиома II), доказываем, что $BO = AO$, $BC = AC$. На основании определения треугольники BOC и AOC равны. Из их равенства следует, что угол BOC равен углу AOC . А так как они смежные, то в сумме составляют 180° . Поэтому каждый из этих двух углов равен 90° . Отсюда координатные оси перпендикулярны друг к другу.

Теорема. Через точку, лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к данной прямой.

Справедливость теоремы следует из аксиомы откладывания угла (аксиомы V).

Теорема. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к данной прямой.

Для доказательства теоремы допустим, что через точку B к данной прямой можно провести два перпендикуляра AB и BC . Выберем систему координат так, чтобы точка A имела координаты $(0; 0)$, точка C — координаты $(c; 0)$, точка B — координаты $(0; b)$. Пользуясь формулой расстояния между двумя точками плоскости, получим $BC^2 = c^2 + b^2$. Отсюда, учитывая, что $AB^2 = b^2$, имеем $BC > AB$. Далее выберем систему координат так, чтобы начало координат совпало с точкой C , ось абсцисс с прямой AC , ось ординат — с прямой CB . Проводя аналогичные вычисления, получим $AB > BC$. Это неравенство противоречит предыдущему. Следовательно, прямые BA и BC совпадают.

Прямая, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину, называется *серединным перпендикуляром к отрезку*.

Теорема. Если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка.

Теорема. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку.

Перейдем к понятию параллельных прямых. Прямые, принадлежа-

щие одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют общих точек или совпадают.

Теорема. Параллельные прямые существуют.

Прямые, задаваемые уравнениями $y = 0$ (ось абсцисс) и $y = y_1$, где $y_1 \neq 0$, являются параллельными.

Теорема. Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Пусть даны точка A и прямая a , $A \notin a$. Допустим, что через точку A можно провести две прямые, параллельные данной. Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпала с данной прямой. Пусть x_1 и y_1 — координаты точки A . Установим, каким уравнением задаются прямые, проходящие через точку A и по допущению параллельные данной прямой a .

Нетрудно установить, что если прямая задается уравнением (2.5) или (2.6), указанным в определении прямой, то она пересекается с осью абсцисс. Следовательно, прямые, проходящие через точку A и параллельные оси абсцисс, задаются уравнением (2.7), т.е. каждая из них определяется уравнением $y = y_1$. Так как эти прямые задаются одним и тем же уравнением, то они совпадают.

Далее обычным образом вводятся понятия внутренних накрест лежащих и соответственных углов, образованных двумя данными прямыми и секущей. После чего могут быть доказаны следующие

Теоремы. 1. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

2. Если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны и сумма внутренних односторонних углов равна 180° .

3. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

Связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых устанавливают следующие

Теоремы. 1. Если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

2. Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна к некоторой прямой, то к этой прямой перпендикулярна и другая прямая.

Связь между равенством отрезков и параллельностью прямых устанавливают следующие

Теоремы. 1. Если на одной из параллельных прямых последовательно отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то на второй прямой отсекутся отрезки, равные отрезкам первой прямой.

2 (теорема Фалеса). Если на одной стороне угла последовательно отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на этой стороне отсекутся равные между собой отрезки.

Доказательства теорем из приведенных выше трех групп проводятся с опорой на признаки равенства треугольников. Этот метод удобно применить и при изложении теории треугольника.

Теоремы. 1. Сумма углов треугольника равна 180° .

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Далее можно ввести понятия равнобедренного, равностороннего и прямоугольного треугольников, а также понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника и рассмотреть следующие

Теоремы. 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

3. В равностороннем треугольнике все углы равны 60° .

4. Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

5. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Здесь же может быть введено понятие средней линии треугольника и рассмотрены следующие

Теоремы. 1. Если на каждой стороне угла отложить от вершины ряд равных отрезков и через соответствующие концы их провести прямые, то эти прямые будут параллельны.

2. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Составной частью теории треугольника являются вопросы, относящиеся к прямоугольному треугольнику. Теорема Пифагора является непосредственным следствием из формулы квадрата расстояния (аксиомы II (3)). Далее могут быть рассмотрены: теорема, обратная теореме Пифагора; признаки равенства прямоугольных треугольников; свойство катета, лежащего против угла в 30° ; свойство медианы, проведенной из вершины прямого угла. Последнему свойству целесообразно предпослать вывод формул координат середины отрезка и воспользоваться этими формулами при доказательстве данного свойства. Заключительной частью теории треугольника являются теоремы о центроиде, о точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, об окружности, описанной около треугольника, об ортоцентре треугольника, о точке пересечения биссектрис треугольника, об окружности, вписанной в треугольник.

Следующую тему естественно посвятить изучению различных четырехугольников: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, после чего можно перейти к изложению вопросов измерения площадей фигур, которые опираются на заключительную группу аксиом.

VII (аксиомы измерения площадей). 1. Каждому многоугольнику соответствует определенное положительное число (называемое его площадью).

2. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

3. Если два треугольника равны, то равны их площади.

4. Если многоугольник составлен из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников.

В дополнение к ранее изложенному можно выделить (в виде небольшой темы) следующие сведения по аналитической геометрии: аналитические условия параллельности и перпендикулярности прямых, уравнение окружности, взаимное расположение прямой и окружности.

Координатный метод может найти наибольшие применения при изучении элементов тригонометрии, векторов, геометрических преобразований.

По традиции школьный курс можно заключить вопросами измерения длины окружности и площади круга.

2.1.8. Некоторые выводы

Приведенные данные свидетельствуют в пользу сформулированной ранее концепции построения учебника геометрии средней школы. Они показывают конкретные пути воплощения этой концепции в практику конструирования школьного учебника. Подтверждено центральное положение принятой концепции – возможность построения школьного курса геометрии на основе совместного применения нескольких математических методов. В значительной мере такая возможность обеспечивается ориентацией логико-математической системы учебника на смешанную аксиоматику. Своевременное введение нескольких математических методов является необходимым условием для их выборочного применения в последующем изложении. Создаются условия, при которых каждый математический метод применяется на „конкурентной” основе, причем только тогда, когда он дает явные преимущества по сравнению с другими. Математические методы при этом становятся эффективным средством рационализации школьного курса геометрии в целом.

Высказанные рекомендации о выборе математических методов, разумеется, не означают, что все они должны вводиться сразу в полном объеме в самом начале учебного курса. Это неизбежно привело бы к методологической перегрузке начала курса, отрыву математических методов от их применений. Во избежание этого и рекомендуется выделение ведущего и вспомогательного математических методов. Ведущий математический метод вводится по возможности сразу, в начале курса, в полном объеме и интенсивно применяется в дальнейшем. Вспомогательный математический метод вводится постепенно, более распределенно, в два этапа. Первый этап – начальный, на котором вспомогательный математический метод находит лишь отдельные применения. Он используется в тех случаях, когда применение ведущего математического метода оказывается нерациональным. Нет необходимости искусственно расширять область применения вспомогательного математического метода в начале курса. Объясняется это тем, что при определенном выборе ведущего математического метода

в начале курса группируются такие темы (и это совершенно оправданно), в изложение которых именно ведущий математический метод вносит наибольшую рационализацию. В более отдаленных от начала курса темах роль ведущего метода может несколько ослабевать, а вспомогательного, напротив, возрастать. Тем самым естественным образом определяется место основного этапа введения вспомогательного математического метода. Ограничение области применения вспомогательного математического метода на начальном этапе не может служить поводом к исключению этого этапа как такового. Необходимо иметь в виду, что начальный этап преследует двоякую цель: 1) подготовить учащихся к использованию вспомогательного математического метода на основном этапе; 2) возможно раньше применить данный математический метод в целях рационализации системы доказательств. Первая цель является психологической, вторая – логического плана; обе они одинаково важны.

В учебниках общекультурного уровня и в большинстве учебников повышенного уровня в качестве ведущего математического метода предлагается выбирать традиционно-синтетический. К вспомогательному математическому методу может быть отнесен при этом координатный, или координатно-векторный метод, или метод геометрических преобразований.

2.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ СТРОГОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ

2.2.1. Классификация учебников с точки зрения строгости изложения

Строгость изложения школьного курса геометрии есть „результатирующая” строгости изложения всех основных частей теоретического материала: системы аксиом и определений, системы теорем и их доказательств. Психология подсказывает, что стремиться к одному какому-либо фиксированному на протяжении всего курса уровню строгости не следует. Небесполезно учесть при этом, что единого уровня строгости нет и в профессиональной математической деятельности [107]. Поэтому более целесообразным представляется выделение определенных ступеней строгости и организации такого обучения, которое помогало бы учащимся переходить с одной ступени на другую, более высокую.

Еще в 1911 г. на Миланской конференции Международная комиссия по преподаванию математики выделила следующие направления построения школьного курса геометрии:

направление А – выдержанное формально-логическое; полный отказ от интуиции; основные понятия определяются только аксиомами ...;

направление В – основные понятия заимствованы из опыта, дальнейшее построение курса ведется в дедуктивном стиле. При этом возможны три градации: B_1 – перечисляются все необходимые аксиомы; B_2 – только часть аксиом указывается в явном виде; B_3 – формулируются только те аксиомы, содержание которых не представляется очевидным;

направление C — интуиция переплетается с дедукцией, без попыток отделить одну от другой;

направление D — интуитивно-экспериментальное: геометрические факты устанавливаются экспериментальным путем, логические связи отсутствуют.

Характеризуя эти направления, Я.С. Дубнов [42, с. 48–50] отмечал, что перед первой мировой войной в преподавании господствовали направления B_2 , B_3 и C . Но в то время как на Западе все более склонялись к последним двум (по крайней мере, в начальной стадии обучения), в России решительно преобладало направление B_2 .

Вопрос об уровне строгости изложения школьного курса геометрии, о мере использования идей аксиоматического метода — один из наиболее дискуссионных вопросов методики математики, вызывающий острые споры (см., например, об этом в книге Н.В. Метельского [66]). С не меньшей остротой эти дискуссии возобновляются на каждом очередном этапе совершенствования математического образования (см. статьи В.И. Левина, И.Н. Бернштейна, А.М. Лопшица, А.А. Ляпунова, А.Н. Колмогорова в сборнике [71]). Дискутируется этот вопрос и в настоящее время (см. статьи в журнале „Математика в школе“ А.Д. Александрова [4], П.В. Дорофеева [41], О.В. Мантурова, М.А. Исаева [61], Т.С. Маликова [60] и др.).

Анализ различных точек зрения на строгость школьного курса геометрии показывает, что особенно „ожесточенный“ спор вызывается попытками зафиксировать в школьном курсе некий стандартный уровень. Часто авторы, отвергая один такой стандарт, взамен предлагают другой, который в свою очередь подвергается не меньшей критике. Эта традиция имеет свою историю. Достаточно отметить, что и в приведенной выше миланской классификации акцент делается на выделение различных направлений, а не на их сочетание и переход в процессе обучения с одного из них на другой, характеризующийся более высоким уровнем строгости.

Положительным итогом проводимых обсуждений следует считать выводы о том, что строгость в обучении не является самоцелью, а должна согласовываться с формированием понятий на наглядно-интуитивном уровне, служить уточнению наглядных представлений учащихся. Строгость в доказательствах может быть направлена на повышение убедительности обоснований. В этих случаях она имеет положительное воспитательное и развивающее значение.

Поиски единого стандарта уровня строгости можно объяснить существовавшим долгое время неверным толкованием обязательности среднего образования как одинаковости в обучении для всех учащихся. Всякий усредненный стандарт, ориентированный на среднего ученика, как правило, оказывался малоподходящим для „крайних“ категорий учащихся. Для сильных учащихся он был недостаточным, для слабых — чрезмерным. Дифференциация обучения предполагает изложение геометрии для разных категорий учащихся на различных уровнях строгости.

2.2.2. О крайностях в строгости изложения

Допуская различные уровни, ступени строгости, полезно иметь в виду и те крайности, которых следует избегать. Посмотрим, что подсказывает в этом отношении практика создания учебников. Начнем с *нижней границы строгости*, понижение которой недопустимо. Нельзя понижать строгость до такого уровня, на котором происходит искажение геометрических понятий. Один такой пример из учебника Н.Н. Никитина приводит А.Н. Колмогоров: „Угол здесь определяется как фигура, состоящая из двух лучей с общим началом. Учащимся предлагается нарисовать угол на листе бумаги и вырезать его ножницами (вырезать из листа бумаги линию?) и говорится, что в результате получится не один угол, а два (?). Автор учебника перешел незаметно к другому определению угла как части плоскости, ограниченной двумя лучами... здесь надо держаться одного из этих определений, а не путать их” [71, с. 78]. А вот пример *верхней границы строгости*, которая также нежелательна, особенно в тех случаях, когда строгость оказывается мнимой. Этот пример из учебного пособия А.Н. Колмогорова и др. приводит Г.В. Дорофеев: „В учебном пособии „Геометрия 6” под редакцией А.Н. Колмогорова дано следующее определение ломаной: „Ломаной называется объединение отрезков $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой”. Это формальное определение привело, например, к тому, что на вопрос, является ли фигура, изображенная на рис. 2.13, ломаной, чаще всего приходится слышать отрицательный ответ, и именно от тех учащихся, которые наиболее внимательно относятся к определениям. В действительности, эта фигура,

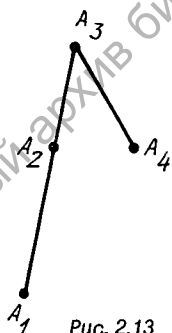


Рис. 2.13

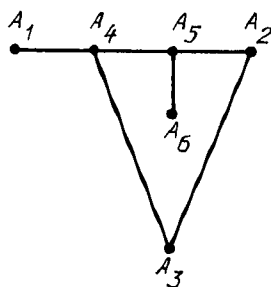


Рис. 2.14

разумеется, является ломаной, но не ломаной $A_1A_2A_3A_4$, а ломаной $A_1A_3A_4$. (Та же самая ситуация имеет место и для простой ломаной в „Геометрии 6–8” 1981 г. издания.) Конечно, приведенное определение можно изменить так, чтобы устранить возникшую тонкость, однако это усложнило бы логическую структуру определения, и главное – ни в приведенной, ни в уточненной формулировках определение ломаной не играло бы существенной роли. Для полноценного владения этим понятием, на наш взгляд,

интуитивно достаточного представления, сформированного у учащихся уже в начальной школе. Самое любопытное состоит в том, что приведенному определению ломаной удовлетворяет и фигура, изображенная на рис. 2.14. Сознательно ли авторами включена в объем понятия ломаной столь экзотическая фигура, весьма далекая от обычного представления ломаной, или это получилось случайно — трудно сказать” [41, с. 58].

Приведем примеры определений, отступление от строгости в которых можно считать допустимым. К числу таких определений мы относим определение понятия геометрического преобразования. Строгое определение этого понятия довольно трудоемко, так как требует введения целой цепочки вспомогательных понятий высокого уровня общности: отображения множества в множество, отображения множества на множество, обратное отображение, взаимно однозначное отображение множества на себя. Именно по этой причине в ряде учебников формулируются следующие определения: „Преобразованием в геометрии называется всякая операция (например, построение), позволяющая по данной фигуре получить новую” [104, с. 9]; „Геометрическим преобразованием называют всякое правило, позволяющее для каждой точки A на плоскости указать новую точку A' , в которую переводится точка A рассматриваемым преобразованием” [30, с. 46]; „Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной” [79, с. 94].

Аналогичные границы строгости полезно иметь в виду и при формулировании теорем. Формулировка теоремы, естественно, не должна искажать геометрический факт. Этому требованию не удовлетворяет, например, следующая формулировка теоремы: „Если луч OA противоположен лучу O_1A_1 и луч OB противоположен лучу O_1B_1 , то углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны” [54, с. 35]. Если бы в данном пробном учебнике угол определялся как пара лучей, то формулировка была бы верной. Но угол определяется как „часть” плоскости. При таком определении угла можно привести пример, когда условие теоремы выполняется, а заключение — нет. В данном случае уровень строгости ниже допустимого. Такое же замечание относится и к следующей „теореме”, приводимой в том же пробном учебнике (см. с. 35): „Если луч OA сонаправлен лучу O_1A_1 и луч OB сонаправлен лучу O_1B_1 , то углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны”.

Ниже допустимой нижней границы строгости следует считать и доказательства, которые содержат явные или замаскированные ошибки, неполные доказательства, выдаваемые за полные, и т.д. О такой ошибке говорит, например, А.Н. Колмогоров, имея в виду доказательство третьего признака равенства треугольников в учебнике Н.Н. Никитина (см. „Математика в школе”, 1965, № 4, с. 58).

2.2.3. О динамике уровня строгости

Практика создания школьных учебников дает основание для выделения следующих *уровней строгости* в изложении доказательств: 1) дедуктивные рассуждения в доказательстве перемежаются с наглядностью, с опорой на рисунок; отдельные шаги доказательства „обосновываются” наглядностью рисунка; 2) доказательства в основном носят дедуктивный характер, роль наглядности в качестве „средства обоснования” отдельных их шагов сужена, на наглядной основе выполняются лишь определенные шаги доказательства (например, шаги, связанные с применением понятия непрерывности, предложений геометрии порядка); 3) доказательство носит дедуктивный характер, логические пробелы касаются таких тонкостей в рассуждении, которые невозможно привести в школьном курсе (они могут быть отнесены к вузовскому курсу оснований геометрии); остальные шаги доказательства (включая использование непрерывности, геометрии порядка) доказываются; обоснование шагов, относящихся к понятиям непрерывности и геометрии порядка, позволяет строже решать вопрос о существовании геометрических фигур. С помощью этих уровней можно строить двух- или трехступенчатую „лестницу”, по которой должен пройти учащийся в процессе обучения. Уровень 1 необходим еще в предсистематическом и в начале систематического курса геометрии. Уровень 2 является основным. При углубленном изучении геометрии частично может быть использован уровень 3. В работе [31, с. 3] эти уровни характеризуются с позиции дифференцированного подхода к обучению следующим образом: уровень 1 – обязательный минимальный, уровень 2 – максимально допустимый для изучения всеми учащимися класса, уровень 3 – углубленный.

2.2.4. Роль аксиом в формировании определенного уровня строгости

Сразу отметим, что вопрос об уровне строгости изложения курса геометрии жестко не связан с приведением в учебнике аксиом. В учебном пособии [53], например, аксиомы приводились и вместе с тем далеко не все теоремы доказывались, некоторые доказательства были неполными. Этот учебник строился по *принципу „дедуктивных островков”*. В дидактическом отношении этот принцип имеет право на существование [96].

В учебниках [9, 53, 93, 79] аксиомы приводятся в начале курса. Эта тенденция прослеживается и в ряде зарубежных учебных руководств.

Как правило, используемые системы аксиом (и в математике, и в школьных учебниках) разнородны по своему содержанию. В них имеются аксиомы, описывающие понятия различных разделов геометрии: принадлежность, лежать между, конгруэнтность, длина отрезка, мера угла, вектор и т.д. Разделы геометрии, непосредственно „примыкающие” к аксиомам, обычно излагаются в школьных учебниках достаточно строго. Труднее

решается вопрос о сохранении строгости при изложении более удаленных, периферийных тем. В связи с включением в школьный курс геометрии координат, векторов и геометрических преобразований можно высказать предположение о целесообразности такой школьной аксиоматики, которая бы ориентировалась не только на традиционно-синтетическое содержание геометрии, но и на эти понятия. Например, в учебном пособии [53] широко использовались геометрические преобразования. В нем, кроме традиционно-синтетических аксиом, вводилась еще аксиома о перемещениях (о степени подвижности плоскости), что вполне оправданно. Эти данные говорят в пользу применения в школьном курсе смешанной аксиоматики, которая вследствие своей разнородности лучше ориентирована на различные темы школьного курса (и что важно – не только на начальные). При построении школьного курса геометрии с ориентацией на смешанную аксиоматику легче выдержать единый уровень строгости изложения.

Полезным, хотя и трудно выполнимым является требование *повышения оперативной роли аксиом* (предложения, выделенные в школьном курсе в качестве аксиом, должны получить в нем непосредственные применения). Реализовать его часто нелегко по той причине, что непосредственные применения той или иной аксиомы связаны с такими фактами геометрии и их доказательствами, которые не являются и не могут являться предметом изучения в школьном курсе. Например, упоминавшаяся выше аксиома о перемещениях в учебном пособии [53] именно по указанным причинам не приводится в основном тексте, а появляется лишь в приложении, в котором сообщается полный список аксиом. Понятно, что такие аксиомы больше служат для оправдания системы аксиом в научном отношении, однако мало способствуют совершенствованию уровня строгости школьного курса.

2.2.5. Формы предъявления аксиом в учебнике

Остановимся на возможных формах предъявления аксиом в школьном учебнике.

Каждый учебник предполагает наличие определенных логико-математических оснований для построения курса геометрии. В некоторых учебниках имеется довольно значительный раздел, посвященный аксиомам, что вряд ли оправданно. В других пособиях логико-математические основания занимают немного места. В учебнике геометрии А.П. Киселева, например, „именованных” или „нумерованных” аксиом приводится мало, но анализ начала курса свидетельствует, что оно насыщено аксиомами принадлежности, порядка, измерения отрезков, углов и т.д. (хотя соответствующие предложения не всегда явно выделяются).

Опыт учебника А.П. Киселева подсказывает одну из удачных в методическом отношении форм предъявления аксиом в учебнике, которая позволяет кратчайшим путем перейти к изучению основной части курса. Такая форма предъявления аксиом в учебнике актуальна и в настоящее время. Она принята, например, в пробном учебнике [10]. Аксиомы в этом учебнике формулируются, но без внешнего подчеркивания формально-логического их аспекта: они не нумеруются, не сообщается название групп и т.п. Формально-логический аспект не подчеркивается и в первых доказательствах этого курса. Непосредственные ссылки на аксиомы в первых доказательствах не делаются. Они подразумеваются и при необходимости, в устном изложении на уроке, могут быть сделаны. Этот прием культивирует неформальный стиль изложения, стимулирует активное обращение к наглядности в первых доказательствах. Первые ссылки в доказательствах появляются после изучения признаков равенства треугольников. Подобная „маскировка” аксиом позволяет на первый план выдвинуть наглядно-геометрическую, содержательную сторону доказательств. Доказательства оказываются более тесно связанными с возможными интуитивными рассуждениями учащихся. Безусловно, это помогает учащимся в усвоении начала курса.

Отметим однако принципиальное отличие данного пробного учебника от учебника А.П. Киселева. В учебнике А.П. Киселева начало курса трудно поддается формализации: четкому выделению аксиом, ссылок в первых доказательствах. В данном пробном учебнике выполнить такую работу не представляет особого труда. При необходимости это может быть выполнено вместе с учащимися, например при повторении курса, подготовке к экзаменам. Прием изложения, который дает возможность легко „восстановить” дедуктивный стиль, на наш взгляд, является ценным. Особенно этот прием подходит для учебников общекультурного уровня.

Другой прием применен в учебном пособии [53]. В нем, кроме аксиом, имеется еще целый ряд предложений, приводящихся без доказательства. Эти утверждения обозначаются здесь буквой „У”. При строгом изложении они могут быть доказаны. В школьном учебнике, даже самом „строгом”, всегда помимо аксиом можно выделить немало утверждений, которые явно не формулируются, но тем не менее, быть может, в скрытой форме используются. Например, в учебном пособии [79] через систему координат определяются сумма двух векторов, произведение вектора на число и скалярное произведение двух векторов. Факт независимости скалярного произведения от выбора системы координат (корректность определения) явно выделяется и доказывается, а аналогичные факты для суммы двух векторов и произведения вектора на число совсем не формулируются. Такую позицию в отношении идейно родственных друг другу фактов можно считать спорной. Тем более, что независимость суммы двух векторов и произведения вектора на число непосредственно следуют из геометрического смысла этих операций. Возможен также другой подход, при кото-

ром утверждения о независимости суммы двух векторов и произведения вектора на число от выбора системы координат принимаются в качестве аксиом. Перестройка системы аксиом в этом направлении приводит к смешанной аксиоматике, способствующей своевременному введению координатно-векторного метода.

Еще один полезный прием применен в пособии [79]. Из дидактических соображений в нем не сразу употребляется термин „аксиома”. Поначалу аксиомы называются „основными свойствами” и после того, как учащиеся приобретут уже некоторый навык в применении аксиом, освоятся с ними, поймут их назначение, сообщается, что основные свойства и есть аксиомы. Опыт массового использования пособия [79] в школе свидетельствует о целесообразности такого приема, позволяющего в ненавязчивой форме ввести аксиомы в школьный курс.

Мы допускаем различные формы приведения логико-математических основ для построения школьного курса геометрии. Важно, чтобы каждая из них делала это достаточно определенно и четко. Перечисленные выше различные формы, разумеется, не имеют ничего общего с формально-догматическим введением аксиом, способным оттолкнуть учащихся.

Несколько слов об „аксиомофобии”. Некоторые авторы вводят аксиомы лишь в IX или X классе, считая, что наличие их в начале систематического курса геометрии затрудняет его изучение. Не приводя аксиомы, авторы этих учебных руководств с самого начала проводят доказательства теорем. Логическая ясность таких доказательств крайне низка. Затруднения у учащихся неизбежны и на этом пути. Трудности в изучении начала систематического курса геометрии действительно существуют, остаются примерно одинаковыми и сколько-нибудь ощутимо не зависят от наличия или отсутствия аксиом в начале курса. Эти трудности порождаются не присутствием в начале курса аксиом, а резким переходом к дедуктивному методу обоснования.

При любой форме предъявления аксиом в учебнике раздел, посвященный им, должен быть небольшим по объему и не затягивать переход к основным темам учебного курса.

2.2.6. Пропедевтика строгости

Уровень строгости систематического курса зависит от предшествующей геометрической пропедевтики. В этом смысле пропедевтика геометрии в V – VI классах явно недостаточна. Требуется существенного усиления пропедевтики дедуктивных рассуждений. Определенное место в такой пропедевтике могли бы найти „доказательства”, которые наполовину являются логическими, наполовину – опытными. Например, опытным путем строится перпендикуляр, проходящий через данную точку A к данной прямой a : для этого на листе бумаги строятся прямая a и точка A (рис. 2.15), затем лист бумаги перегибается по прямой a и складывается вдвое; сло-

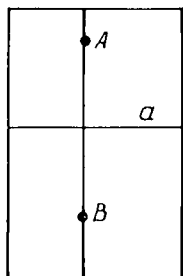


Рис. 2.15

женный лист прокалывается, в точке A , затем разворачивается; через точку A и полученную при прокалывании точку B проводится прямая; далее доказывается (тут уже последуют логические рассуждения), что построенная прямая – искомая; в ходе доказательства устанавливается равенство смежных углов (на основе наложения их), откуда следует, что каждый из них содержит 90° , а значит, построенная прямая перпендикулярна к данной. Заметим, что такого рода доказательства имеются в учебнике

А.П. Киселева и многих других отечественных учебниках, предшествующих ему. Специалисты по истории математики отмечают, что такими доказательствами пользовался еще Фалес и они являются самыми первыми примерами геометрических доказательств. Эти доказательства естественно отнести к начальному уровню строгости, практикуя его в V – VI классах.

2.2.7. О применении полной системы аксиом

Определенное своеобразие в регулировании уровня строгости изложения имеет место в учебниках, начинающихся с явного формулирования всех аксиом. В рамках этого подхода можно выделить следующие *приемы регулирования строгости изложения*.

1. Приводится полный список аксиом, дедуктивно выстраиваются лишь отдельные „островки” учебного материала. Часть теорем дается без доказательства. Этот прием применен в учебном пособии [53].

2. Формулируется полный список аксиом, все теоремы доказываются, но уровень строгости доказательств различный. В воспитательных целях более строго выстраивается начало курса. В дальнейшем, на „периферии” уровень строгости несколько понижается. Такой прием применен в пособии [79], которое в этом отношении является пока что уникальным.

3. Сообщается полный список аксиом, все теоремы курса доказываются, уровень строгости остается неизменным на протяжении всего курса. Например, в доказательствах не обосновываются шаги, связанные с геометрией порядка.

4. Начинают с полного списка аксиом, все теоремы доказываются, уровень строгости постепенно наращивается, выделяются своего рода „ступени” строгости. Например, в начале курса в доказательствах шаги, связанные с геометрией порядка, не обосновываются, а при дальнейшем построении курса логические пробелы такого рода сокращаются.

Приемы 3 и 4, как нам кажется, не получили еще применения при построении отечественных учебников. Между тем они обладают определенными методическими достоинствами. Заметим, что последние издания пособия [79] претерпевают частичные изменения в отношении применения приема 2. Они вызваны тем, что предпринятое повышение строгости изло-

жения начала курса частично оказалось недоступным учащимся. Это касается, в частности, доказательства теоремы о сумме углов треугольника. Возврат в отдельных местах к традиционному уровню строгости свидетельствует о том, что строгость может иметь положительное воспитательное значение лишь при условии ее доступности.

Следует отметить, что, применяя полную систему аксиом, авторы учебников вовсе не ставят перед собой цель придать всему курсу какой-то особый, не свойственный школьным учебникам, уровень строгости. Назначение полной системы аксиом в школьном учебнике состоит в другом: она помогает избежать резких колебаний уровня строгости изложения при переходе от одной темы к другой. О нежелательности резких колебаний уровня строгости изложения говорится, например, в статье [68].

Наличие полной системы аксиом открывает новые возможности в регулировании „локальной” строгости — строгости на уровне отдельного доказательства, отдельных шагов доказательства. Заметим, что в практике создания учебников эти возможности пока мало используются. О каких возможностях идет речь? В школьном курсе неизбежно отдельные шаги доказательства опускаются. В наибольшей степени это замечание относится к вопросам геометрии порядка и непрерывности. Характерно, что элементы строгого доказательства и логические пробелы, соседствующие в рамках одного и того же доказательства, никак в учебниках не разграничиваются, излагаются рядом. Безусловно, это снижает воспитательное значение доказательств. Было бы полезно отдельные шаги доказательства, выполняемые без логического обоснования, помечать в учебнике звездочкой и снабжать специальными ссылками, указывающими, что именно не обосновывается. В них полезно приводить (не для обязательного заучивания) соответствующие обоснования. Наличие полной системы аксиом делает такие ссылки осуществимыми в математическом плане. К ним можно обратиться при повторении, при подготовке к экзаменам. Необходимо также учесть, что со школьным учебником часто имеют дело уже взрослые люди (например, абитуриенты вузов после работы на производстве или службы в армии). Новое прочтение учебника, включая ссылки, возможно поможет им открыть дополнительные стороны в изучаемом материале.

Выравнивание уровня строгости возможно с помощью следующих приемов: 1) использование избыточной системы аксиом; 2) своевременное введение и выборочное применение нескольких математических методов с целью рационализации изложения. Эти приемы позволяют изменять не только отдельные доказательства, но и последовательность изложения целых тем, разделов, всего курса, что ведет к большей однородности уровня строгости изложения. Важно, чтобы выбор системы аксиом был нацелен на упрощение всей логико-математической системы учебника. В большей мере этому способствует избыточная система аксиом. Она сокращает цепь логических рассуждений, „поглощает” те геометрические утвержде-

ния, которые сами по себе являются наглядно очевидными, но доказательство которых чрезвычайно трудоемко. Данные приемы позволяют выделить следующие *три ступени строгости изложения*: начальную, относящуюся к предсистематическому курсу (о ней шла речь в п. 2.2.6); среднюю, относящуюся к первой главе систематического курса, в которой ряд трудоемких доказательств опускается; основную, относящуюся к последующему материалу.

Отметим, что применение идей аксиоматического метода в школьном курсе, безусловно, требует строжайшего соблюдения принципа доступности. В школьном курсе аксиоматический метод не может применяться на уровне формальной или полужормальной теории (такие попытки и не предпринимаются). Речь может идти только о содержательной форме аксиоматического метода, соответствующим образом адаптированной к школьной практике. Сами аксиомы занимают здесь не слишком много места, главную часть составляет построение геометрической теории, последовательное применение дедуктивного метода – процесс аксиоматизации. Необходимо учитывать, что аксиомы имеют не только чисто логическое назначение – служить отправными положениями в доказательствах. Они систематизируют важнейшие геометрические представления учащихся, аккумулируют в себе минимальный запас наглядных представлений, необходимых для изучения всего курса. Углубление и уточнение этих представлений в начале курса положительно сказывается на дальнейшем его восприятии. Своевременное разъяснение роли аксиом содержит в себе важный мировоззренческий аспект (о мировоззренческих сторонах аксиоматического метода говорится, например, в статье [113]).

2.2.8. Некоторые выводы

Изложенное выше позволяет высказать следующие рекомендации.

1. Предлагается последовательное соблюдение принципа доступности: в школьном курсе аксиоматический метод не может применяться на уровне формальной или полужормальной теории; речь идет о содержательной аксиоматизации, последовательном применении дедуктивного метода, охватывающих основные понятия и факты школьного курса.

2. Возможны различные формы изложения аксиом в учебнике: явное их выделение с употреблением названия „основные свойства”, неявное формулирование аксиом, без употребления термина „аксиома”, без членения аксиом на группы и т.д.

3. В целях сокращения логической цепи рассуждений (на промежуточной, средней ступени строгости) желательно применение избыточной системы аксиом. К избыточным могут быть отнесены геометрические факты, имеющие сложное логическое обоснование (предложения геометрии порядка, измерения отрезков, углов, площадей фигур, некоторые предложения

координатной геометрии, векторной алгебры, предложения типа „прямая задается любыми двумя своими точками” и т.д.).

4. Выдвигается предложение о повышении оперативной роли аксиом в построении учебного курса. Система аксиом в этих целях должна предусматривать своевременное введение различных математических методов.

5. Нежелательны резкие перепады в уровне строгости доказательств. Выравниванию уровня строгости доказательств может способствовать применение смешанной аксиоматики, которая тесно связана с периферийными темами курса. Системы аксиом, опирающиеся на понятие действительного числа (Биркгоф, Моиз, Даунс, Погорелов и др.), являются лишь первым шагом в этом направлении.

6. Необходимо учитывать, что строгость (если она доступна) имеет положительное воспитательное значение.

2.3. ТРЕБОВАНИЯ К СИСТЕМАТИЗАЦИИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

2.3.1. О некоторых проблемах систематизации учебного материала

Трудности в построении школьного курса геометрии отмечались еще участниками первого Всероссийского съезда преподавателей математики (27 декабря 1911 г. – 3 января 1912 г.). А.Р. Кулешер, например, отметил, что учащиеся старших классов с трудом представляют себе курс в виде связанного стройного целого. Н.А. Извольский утверждал, что авторы учебников главное внимание обращают на логику доказательства отдельных теорем, в то время как логичное построение всего курса неизмеримо ценнее. Эта проблема не снята с повестки дня и в настоящее время. При поиске же новых построений школьного курса она встает с особой актуальностью.

При обсуждении проектов новой программы по математике отмечалось, что учебный материал не имеет смысла строить концентрически или спирально. *Разбросанное расположение* многих разделов в программе приводит к плохому их знанию. Например, нет смысла изучать векторы в курсе стереометрии так же подробно, как и в курсе планиметрии. Не следует разбрасывать тригонометрический материал. Каждый раздел нужно излагать сразу, вводя новые формулы и увеличивая диапазон их действия (см. „Математика в школе”, 1979, № 2, с. 21–22). Данное требование ориентирует на то, чтобы родственные вопросы излагались в завершенном виде в одном месте учебника, достаточно крупными, цельными блоками, с соблюдением единства логических и психологических критериев систематизации. Удовлетворить данному требованию не всегда бывает легко. Часто изложение родственных вопросов не может быть выполнено в одном месте учебника (при принятой системе изложения), так как приходится привлекать

иное математическое содержание, на основе которого делается возможным рассмотрение части родственных вопросов. По этой причине, например, единственность перпендикуляра, проходящего через точку, лежащую на данной прямой, доказывается в большинстве учебников в одном месте, а аналогичный факт для точки, не лежащей на данной прямой, — в другом. Или такой пример: первые два признака равенства треугольников, как правило, изучаются непосредственно друг за другом, а третий признак изучить вслед за ними нельзя; для изложения его доказательства приходится „вклинивать” целую тему, посвященную равнобедренному треугольнику. (В работе А.Б. Василевского „Обучение решению задач по математике” (Мн., Выш. шк., 1988, с. 172) предлагается изучать третий признак равенства треугольников после теорем косинусов и синусов). Перечень подобных примеров можно продолжить.

Отмеченный фактор отрицательно сказывается на качественных характеристиках логико-математической системы учебника. Нельзя сказать, что проблема укрупненного изложения родственных вопросов никогда не решалась. Наибольшие упрощения в этом направлении (в рамках традиционного изложения) достигнуты в учебнике А.П. Киселева. Однако и в нем, например, нет отдельной темы, посвященной перпендикулярности прямых. Соответствующий учебный материал (определение перпендикулярных прямых, единственность перпендикуляра, построение перпендикулярных прямых, серединный перпендикуляр отрезка, связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых) распределен по различным темам. Напомним, что в 50-х гг. журнал „Математика в школе” проводил обширную дискуссию о порядке изложения тем „Параллельность прямых” и „Треугольники”. Существенного улучшения логической структуры изложения этих тем найдено не было. Вместе с тем дискуссия показала, что в рамках традиций Начал Евклида более простой систематизации этих тем не существует. Сама логико-математическая система такова, что родственные вопросы приходится излагать на значительном расстоянии друг от друга. Причина кроется в таких факторах, определяющих логико-математическую систему, как выбор системы аксиом, математических методов изложения и т.д.

Отсутствие достаточно сильных математических методов или позднее их введение не позволяет излагать родственные вопросы в одном месте курса. Понятно, что изложение одного и того же вопроса в различных местах учебника не способствует созданию у учащихся стройной системы знаний. Ученику в таком учебнике трудно ориентироваться. Подобное расхождение логической и психологической линий в изложении учебного материала влечет за собой, как правило, повышение его структурной сложности.

2.3.2. Об изложении геометрии в интегрированных учебниках

Трудности в построении систематических учебников нередко приводят к явной педагогической крайности — полному отказу от них. В таких учебниках обычно говорится о многих вопросах математики без их систематического и в какой-либо мере полного изложения. Например, в учебнике [63] на 410 страницах излагается полный курс математики средней школы. В нем представлены векторы, геометрические преобразования, арифметика вычетов, системы счисления, алгебра матриц, булева алгебра, понятия математической логики, понятие о принципах действия ЭВМ, элементы теории вероятностей, математической статистики, элементы математического анализа. Главное внимание в этом учебнике обращено на формирование понятий. Многие вопросы излагаются концентрически. Так, понятие вектора рассматривается в восьми главах, в которых вводятся все новые и новые векторные понятия и факты. Аналогично обстоит дело с геометрическими преобразованиями. Крайне бедно представлен традиционный геометрический материал. Отказ от систематического изложения отдельных математических курсов привел к резкому снижению уровня строгости изложения. Как отмечает автор предисловия и переводчик этой книги Г.Г. Маслова: „Уровень строгости изложения материала в целом невысок. Большое место отводится чисто интуитивным догадкам и заключениям на основе несложных экспериментов. Однако авторы не стремятся к строгости изложения”. И далее: „Учебник не свободен от недостатков, иногда и весьма существенных. Отсутствие последовательного изложения материала, увлечение концентризмом безусловно приводят к нарушению целостности рассматриваемых вопросов. Рассредоточенные по различным упражнениям замечания, свойства, теоремы, нередко явно не сформулированные, вряд ли организуют знания учащихся в стройную систему”. В этом учебнике значительно повышена роль упражнений. При этом такое повышение достигнуто за счет сокращения теоретической части учебника.

Основная особенность учебников подобного направления состоит в отказе от систематических знаний, теоретические знания ограничиваются в основном уровнем представлений. Геометрия как таковая не строится, дается лишь некоторое представление о возможности ее построения. Аналогичная ситуация имеет место и в изложении остальных разделов математики. Такого рода интегрированные учебники не отвечают традициям отечественной школы (см. об этом в статье [5]), хотя и находят своих сторонников. Отказ от систематических учебников приводит иногда к предложениям строить учебник по типу книги научно-популярного жанра, например как книгу Кокстера [51].

2.3.3. О систематизации основного и вспомогательного учебного материала

Интересно выявить некоторые закономерности в систематизации основного и вспомогательного учебного материала. Обратимся, например, к учебному пособию [53]. Основным математическим методом в этом учебном пособии является метод геометрических преобразований. Это обстоятельство особенно проявляется при изложении следующих вопросов: „Конгруэнтность фигур и перемещения” (гл. II), „Параллельность и параллельный перенос” (гл. III), „Векторы” (гл. V), „Подобие” (гл. VI), „Повороты и тригонометрические функции” (гл. VII). Геометрические преобразования в этом пособии рассматриваются систематически, достаточно крупными цельными блоками. Материал, не относящийся к геометрическим преобразованиям, излагается более рассредоточенно в связи с теми или иными геометрическими преобразованиями. Проследим эту закономерность, например, при изложении вопросов о треугольниках. Очевидно, что как бы ни видоизменялся школьный курс геометрии, в нем немалое место должно уделяться геометрии треугольника. Соответствующие вопросы излагаются и в данном пособии. Посмотрим, каким образом это делается.

Определение треугольника фактически отсутствует (на с. 37 приводится более общее определение многоугольника). Как самостоятельное понятие отсутствует и понятие конгруэнтности треугольников. Авторы обходятся общим понятием конгруэнтных фигур (с. 64). Признаки конгруэнтности треугольников даны в параграфе „Перемещения” (с. 85), но доказательства с перемещениями не связаны – они просто отсутствуют. Равнобедренный треугольник рассматривается на с. 94, признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников – на с. 111, сумма углов треугольника – на с. 139, соотношения между сторонами и углами треугольника – на с. 150, средняя линия треугольника – также на с. 150, причем в теме „Четырехугольники”.

Как видно, систематизация сведений о треугольниках обладает совсем другими особенностями. Разброс в изложении этих сведений значительно больше, чем при изложении геометрических преобразований.

Естественно, что ученику труднее проследить какую-либо видимую психологическую или логическую линию в развертывании учебного материала о треугольниках. Отмеченное различие в систематизации основного и вспомогательного материала – характерное явление для школьных учебников геометрии. Безусловно, его необходимо учитывать при создании учебников, видя в нем как позитивные, так и негативные стороны. От излишнего разброса в изложении вспомогательного учебного материала можно избавиться с помощью соответствующей перестройки логико-математической системы учебника, которая обеспечивает более компактное его изложение (например, не более, чем в два этапа).

Снижению четкости в систематизации учебного материала иногда способствуют и новые темы школьного курса геометрии.

Например, в том же учебном пособии имеет место постоянное чередование геометрических преобразований и традиционного материала. Отдельные виды геометриче-

ских преобразований излагаются с повторами, в различных местах. Например, поворот вводится на с. 70, повороты и их композиции – на с. 260–267. Центральная симметрия рассматривается вначале на с. 75, а затем на с. 119 в связи с параллельностью прямых снова возвращаются к этому понятию. Идентификация понятия вектора с параллельным переносом не помешала тому, что в учебнике имеется специальный параграф „Параллельный перенос“, состоящий из 5 пунктов, и отдельная глава „Векторы“, состоящая из 7 пунктов. К тому же указанные параграф и глава отделены друг от друга тремя емкими темами: треугольники, четырехугольники, площади четырехугольников.

„Вклад” в разобщенность изложения вносят также изолированные от других темы, которые в дальнейшем остаются без применений. Эти темы целесообразно отодвигать в конец курса. В начальную и центральную части курса целесообразно помещать темы, имеющие наибольшие применения. Это позволит сделать значительную часть курса более взаимосвязанной.

Некоторые учебные руководства параллельно излагают вопросы планиметрии и стереометрии [69], отчего структурная сложность изложения усиливается.

Усложнение структуры изложения математического содержания обычно возрастает в связи с включением в учебные тексты методического аппарата (мотивировок, средств ориентации, схем алгоритмов действий, заданий для самоконтроля и т.д.). В этой связи целесообразно поставить вопрос о раздельном изложении математического содержания и некоторых элементов методического аппарата.

2.3.4. О психологической связи между определениями, теоремами и доказательствами

В работе [94] выделяются три основных вида систематизации учебного материала: *целевая, логическая и психологическая*. В процессе целевой систематизации определяется общая структура курса, последовательность тем, общий характер содержания, его логико-математические основания. В качестве критериев, на базе которых проводится целевая систематизация, выступают методические требования к построению учебника. Условно можно выделить три этапа в его конструировании. На *первом этапе* решаются самые общие вопросы систематизации, о которых только что говорилось. На этом этапе главной является целевая систематизация, однако она проводится с „оглядкой” на другие виды систематизации. Например, на основе целевой систематизации может быть определена некоторая последовательность тем. Но если эту последовательность нельзя реализовать в соответствующих логико-математических конструкциях или она вступает в противоречие с данными психологии, то такая целевая систематизация не может быть успешной. На *втором этапе* конструируется логико-математическая система учебника. Решающей здесь, безусловно, является логическая систематизация. Определенное влияние при этом оказывают целевая и психологическая систематизации. На *третьем этапе*

осуществляется доводка формально-логического изложения курса до состояния учебных материалов: определяется уровень строгости изложения, необходимый методический аппарат. На этом этапе решающей является психологическая систематизация.

Немаловажным фактором успешности применения различных видов систематизации, их сочетания является *степень вариативности логико-математической системы учебника*. Логико-математическая система, трудно поддающаяся изменениям, сковывает действие остальных видов систематизации, особенно целевой. Как отмечает М.Я. Выгодский [33, с. 8], „в школьном учебнике, особенно в учебнике для старших классов, ведущую роль играет рассуждение; фактический материал как бы подчинен логическому аппарату”. Далее, говоря о справочниках по математике, М.Я. Выгодский отмечает, что „здесь ведущую роль играет фактический материал”. Благодаря снижению в справочниках роли логической систематизации на первое место выходят целевые факторы. Именно по этой причине в справочниках, как правило, последовательность тем и их содержание существенно отличаются от одноименных характеристик школьного учебника. Систематизация в справочниках более естественная и выдержанная в психологическом отношении. В этой связи отметим, что смешанная аксиоматика обеспечивает в логическом плане большую вариативность изложения и дает возможность полнее учесть действие психологических и целевых факторов. Например, приведенная в п. 2.1.7 смешанная аксиоматика позволяет не только более концентрированно, „кучно” изложить традиционно-синтетические темы, но и использовать при необходимости элементы координатного, векторного методов, метода геометрических преобразований, элементы тригонометрии. По существу каждый из указанных методов (если это целесообразно) может быть введен в самом начале курса.

Обратимся к существующей практике конструирования учебника. Мы уже говорили, что целостность психологической линии развертывания учебного материала часто нарушается в результате того, что родственные вопросы излагаются в разных местах курса, на значительном удалении друг от друга. В практике создания учебников заметно стремление сократить по возможности указанный недостаток. Например, в учебнике Н.Н. Никитина [74] без отрыва друг от друга рассматриваются оба случая доказательства единственности перпендикуляра (с. 21–22). Точно так же, непосредственно друг за другом, рассматриваются все три признака равенства треугольника (с. 48–51). Это можно только приветствовать, но, к сожалению, средства достижения целостности психологической линии неприемлемы, ибо в жертву принесена самая минимальная логическая строгость. В первом случае доказательство как таковое отсутствует, вывод делается на основе наглядности рисунка. Во втором случае целостность обеспечивается тем, что свойства равнобедренного треугольника предшествуют всем трем признакам равенства, причем свойства равнобедренного тре-

угольника обосновываются с помощью наложения, на наглядной основе. В учебнике [53, с. 68, 83] указанные геометрические факты излагаются неразрывно, но достигнуто это за счет того, что они приводятся без доказательства. В учебнике [69] также нет разрыва в изложении признаков равенства треугольников. Достигается это принятием всех трех признаков в качестве аксиом. Такое отступление от традиции улучшило систематичность изложения. Имеются и другие попытки изменения логической системы изложения вопросов о равенстве треугольников. У Гильберта [35] в качестве аксиомы принято предложение, близкое к первому признаку равенства треугольников. В первоначальных изданиях пособия А.В. Погорелова первый признак равенства треугольников являлся аксиомой.

Наши предложения по данному вопросу таковы. В психологическом плане гильбертовское определение равенства треугольников [35, с. 71] через равенство трех соответственных сторон и трех соответственных углов не связано тесно с определением треугольника. В определении треугольника говорится только о сторонах. Положение несколько „спасает” термин „треугольник”, в котором чувствуется влияние понятия угла. Если попытаться связать равенство треугольников с равенством только трех соответственных сторон, т.е. „третий” признак равенства треугольников принять в качестве определения, то такое определение логически не только возможно, но и находится в более тесной психологической связи с определением треугольника. Главный же выигрыш состоит в другом. Если принять „третий” признак равенства треугольников (по трем сторонам) как определение, а „второй” признак (по двум сторонам и углу, заключенному между ними) – как аксиому, то придем к необычно простому и логически последовательному изложению. Тогда все три признака равенства треугольников можно рассматривать в неразрывном следовании друг за другом, а свойства равнобедренного треугольника излагать на основании признаков равенства треугольников, применяя их выборочно. В результате упрощается и изложение самих признаков равенства треугольников, и обоснование свойств равнобедренного треугольника. В данном случае признаки равенства треугольников в более полной мере проявляют себя в качестве подущего математического аппарата доказательства теорем. Эти соображения учтены нами при изложении системы аксиом, приведенной в п. 2.1.7.

2.3.5. Роль математических методов в систематизации учебного материала

Возможность изложения родственных вопросов в одном месте курса практически разрешима, если одновременно вводятся различные математические методы, достаточно мощный математический аппарат. Одновременное введение традиционно-синтетического и координатного (или коор-

динатно-векторного) методов позволяет практически приступить к построению любой темы школьного курса. В результате логико-математическая система курса ставится в меньшую зависимость от вспомогательных понятий и фактов, открывается возможность более „кучного” изложения родственных вопросов. В большинстве случаев предоставляется возможность формулировать не отдельные теоремы, а блоки родственных друг другу теорем. В п. 2.1.3 отмечались особенности нелинейной систематизации, к которой приводит применение в доказательствах математических методов. Большими рационализирующими возможностями обладает систематизация, соединяющая противоположности: линейность и нелинейность. Структура учебного материала приобретает при этом вид, указанный на рис. 2.16.

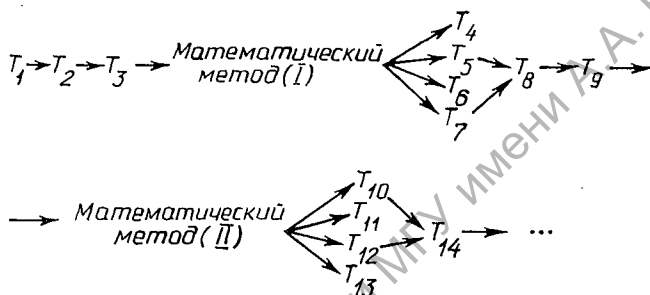


Рис. 2.16

Чтобы не быть голословными, обратимся к логической схеме курса планиметрии, приведенной в п. 2.1.7. Введение аксиом системы координат и равенства треугольников дает возможность совместного применения их при изложении первых тем курса. Особенно отчетливо это проявляется при изложении вопросов перпендикулярности и параллельности прямых. Метод равных треугольников становится ведущим при изложении признаков и свойств параллельных прямых, доказательстве теоремы Фалеса, свойств равнобедренного и равностороннего треугольников, признаков равенства прямоугольных треугольников и т.д. Если говорить о теории треугольника, то по существу она излагается единым массивом, без включения инородного материала. В этот массив входит весь материал о треугольниках, не связанный с тригонометрией. Полнота рассмотрения той или иной темы обеспечивается подключением аналитических методов. Вопросы о прямоугольном треугольнике излагаются сразу, в одном месте, включая и теорему Пифагора. (Теорема Пифагора может быть выведена, например, из координатной формулы расстояния между двумя точками, принимаемой в качестве аксиомы, или из основных свойств площади, в числе которых содержится утверждение о том, что площадь квадрата равна квадрату его стороны.) Аналитический метод в сочетании с традиционным позволяет упростить некоторые доказательства. Например, традиционно довольно сложно доказывается признак равенства прямоугольных

треугольников по гипотенузе и катету. С применением теоремы Пифагора это доказательство становится весьма простым и изящным. В самом деле, так как соответственные гипотенузы и катеты равны, то, вычисляя по теореме Пифагора в каждом треугольнике второй катет, получаем, что эти катеты также равны между собой. Поэтому данные треугольники равны (по трем сторонам). Это доказательство, на наш взгляд, демонстрирует собой подлинное „содружество” традиционно-синтетического и аналитического методов. В следующем массиве содержатся все вопросы, посвященные четырехугольникам. Сюда включаются и вопросы измерения площадей фигур. Принятие в качестве аксиомы предложения „Площадь квадрата равна квадрату его стороны” (как это сделано, например, в учебниках [69, 9]) упрощает доказательство формулы площади прямоугольника, являющейся ключевой в данной теме. Это доказательство также представляет собой хорошее сочетание традиционно-синтетического и аналитического методов. (Доказательство приведено в указанных выше учебниках.) Целое изложение вопросов теории треугольника и четырехугольника существенно улучшает систематичность всего курса. В дальнейшем роль координатного метода усиливается. Основной этап его применения относится к темам: „Элементы тригонометрии и их приложения”, „Векторы”, „Геометрические преобразования”.

2.3.6. Некоторые выводы

Сформулируем некоторые предложения, относящиеся к систематизации учебного материала.

1. Своевременное принятие нескольких математических методов позволяет на новом, более высоком качественном уровне подойти к систематизации учебного материала; усиление вариативности логико-математической системы учебника снимает ограничения, накладываемые логической систематизацией на полную и психологическую систематизации, позволяет полно учесть эти виды систематизации при построении курса; отмеченные закономерности подтверждают целесообразность применения смешанной аксиоматики, выборочного применения нескольких математических методов.

2. Родственные вопросы целесообразно излагать достаточно крупными блоками и массивами; все содержание школьного курса планиметрии можно сгруппировать в следующих темах: „Основные свойства геометрических фигур”, „Перпендикулярность и параллельность прямых”, „Треугольники”, „Четырехугольники”, „Элементы аналитической геометрии”, „Элементы тригонометрии и их приложения”, „Векторы”, „Геометрические преобразования”, „Длина окружности, площадь круга”.

3. Начальную и центральную части курса предлагается связывать с традиционно-синтетическим материалом; в этих частях обеспечивается

интенсивное применение ведущего математического метода; здесь группируется материал, в изложение которого ведущий математический метод способен внести наибольшую рационализацию; вспомогательный математический метод применяется выборочно, ограниченно, в тех случаях, в которых он оказывается более удобным.

4. К заключительной части курса предлагается относить материал, в изложении которого рационализирующая роль ведущего математического метода снижается, а вспомогательного – повышается.

3. ТРЕБОВАНИЯ К СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ МЕТОДИЧЕСКОГО АППАРАТА УЧЕБНИКА

3.1. РАЗЛИЧНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ

В отношении формы (в том числе языка, стиля) изложения учебного материала в учебнике существуют две точки зрения. Первая из них – традиционная, предполагает изложение учебного материала в краткой, конспективной форме, без развитого методического аппарата, способствующего его усвоению. Так построены многие отечественные учебники математики, например современное учебное пособие А.В. Погорелова [79]. Вторая точка зрения сформировалась несколько позднее и явилась прямым следствием демократизации образования, приобретения им всеобщего характера. Ее сторонники утверждают, что: 1) учебник не должен быть сухим конспектом, голым набором аксиом, определений, теорем и доказательств; 2) его необходимо освободить от „формально-догматической” формы изложения; 3) он должен содержать необходимый методический аппарат, способствующий изучению учебного курса. Аргументы сторонников второй тенденции представляются весьма привлекательными, однако попытки ее практического воплощения пока не только не дают ожидаемых результатов, но и часто приводят к прямо противоположным выводам. В чем дело?

Вопрос о совершенствовании формы изложения учебных текстов невозможно решить без учета функций учебника, выполняемых им в обучении. В этой связи выделяются различные типы школьного учебника: универсальный, систематический, учебник для упражнений и практических занятий, программированный учебник [119]. Каждый из указанных типов характеризуется тем или иным набором функций учебника, выражает определенную его концепцию. Выбор формы изложения учебных текстов находится в тесной зависимости от ориентации учебника на процессуальную сторону обучения, на деятельностный подход.

Многие исследователи, справедливо констатируя недостатки систематических учебников, обоснованно выдвигают принцип единства в школьном учебнике предметной и процессуальной сторон обучения. Утверждается, что не с готовых определений и правил, излагаемых индуктивным или дедуктивным способом, должны начинаться учебники, а с создания характерных проблемных ситуаций и предоставления средств для их решения. Предлагается типология учебных текстов в соответствии с методами обучения: объяснительно-иллюстративным, репродуктивным, проблемным [38]. Такой подход к построению учебных текстов в первую очередь сказывается на языке и стиле изложения. Увязывание формы изложения учебных текстов с методами обучения представляется ценным. Вызывает

сомнение лишь необходимость жесткого, категоричного увязывания. Вместе с тем говорить об ориентации, об определенной направленности учебных текстов на методы обучения необходимо. Текст учебника должен быть изложен в такой форме, которая бы позволяла учителю сохранить определенную свободу выбора метода обучения. Предлагается также некоторое усложнение функциональной нагрузки школьного учебника, увеличение доли тех структурных компонент, которые стимулируют познавательную деятельность учащихся, способствуют повышению воспитывающе-обучающей роли учебника [45].

Методистами-математиками отмечается, что логическая безупречность математического текста не обеспечивает его психологической ясности. Поэтому учебник должен содержать: 1) примеры, интуитивные описания и рассуждения, на основе которых ученик мог бы строить различные математические формализации; 2) математические тексты. С этих позиций Г.Г. Маслова [62] характеризует учебник геометрии А.П. Киселева следующими словами: „Этот учебник был предназначен для подготовки уроков дома после того, как весь материал объяснен учителем в классе. Отсюда понятна и схема изложения материала: определение (иногда без какого-либо подведения к нему), формулировка теорем и следствий из них, доказательство, иногда разбор простейших примеров... даже средний ученик с трудом мог (а иногда и не мог) без помощи учителя разобраться в материале. Но зато ученики имели возможность добросовестно выучить достаточно краткий текст учебника”. Учебник Н.Н. Никитина [74] в этой связи характеризуется как попытка приблизить учебник к ученику. Известно, что первые издания учебника геометрии А.П. Киселева сопровождалась публикацией резко отрицательных рецензий. В некоторых из них отмечалось, что этот учебник для младших школьников недоступен, а для старших — примитивен. Со временем оценка данного учебника изменялась. Р.С. Черкасов [109, с. 10] характеризует этот учебник несколько иначе: „... критики не учитывали того, что в учебнике выдержан единый стиль изложения, что позволяло каждому в старших классах или по окончании школы повторять предмет с его полным пониманием... В шестом классе учитель предлагал ученикам для самостоятельного чтения только избранные места книги. Все необходимое для усвоения предмета давалось на уроке. В выпускном классе содержание учебника нередко дополнялось доказательствами, взятыми из других учебных пособий. Такие „дополнения” никогда не осуждались инспекторскими проверками. Это нравилось и ученикам, которые могли выбрать для себя доказательства теорем, взятые из учебника, или те, которые были даны на уроке”.

Объективная оценка возможностей систематических учебников и обоснованные предложения относительно расширения их функций, бесспорно, положительно сказываются в настоящее время на совершенствовании школьных учебников. Вместе с тем полезно видеть и отрицательные последствия резкого противопоставления систематического и универсаль-

ного учебников. Такое противопоставление заметно, например, в работе [82]. Здесь отмечается, что чисто формальная сторона теории не разъясняет ее сущности. В отношении учебников математики утверждается, что даже лучшие из них страдают известным формализмом. Этот стиль учебников не только не естествен, но и противоречит самой природе математики как науки и тем более как учебного предмета. Ставится „по-новому” вопрос о том, что относится и что не относится к учебному курсу. Отмечается, что в каждый курс входят его аксиомы, определения, теоремы, доказательства и отдельные теоретические и прикладные примеры. Все остальное не включается в учебный курс. Далее отмечается, что к преподаванию курса относится его материал и все то, что способствует усвоению этого материала. Для обеспечения доступности учебников, лучшего понимания математики предлагается освещать в учебнике *идейные основы предмета*. Изложенные позиции не лишены внутренних противоречий. Так, в данной работе освещение идейных основ предмета рассматривается как средство повышения доступности учебника и в то же время признается, что „идейные основы предмета . . . , как показывает опыт преподавания, записываются на лекции, усваиваются и запоминаются с гораздо большим трудом, чем формулы” (с. 111). Действительно, включение в учебник разного рода идейных основ само по себе не гарантирует автоматического повышения доступности учебника. Эти дополнения могут быть на порядок сложнее и менее доступны, чем основной математический материал. В данной работе в качестве аргумента часто привлекается опыт заочного отделения педагогического института. В частности, отмечается роль различных методических пособий для заочников, в которых разъясняются наиболее трудные места учебной программы, более обстоятельно освещаются отдельные выкладки и т.п. Но в другом месте работы утверждается, что „эти методические пособия не помогают студентам, если они не прослушали лекции” (с. 10). Общая направленность работы [82] заметно расходится с этим фактором. Далее, на с. 150–152 сравниваются два доказательства признака параллельности прямой и плоскости. Одно – по учебнику А.П. Киселева, другое – с элементами поиска, мотивировками рассуждений. Первое занимает 11 строк, второе – 32 строки. Кроме того, необходимо учесть, что только второго варианта изложения в учебнике недостаточно. Требуется краткое изложение этого доказательства. Поэтому придется добавить еще те 11 строк, которые приводятся в учебнике А.П. Киселева. Объем при этом составит 43 строки. В итоге происходит четырехкратное увеличение объема. Как видно, чрезмерная ориентация школьного учебника на такое изложение способна лишь усложнить проблему перегрузки учебников и учащихся. В анализируемой работе дается развернутая критика систематических учебников и отмечаются только положительные стороны универсального учебника. По существу в данной работе не признается наличие недостатков у универсального учебника. Не исследована мера отражения концепции универсального учебника в практике конструи-

рования школьного учебника математики. В целом указанная работа освещает этот безусловно важный вопрос несколько односторонне.

Многие исследователи подходят к определению *функций учебника* с иных позиций [111, 32, 99, 56, 57]. Говоря о необходимости обеспечения единства теоретического познания и практической деятельности учащихся, они отмечают, что это положение касается не столько учебника, сколько избираемой учителем методики обучения [32]. Единство требований, предъявляемых к учебно-воспитательному процессу и учебнику, не означает их фактического совпадения и по содержанию, и по структуре, их взаимного дублирования. Наоборот, учитывая, что первичная учебная работа проведена на уроке, автор учебника может избрать более высокий уровень изложения, отвечающий дедуктивному характеру математической науки. В этой связи отмечается, что проблемный подход не всегда оправдан в учебниках, для них важнее логическая линия систематического изложения программного материала.

Многие авторы считают, что учебник, как бы хорошо он ни был написан, не может решить всех задач обучения. Наилучшим образом он выполняет свою функцию тогда, когда оснащен целым набором различных дополнительных книг и пособий. Учебник рассматривается как *один из элементов учебного курса* [56, 57, 111]. Отмечается, что учебник приобретает системное качество и теряет при этом что-то из своих характеристик, которые ему были присущи в прошлом, когда он выступал в качестве универсального средства. Указывается, что в дальнейшем функции учебника все больше будут распределяться между другими элементами учебного курса: пособиями, справочниками, словарями, сборниками самостоятельных и контрольных работ и т.д. Следует отметить, что идея такого курса в методике преподавания математики известна давно. Существуют и примеры реализации этой идеи. М.Я. Выгодский, говоря о своем справочнике, отмечает: „Мысль о том, что по справочнику можно учиться, способна вызывать сомнения. Однако, судя по многочисленным письмам, подавляющее большинство читателей успешно пользовались справочником именно для этой цели” [33, с. 8]. В школьном учебнике фактический материал как бы „тонет” среди доказательств. В справочнике же он предельно обнажен. Далее М.Я. Выгодский указывает, каким образом работа со справочником должна дополняться другими учебными книгами. Заметим, что справочник М.Я. Выгодского не „эпизод” в методике математики. Выдержав 27 изданий, он пользуется популярностью у учителей и учащихся и в настоящее время.

Упрочению точки зрения на учебник как на один из элементов учебного курса способствует и практика разработки и издания научно-популярной литературы для учащихся. В этом плане особый интерес вызывает литература, которая в научно-популярном жанре представляет все основное содержание школьного курса. Примером такой литературы может служить „Энциклопедический словарь юного математика” [116]. Конечно, в учеб-

нике также должны содержаться определенный исторический материал, автобиографические сведения, занимательные задачи и т.д. Однако (и это важно иметь в виду) возможности учебника здесь весьма ограничены, а излишний его „уклон” в направлении популяризации может иметь нежелательные последствия. Учебник, по-видимому, в первую очередь должен выполнять координирующую роль: включать в себя краткие дополнения подобного рода и список вспомогательной учебной литературы для более подробного ознакомления с ними.

В работе [73] приводятся доводы в пользу краткого учебника. Отмечается, что его создание — дело новое. Психологами [98] признается, что в учебнике не могут быть реализованы все условия оптимального представления содержания, так как невозможно учесть, в каком состоянии находятся предварительные знания и умения у отдельных учеников. Учебник как носитель содержания должен дополняться учителем. Говоря об обеспечении мотивов обучения, отмечают, что не во всех случаях, не по всем учебным предметам целесообразно вводить их с помощью описательных текстов в учебнике. Ряд авторов [95, 110] указывают негативные стороны многословности, повторения одних и тех же истин в учебнике: даже весьма занимательные факты, помещенные в учебнике без крайней необходимости, не улучшают, а, напротив, затрудняют понимание и усвоение сущности темы. О необходимости разгрузки учебника за счет других средств обучения говорится в работах [108, 111, 32] и др.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что *конспективная форма* по-прежнему должна занимать определенное место в школьном учебнике.

Обычно под конспектом понимают краткую запись какого-либо текста, лекции или доклада, но такое толкование конспекта крайне неполное. В Педагогическом словаре (М., 1960, с. 552) дается такое определение: „Учебный конспект — связное, сжатое и последовательное письменное изложение усваиваемого содержания, одна из важнейших форм учебных записей... Учебный конспект состоит из трех основных элементов: плана, тезисов основных мыслей конспектируемого источника и фактического материала. Для подтверждения основной мысли приводятся один-два наиболее ярких факта”. Из данного определения видно, что конспективное изложение — это не только краткость. Поэтому правильное острие критики направлять не против конспективности в учебниках вообще, а против „укороченных” ее вариантов, когда в учебниках не дается ни планов изложения, ни тезисов, относящихся к процессу мышления, ни ярких примеров, запоминающихся учащимся.

3.2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТОДИЧЕСКОГО АППАРАТА В УЧЕБНИКЕ

Вопрос о форме изложения учебных текстов не может решаться без учета реальных условий практики обучения, которые, к сожалению, все

еще свидетельствуют о перегрузке учебников и соответственно учащихся. В должной мере необходимо учитывать общий объем учебного материала, количество часов, отводимых на его изучение. Существующая перегрузка учебников фактическим материалом и, более всего, громоздкость логики математической системы учебников геометрии приводят к тому, что включение методического аппарата обостряет проблему перегрузки учебника. Систематическое включение методического аппарата в учебник можно рекомендовать при условии нормализации нагрузки учебника, которую мы связываем с построением учебника, обеспечивающим выделение $1/3$ учебного времени на изучение теоретического материала и $2/3$ — на решение задач. Заметим, что „систематическое включение” методического аппарата в учебник не означает, что этот аппарат должен приводиться по поводу каждого элемента учебного материала, без всякого разбора. В этом случае мы пришли бы к многословности и повторениям, о вреде которых говорилось выше. Методический аппарат должен привлекаться только для материала, вызывающего у учащихся определенные затруднения. Поэтому систематическое включение методического аппарата в учебник должно быть дискретным и осуществляться на основе тщательного анализа наиболее подходящих мест его локализации.

Другая причина, затрудняющая размещение методического аппарата в учебнике, состоит в том, что изложение, в котором одновременно присутствует математический материал и методический аппарат к нему, создает для учащихся дополнительные трудности. Особенно эти трудности проявляются в начале изучения курса, в VII классе. В этом классе дети еще только знакомятся с систематическим применением дедуктивных доказательств, их сущностью. Ученик часто оказывается не способным различать, с чем он имеет дело. И доказательство, и пояснение к нему еще хуже — апелляция к рисунку он воспринимает рядоположенно, свидетельствует о потере смысла изучаемого. Подобные соображения привели нас к необходимости раздельного изложения математического содержания и отдельных элементов методического аппарата. Прежде всего это относится к тем элементам методического аппарата, которые в доизмененной форме дублируют содержание основного учебного текста: краткой записи условия и заключения теоремы, таблицам, схемам, планам доказательства и т.д.

Были рассмотрены различные способы такого разделения. Вначале излагался математический материал вместе с методическим аппаратом без обособления их друг от друга (первая часть учебника), а затем — краткий конспект-справочник, включающий в сжатом виде математическое содержание (вторая часть учебника). Мы убедились, что такая форма изложения наряду с некоторыми достоинствами обладает одним существенным недостатком. Трудно избежать дублирования: математическое содержание приходится излагать дважды, в каждой части учебника, что фактически приводит к утроению, а то и к учетверению его общего объема.

Отмеченный способ приводит к соединению двух учебников в единую книгу. Целесообразность такого соединения зависит от того, насколько систематично в справочнике-конспекте излагается теоретический материал. Если справочник-конспект содержит теоретический материал не в полном объеме, выборочно и не приводит к значительному увеличению объема учебника, то такое разделение вполне оправданно. В данном случае справочник-конспект, не являясь систематическим изложением теоретического материала, превращается в дополнительную составную часть методического аппарата учебника. В практике конструирования учебников справочник-конспект обычно „вырождается” в небольшие по объему приложения. Например, в приложениях к учебнику [36] приводятся латинский алфавит, таблица наиболее употребительных метрических мер, правила действия над приближенными значениями величин, формулы тригонометрии, геометрические формулы, таблица значений тригонометрических функций, таблицы квадратных и кубических корней. В пробном учебнике [9] в приложениях приводятся исторические сведения о развитии геометрии, примеры оформления доказательств теорем и решений задач. В учебнике [53] в приложениях приводятся сведения о логическом строении геометрии, полный список аксиом, формулы геометрии, сведения о языке теории множеств в геометрии, формулы тригонометрии, греческий алфавит, перечень обозначений, предметный указатель. В практике создания учебников не встречается тип учебника, в котором бы вначале в систематическом виде излагался математический материал вместе с методическим аппаратом, без их разделения, а затем только математический материал в конспективном виде. (Возможное объяснение данного явления приведено выше.) Разделение же этих частей на уровне двух самостоятельных учебных пособий не является редкостью и в практике известно давно. (Достаточно вспомнить, что наряду с учебниками А.П. Киселева, Н.Н. Никитина и др. широко использовались справочники М.Я. Выгодского [33], А.А. Рывкина, А.З. Рывкина, Л.С. Хренова. В последнее время вышел в свет „Энциклопедический словарь юного математика” [114].)

Второй способ разделения математического содержания и методического аппарата состоит в том, что методический аппарат приводится одновременно с изложением математического содержания, например в виде *параллельной колонки*. Для этого книжная страница делится на две колонки: левую и правую. В правой излагается математическое содержание, в левой — методический аппарат. Этот способ освобождает от нежелательного дублирования математического содержания и вместе с тем чрезвычайно просто решает задачу разграничения указанных составных частей. К сожалению, двухколоночное изложение в практике создания учебников не нашло еще должного применения. Оно (без отделения методического аппарата) традиционно применяется в энциклопедиях и словарях. В пользу такого изложения говорят и исследования некоторых физиологов. По их данным, угол зрения, соответствующий строке на всю книжную

страницу, превышает физиологические возможности детского глаза, что ведет к развитию косоглазия.

Наличие в учебнике методического аппарата не означает, что математический материал должен излагаться в чрезмерно конспективной форме. Некоторые элементы методического аппарата могут быть настолько органично связаны с математическим материалом, что отделение их пойдет не на пользу учебнику. Чем больше таких элементов в учебнике, тем меньше потребность в методическом аппарате, приводимом отдельно с основным текстом.

Отметим также, что изложение методического аппарата в виде параллельной колонки к математическому содержанию не является единственной формой их разграничения. Возможно линейное изложение, в котором методический аппарат выделяется с помощью слов-указателей: „Примечание“, „Замечание“, „Дополнение“ и т.п.

Каждая из форм представления в учебнике методического аппарата имеет свои плюсы и минусы. Поэтому правильнее ориентироваться не на одну какую-либо форму, а на сочетание их.

Методический аппарат окажет учащимся помощь при условии, если учащиеся знают, как этот аппарат устроен и умеют им пользоваться. Это требует определенных разъяснений со стороны учителя. В противном случае методический аппарат может оказаться бесполезным или, еще хуже, сыграть отрицательную роль.

Отсутствие методического аппарата или недостаточность его в учебнике вынуждает преподавателя порой к „стихийному“ его созданию. Например, известный русский математик В.П. Ермаков детализированное изложение какого-либо раздела заключал его кратким конспектом: „... легче припомнить процесс мышления, чем голые формулы. Да и нет надобности помнить целиком весь процесс мышления, достаточно наметить этапные пункты, по которым должна идти мысль... Прочитавши какой-нибудь отдел из аналитической геометрии, я излагаю студентам конспект, в котором без формул намечаю главные пункты мышления“ [46, с. 7]. Далее В.П. Ермаков отмечает, что „указанный принцип должен быть применен и в средней школе“. Нетрудно заметить, что предлагаемый В.П. Ермаковым конспект представляет собой своеобразный методический аппарат, дополняющий формально-логическое изложение. Наличие такого аппарата в учебнике, конечно, значительно облегчило бы использование идеи В.П. Ермакова в практике обучения. Недостаточность методического аппарата в учебниках приводит и к „свежим“ примерам его „стихийного“ создания. Именно этим мы объясняем появление в опыте донецкого учителя В.Ф. Шаталова „опорных конспектов“.

Форма изложения учебного текста во многом зависит от *стиля изложения*. Высокие научно-педагогические качества учебного текста обеспечиваются ясностью, точностью и разнообразием стиля. „Достоинство стиля, — отмечал еще Аристотель, — заключается в ясности: доказательством этого

служит то, что раз речь не ясна, она не достигает своей цели". Ясность стиля обеспечивается употреблением понятных слов, разъяснением новых терминов, правильным построением предложений, исключением громоздких словесных конструкций. Точность стиля обеспечивается применением научной терминологии, исключающей неоднозначность толкования текста. Точности способствуют краткость, обеспечение полного соответствия слов выражаемым мыслям. Краткость текста – результат исключения из него лишних слов. Можно считать, что она достигнута, если дальнейшее исключение каких-либо слов приводит к разрушению передаваемой информации. Сокращение текста особенно необходимо, если оно устраняет второстепенные детали и несущественные подробности, отвлекающие ученика и уводящие его в сторону. Важно при этом не потерять чувство меры, так как не только лишние слова, но и недостаток некоторых необходимых слов одинаково могут ослабить „рельефное” выражение мысли.

В учебнике требуется определенное разнообразие стиля. Однообразие, повторение одних и тех же оборотов речи притупляет внимание учащихся. Основу стиля учебника составляет научно-популярный стиль. В отдельных текстах может преобладать та или другая сторона научно-популярного стиля. При изложении учебного материала в готовом виде (приведение формулировок математических предложений, рассмотрение доказательств) преобладающим является научный стиль, при изложении, например, текстов исторического содержания – популярный стиль. Оба эти стиля одинаково важны для текстов, в которых сведения не сообщаются в готовом виде, а демонстрируется процесс учебно-исследовательского поиска этих сведений. Форма изложения текстов должна показывать движение мысли человека, обеспечивать видение математических проблем, по возможности исключать рецептурность, авторитарность и догматичность. Стиль популярного изложения не должен переходить в примитивизм. Необходимо подводить ученика к глубокой мысли, исходя из самых простых и общеизвестных данных, указывая при помощи несложных рассуждений или удачно выбранных примеров главные выводы из этих данных, наталкивая мысль ученика на дальнейшие и дальнейшие вопросы. В определенной мере учебник должен выступать в качестве собеседника ученика, содержать „наметки” диалога, непосредственные обращения к ученику и т.п.

3.3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ МЕТОДИЧЕСКОГО АППАРАТА

Главная задача состоит в том, чтобы методический аппарат помогал организации развивающего обучения, ориентировал учащихся не на заучивание готового материала, а на активизацию их мышления. *Компонентами умственного развития*, как считают психологи (см. [47]), являются, во-первых, *фонд действенных знаний* (сознательный характер их приобретения

и оперирования ими), во-вторых, *обучаемость школьника* – совокупность качеств ума, определяющих продуктивность учебной деятельности (глубина ума, его гибкость, устойчивость, осознанность мыслительной деятельности, экономичность мышления). *Развивающее обучение* – это такое обучение, которое направлено на обогащение у учащихся фонда действенных знаний и взаимосвязанное с ним формирование положительных качеств ума [47, с. 13].

Значительную часть теоретического материала учебника составляют доказательства теорем. Повышению сознательности их усвоения может помочь использование *принципа варьирования формы изложения доказательств*. Доказательство может представлять собой цепочку рассуждений, конечную последовательность предложений, иметь вид таблицы с колонками „Предложения” и „На основании” или наглядно-графической схемы с использованием логико-математической символики и приемов структуризации. Возможно применение синтетического метода с использованием ряда приемов: краткой записи теоремы, формулирования общего замысла доказательства, составления плана доказательства, мотивации дополнительных построений и хода рассуждений. При изложении доказательств целесообразно использовать аналитический метод (анализ Паппа), часть доказательств может быть изложена в поисковой манере, без „навешивания” их в готовом виде.

Проблемность является основным принципом развивающего обучения. Поэтому учебник в определенной мере должен содержать „наметки” проблемного подхода.

Требуют усиления такие элементы методического аппарата, которые вызывают произвольное внимание, интерес, желание работать с учебником, например необычный рисунок, неожиданный вопрос, новизна установки, контрастное сравнение и т.д. Важно уже название параграфа, с которого начинается каждый учебный текст. В целях возбуждения интереса некоторые параграфы полезно озаглавить в виде *вопросов*. Например, возможны такие названия параграфов: „Что изучает геометрия”, „Как можно охарактеризовать перпендикулярность прямых с помощью расстояния”, „Как можно охарактеризовать перпендикулярность прямых при помощи координат”, „Как равенство треугольников помогает установить параллельность прямых”, „Как связаны друг с другом перпендикулярность и параллельность прямых”, „Есть ли связь между равенством отрезков и параллельностью прямых”, „Чему равна сумма углов треугольника”, „Как понимать равенство произвольных фигур”, „Что такое длина окружности”, „Что такое площадь круга”, „Какие замечательные точки существуют в треугольнике”, „Зачем нужны координаты” и т.д. Если название параграфа сформулировано не в форме вопроса, то в вопросительной форме может быть построено первое предложение параграфа. С помощью первых предложений может осуществляться постановка целей изучения, мотивация рассмотрения тех или иных вопросов.

Значительную часть методического аппарата геометрического учебника составляют рисунки. Они приводятся при изучении понятий, фактов, доказательств, решении задач. Рисунок помогает воспринимать, осознавать новый материал. Часто приемы работы школьника не выходят за рамки простой его созерцательности. Привлечь ученика к более активным формам работы с рисунком помогает такой простой прием, как снабжение его небольшим *подрисуночным текстом*, в котором сообщается, что изображено на рисунке и, самое главное, в связи с этим рисунком ставится определенное задание. Например, при введении понятия накрест лежащих углов можно в подрисуночном тексте не только сообщить, что такие-то углы являются накрест лежащими, но и поставить вопрос „почему?”. Благодаря этому первые шаги в изучении данного понятия будут начинаться не с заучивания формулировки определения, а с наглядно-образного осмысления этого понятия (благодаря варьированию рисунка), проводимого на основе мышления: требуется ведь не только увидеть на рисунках накрест лежащие углы, но и дать соответствующее объяснение. Именно на такие формы активизации мыслительной деятельности, доступные всем учащимся, должен быть прежде всего ориентирован методический аппарат.

Определенную часть методического аппарата составляют *проблемные вопросы*. Например, параграф „Координаты середины отрезка” в пособии [79] начинается такими словами: „Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — две произвольные точки и $C(x; y)$ — середина отрезка AB . Найдем связь между координатами точки C и координатами точек A и B ”. Далее излагаются рассуждения, приводящие к искомым формулам. На уроке замысел учебника, конечно, может быть углублен, в учебнике же достаточно ограничиться указанными двумя предложениями. Такими наметками проблемного подхода учебник делает свой вклад в развивающее обучение. Заметим, что применение этого приема не приводит к увеличению его объема или структурному усложнению.

Как отмечалось, значительное место в теоретической части учебника занимают доказательства теорем. Осознание доказательств, способов рассуждений, предупреждение формального заучивания их — основные цели, достижение которых должен обеспечить методический аппарат. Одним из элементов такого методического аппарата является приведение в учебнике формулировок *идеи доказательства, его общего замысла*. По возможности эта идея должна формулироваться одним-двумя предложениями. С аналогичной целью необходимо приводить и *планы доказательств*. В ряде случаев, если методический аппарат содержит достаточно полный набор элементов (например, рисунок, краткую запись „дано — доказать”, формулировку идеи доказательства, план доказательства), его целесообразно помещать в виде колонки, параллельной основному математическому материалу.

Определенную помощь методический аппарат может оказать в обучении учащихся поиску доказательств. Доказательства в учебниках обычно

излагаются синтетическим методом (рассуждают в направлении от условия к заключению теоремы), причем в настолько свернутом виде, что черты процесса поиска полностью утрачиваются. Внесение в доказательство элементов *анализа через синтез* способно повысить развивающие качества учебника. Как уже отмечалось, учебник не может позволить себе каких-либо „длиннот“. Поэтому элементы поиска достаточно ограничить узловыми моментами доказательства, до которых ученику самому трудно додуматься. Возможно параллельное изложение: в основном тексте доказательство излагается синтетическим методом, в методическом аппарате – с помощью „анализа через синтез“. Ценным подспорьем в овладении навыками поиска доказательства могут служить *анализ Паппа* и *анализ Евклида*. Примеры анализа Паппа и Евклида уместно приводить также в виде параллельной колонки к основному тексту. Указанные приемы хорошо известны в методике математики, но до школьных учебников они еще не дошли.

Генетический подход возможен не только к отдельным элементам учебного материала. Его можно применять и при изложении некоторых целостных фрагментов теории. Предположим, необходимо изучить некоторую геометрическую фигуру. Для этого приводится ее рисунок и по нему называется ряд свойств данной фигуры. Далее выясняется, можно ли с помощью первого свойства доказать остальные. Если это невозможно, то к первому свойству добавляется второе и выясняется, можно ли на основании первых двух свойств доказать остальные и т.д. По завершении указанной процедуры устанавливается, какие свойства можно использовать для определения данной фигуры, а какие необходимо сформулировать как теоремы.

Стимулировать мышление учащихся можно различными приемами. Это возможно и в тех случаях, когда речь идет о более прочном *запоминании учебного материала*. И здесь развивающий эффект повышается, если работа мышления опережает работу памяти.

Предположим, что речь идет о формуле Герона. Формула необычайно довольно сложная, не сразу усваивается. Можно попробовать запомнить ее механически, но механическая память ненадежна. Эта формула запоминается легче и прочнее, если в учебнике привести краткий текст следующего содержания: „В чем состоят особенности формулы Герона. Во-первых, она выражает площадь треугольника через три его стороны. Во-вторых, площадь представляется как квадратный корень. В-третьих, под корнем находятся четыре сомножителя. Это не случайно. Ведь площадь измеряется в квадратных единицах. Чтобы после извлечения квадратного корня получилась величина, измеряемая в квадратных единицах, необходимо, чтобы под корнем было произведение четырех линейных множителей“. Такой анализ характера этой формулы, ее строения много места не займет. Но после этого ученик вряд ли запишет под корнем три множителя.

Еще одно направление совершенствования методического аппарата связано с использованием различных задач (*дидактических, обучающих, развивающих и т.д.*).

Одной из необходимых составных частей методического аппарата являются творческие задания (задачи). Поясним прежде всего, какие задания мы относим к творческим. В зависимости от наличия или отсутствия общего метода решения задачи делятся на *стандартные и нестандартные*. Стандартные задачи в свою очередь можно разделить на *шаблонные и нешаблонные* в зависимости от того, известен или не известен учащимся метод решения. Нестандартные и нешаблонные задачи, с точки зрения их развивающей функции, равноценны. Это дает нам основание для объединения их в одну группу *творческих задач*. Конечно, задача является творческой не в силу каких-либо формальных ее признаков, она становится творческой, если таковой окажется для ученика. Многое здесь зависит от методики, которой пользуется учитель, посильный вклад должен вносить и учебник. Отметим ряд *требований к творческим заданиям*:

1) они должны быть ориентированными по возможности на всех учащихся, простыми, посильными и вместе с тем стимулирующими наблюдательность, догадку, обращение к анализу, синтезу, сравнению, аналогии, индукции, конкретизации, обобщению и т.д.;

2) они должны быть тесно связаны с основным учебным материалом, что поможет, на наш взгляд, разрушить существующую на практике „китайскую стену“ между обучением и развитием учащихся;

3) целесообразно подбирать блоки родственных заданий, объединенных одной какой-либо математической идеей или проблемой; каждая задача из такой серии „высвечивает“ отдельную грань исследуемой проблемы, сама же серия позволяет углубленно изучить проблему в целом; необходимо учащимся явно сообщать проблему, в связи с которой приводится группа заданий (задач); проблему нужно формулировать по возможности в краткой, выразительной форме, способной заинтересовать учащихся и нацелить их на работу;

4) развивающий эффект дает не столько та или иная отдельная задача, сколько вся серия целиком; поэтому их нельзя решать вразброс, перекакивая через те или иные задачи.

Приведем *примеры формулирования учебных проблем*: „Как уравнения помогают решать геометрические задачи?“, „Как вычисления (измерения, построения) подсказывают геометрическую закономерность?“, „Сколько данных должно быть в задаче?“, „Всегда ли выручает аналогия?“, „Все ли возможные случаи рассмотрены?“, „Сколько решений имеет задача?“, „Как найти...?“, „Нельзя ли обобщить задачу?“, „Нельзя ли конкретизировать задачу?“, „Нельзя ли применить результат данной задачи в других ситуациях?“, „Нельзя ли решить задачу иначе?“, „Какую задачу можно составить?“ и др. Особое внимание необходимо уделить составлению задач самими учащимися.

Учебные проблемы, вокруг которых группируются задачи, условно можно разделить на следующие пять групп.

Проблемы первой группы делают акцент на развитии геометрической наблюдательности и интуиции: „Что подсказывает рисунок?“, „Все ли правильно изображено на рисунке?“, „Правильно ли на рисунке указаны величины углов?“, „Какие геометрические закономерности можно заметить?“, „Какой вид имеет треугольник (четыреугольник)?“, „Как располагаются две прямые относительно друг друга?“, „Какие геометрические неравенства можно установить для прямоугольного (произвольного) треугольника?“, „В каких границах изменяется отрезок (угол, площадь)?“, „Где лежит центр окружности?“ и др.

Проблемы второй группы ориентируют учащихся на составление задач: „Какие задачи можно составить по данному рисунку?“, „Верны ли следующие утверждения?“, „Какие новые формулы можно вывести?“, „Справедливо ли обратное предложение?“, „Сколько данных должно быть в задаче?“, „Достаточно ли данных для решения задачи?“, „Нет ли в задаче лишних данных?“, „Можно ли сформулировать другие признаки (свойства)?“, „Можно ли обобщить задачу?“, „Можно ли конкретизировать задачу?“, „Какие задачи можно составить для равностороннего (равнобедренного, прямоугольного) треугольника, вписанного в окружность?“ и др.

Проблемы третьей группы ориентируют на овладение эвристическими приемами решения задач: „Какие дополнительные построения необходимо выполнить?“, „Как искать решение задачи?“, „Как составить план решения задачи?“, „В чем состоит общий замысел решения задачи?“, „Как проверить правильность решения задачи?“, „Есть ли ошибка в следующих рассуждениях?“, „Какие теоретические сведения необходимо применить при решении данных задач?“, „Все ли возможные случаи рассмотрены?“, „Сколько решений имеет задача?“, „Все ли данные использованы при решении задачи?“, „Как алгебра помогает решать геометрические задачи?“, „Как вычисления подсказывают геометрическую закономерность?“, „Как векторы применяются при решении задач?“, „Как координаты используются при решении задач?“, „Как геометрические преобразования применяются при решении задач?“, „Какие способы решения задачи возможны?“ и др.

Проблемы четвертой группы объединяют геометрические задачи с четко выраженной познавательной функцией: „Как построить равновеликие фигуры?“, „Как измеряется вписанный угол?“, „Что такое расстояние от точки до прямой?“, „Какое преобразование дает последовательное выполнение двух данных преобразований?“ и др.

Проблемы пятой группы непосредственно ориентируют учащихся на выдвижение и формулирование учебно-исследовательских проблем. Перечислим наиболее характерные из них: 1) к группе задач приводится несколько вопросов, являющихся „кандидатами“ на роль учебных проблем, требуется (это требование и составляет содержание проблемы, относящейся

к пятой группе) выбрать из них такие, под углом зрения которых целесообразно рассматривать данные задачи и их решения; 2) дана некоторая учебная проблема и достаточно широкий набор математических задач; требуется выделить из этого набора задач такие, решение которых целесообразно рассматривать под углом зрения данной проблемы; 3) дана группа задач; требуется сформулировать к этой группе задач соответствующую проблему; 4) задачи и проблемы в готовом виде не даются; приводится лишь некоторая математическая ситуация, изучение которой может привести к выдвижению некоторых учебных проблем и соответствующих наборов задач; требуется сформулировать учебную проблему и составить задачи.

Можно рекомендовать три подхода использования творческих заданий в школьном курсе: первый – творческие задания распределяются по всей системе задач в виде отдельных, своего рода „проблемных островков”; второй – творческие задания составляют большую часть всей системы задач школьного курса; третий – представляет собой комбинацию двух первых (начинают с первого подхода, затем постепенно усиливая его, переходят ко второму). Реализация каждого из этих подходов способна существенно перестроить обучение геометрии.

Усиление развивающей функции системы задач можно осуществить двумя путями: 1) к системе задач, составляющих обязательный минимум для всех учащихся, добавляются наборы дополнительных задач повышенной трудности. Осуществить такой путь сравнительно несложно, но из всех возможных он является менее эффективным; 2) осуществляется не за счет пристройки к основному задачному массиву небольших порций дополнительных задач, а путем радикальной перестройки всей системы задач. Первый путь удобно реализовать в учебниках, совмещающих общекультурный и повышенный курсы, второй – в отдельных учебниках. В этих целях желательно воспользоваться модульным принципом конструирования учебного курса. Учебный курс представляется двумя основными модулями: собственно учебник, содержащий только теоретический материал, и отдельный задачник. Учебник может совмещать общекультурный и повышенный уровни, а задачники для каждого из этих уровней строятся отдельно. Стыкуя учебник с задачником общекультурного уровня, получаем учебный курс общекультурного уровня, а стыкуя тот же учебник с задачником повышенного уровня, получаем повышенный курс. Варьируя дидактические характеристики учебника и задачника и прибегая к различным вариантам их стыковки, можно получить различные общекультурные и повышенные курсы. Главное же состоит в том, что такую стыковку может выполнить сам учитель с учетом особенностей своего класса.

Приведем некоторые примеры конструирования задачника повышенного уровня. Формирование системы задач в приводимых ниже фрагментах ведется путем усиления представительства творческих заданий.

Фрагмент 1. Тема „Смежные углы” (VII класс)

Проблема 1. Как уравнения помогают решать геометрические задачи?

1. По рис. 3.1 составьте задачу, в которой бы требовалось найти величины смежных углов. Решите ее.

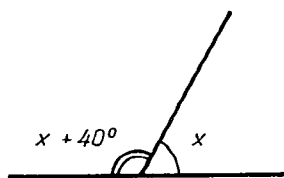


Рис. 3.1

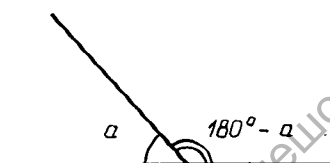


Рис. 3.2

2. Составьте задачу на нахождение величин смежных углов, которая бы сводилась к решению уравнения $x + (x - 20^\circ) = 180^\circ$. Решите ее.

3. Составьте задачу на нахождение величин смежных углов, которая бы сводилась к решению уравнения $x + 5x = 180^\circ$. Решите ее.

Проблема 2. Как вычисления подсказывают геометрическую закономерность?

4. Смежные углы равны a и $180^\circ - a$ (рис. 3.2). Над этими величинами выполнили следующие действия: 1) $a/2$; 2) $(180^\circ - a)/2$; 3) $a/2 + (180^\circ - a)/2 = a/2 + 90^\circ - a/2 = 90^\circ$. Получили некоторый угол, равный 90° . Чт это за угол? Нарисуйте его (см. рис. 3.2). Какую геометрическую закономерность вы заметили? Сформулируйте ее.

Проблема 3. Сколько данных должно быть в задаче?

5. Один из смежных углов больше другого на 60° . Известно также что он в 2 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишние данные? Составьте задачу без лишних данных (возможны различные варианты). Решите ее.

6. Один из смежных углов больше другого на 60° . Известно еще, что он в 3 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишние данные? Не противоречат ли данные друг другу? Составьте задачу, не имеющую указанных недостатков (возможны различные варианты). Решите ее.

7. Один из смежных углов больше другого. Найдите эти углы. Достаточно ли данных для решения задачи? Дополните условие задачи и решите ее.

Проблема 4. Всегда ли выручает аналогия?

8. Один из смежных углов увеличился на 35° (уменьшился на 10°). Как изменится второй угол?

9. Один из смежных углов увеличился в 3 раза (уменьшился в 2 раза). Как изменится второй угол?

Проблема 5. Нельзя ли решить задачу различными способами?

10. Один из смежных углов больше другого на 40° . Найдите эти углы.

Прокомментируем эти задания. Во-первых, они вполне отвечают сформулированным требованиям о доступности и тесной связи с основным учебным материалом. Во-вторых, налицо определенный творческий потенциал этих задач. Особенно заинтересовывают учащихся задания на составление задач. Для большинства учащихся сама мысль о том, что они могут составить задачу самостоятельно, является настоящим открытием, своего рода „первотолчком“, пробуждающим творческие начала ученика. Отметим дополнительные особенности приведенных заданий. В заданиях 1–4 информация представлена в алгебраической форме. Составление задачи предполагает при этом выполнение геометрической интерпретации алгебраических выражений (в задании 1), уравнений (в заданиях 2, 3), арифметических действий (в задании 4), что представляет собой одно из наиболее ценных качеств геометрического мышления. Задания 5–7 знакомят с техникой составления задач. Раскрытие некоторых простых „секретов“ помогает учащимся более осознанно конструировать задачу, видеть ее структуру, зависимости между величинами. Выполняя, например, задание 5, учащиеся обращают внимание, что смежные углы могут быть найдены уже на основе первого из условий задачи, значит, второе условие – избыточное. После этого конструируется задача без лишних данных. При этом учащиеся замечают возможность формулирования еще одной задачи (путем использования второго условия). Задания 8–9 предусматривают проведение небольшого индуктивного исследования. Первоначально (по аналогии с ответом к заданию 8), учащиеся склонны считать, что если один из смежных углов увеличится, например, в 3 раза, то другой угол уменьшится во столько же раз. Вычисления показывают, что такое предположение неверно. Это приводит учащихся к необходимости более тщательной проверки предположений, возникающих на основании аналогии. При решении задачи 10 могут быть рассмотрены четыре способа: первые два основываются на применении уравнения (в зависимости от того, какой из двух искомых углов будет обозначен через x), а остальные могут быть арифметическими (один раз найти удвоенный меньший угол, другой раз – удвоенный больший угол).

Фрагмент 2. Тема „Площади четырехугольников“ (VIII класс)

Проблема 1. Какие основные свойства площади используются при решении следующих задач?

1. Начертите произвольный квадрат. Пусть его площадь равна 16. Постройте единичный квадрат.

2. Площадь квадрата равна 36 м^2 . Найдите его сторону.

3. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 8.

4. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

5. Разбейте параллелограмм на две части, из которых можно сложить равновеликий прямоугольник.

6. Разрежьте треугольник на две части, из которых можно сложить равновеликий параллелограмм.

7. Разрежьте трапецию на две части, из которых можно сложить равновеликий треугольник.

8. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 10 раз?

Проблема 2. Какие сведения необходимы для решения следующих задач?

9. Стороны прямоугольника равны 31 и 4. Найдите сторону равновеликого ему квадрата.

10. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а площадь его равна 144 м^2 .

11. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 24 см, а площадь равна 27 см^2 .

12. Прямоугольный участок земли содержит 100 га, длина участка 8 км. Найдите длину границы участка.

13. Человек нажимает сверху на лопату с силой 600 Н. Какое давление оказывает лопата на почву, если ширина лопаты 20 см, а толщина режущего края 0,5 мм?

14. Найдите площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними: а) a , b , 30° ; б) a , b , 60° .

15. Сторона ромба равна a , один из его углов равен 60° . Найдите площадь ромба.

16. Высоты параллелограмма равны 10 и 15, периметр равен 50. Найдите площадь параллелограмма.

17. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12, а меньшая диагональ 13.

Проблема 3. Какие новые формулы можно установить?

18. Найдите формулу, выражающую площадь равнобедренного прямоугольного треугольника через его гипотенузу c .

19. Найдите формулу площади равностороннего треугольника, сторона которого считается известной.

20. Выразите площадь треугольника через среднюю линию и высоту.

21. Найдите формулу площади равностороннего треугольника, высота которого считается известной.

22. Найдите сторону (высоту) равностороннего треугольника по его площади S .

23. Найдите площадь ромба, считая известными его диагонали.

24. Найдите формулу, выражающую площадь трапеции через среднюю линию и высоту.

Фрагмент 3. Тема „Площади четырехугольников” (VIII класс, продолжение)

Проблема 1. ... (Сформулируйте проблему к задачам 1 – 6.)

1. Вершина C треугольника ABC перемещается по прямой, параллельной основанию AB . Изменяется ли площадь этого треугольника?

2. В шарнирном квадрате изменили форму. В какую фигуру он при этом перейдет? Площадь какой фигуры больше?

3. Основание треугольника увеличили на 2 см, а высоту, проведенную к этому основанию, уменьшили на 2 см. Изменилась ли площадь треугольника?

4. Сравните площади данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями.

5. Какой вид должен иметь треугольник со сторонами a и b , чтобы его площадь оказалась наибольшей?

6. Какой вид должен иметь параллелограмм со сторонами a и b , чтобы его площадь оказалась наибольшей?

Проблема 2. ... (Сформулируйте проблему к задаче 7.)

7. Найдите площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см. (Указание. Представьте данный четырехугольник состоящим из двух треугольников.)

Проблема 3. ... (Сформулируйте проблему к задачам 8–11.)

8. Решите задачу 7, рассмотрев данный четырехугольник как состоящий из четырех прямоугольных треугольников.

9. Решите задачу 7 другим способом. Нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликим прямоугольником? Рассмотрите различные варианты такой замены.

10. Решите задачу 7 другим способом. Нельзя ли воспользоваться прямоугольником, стороны которого равны диагоналям данного четырехугольника?

11. Решите задачу 7 другим способом. Нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликим треугольником? Рассмотрите различные варианты такой замены.

Нельзя обойти стороной и проблему развития пространственного представления и воображения учащихся. Часто ее решение связывают только с традиционно-синтетической частью геометрии. Однако это неверно. Определенные возможности для этого имеются и при изучении элементов аналитической геометрии, векторной алгебры. (Подробнее об этом см. в статье Н.М. Рогановского „О развитии пространственных представлений учащихся при изучении векторов в IX классе“, опубликованной в журнале „Математика в школе“ (1986, № 1, с. 34).)

3.4. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОоды

Выделим следующие предложения и рекомендации, относящиеся к итогам данной главы.

1. Вопрос о систематическом включении методического аппарата

не может быть решен без учета общего объема учебного материала и количества времени, выделяемого на его изучение. В условиях перегрузки учебника расширение методического аппарата может иметь серьезные негативные последствия. При нормализации нагрузки учебника целесообразно систематическое изложение в нем методического аппарата. Одним из возможных критериев нормализации нагрузки учебника может служить такое его построение, при котором $\frac{1}{3}$ учебного времени выделяется на изучение теории и $\frac{2}{3}$ – на решение задач. Такое соотношение обеспечивает нормальный режим работы, позволяет без спешки, основательно прорабатывать весь учебный материал, создает благоприятные предпосылки для организации воспитывающе-развивающего обучения. Естественным критерием систематичности методического аппарата является использование его при изложении достаточно трудных и сложных вопросов курса. Если у учащихся нет потребности в методическом аппарате, то приводить его не следует.

2. Целесообразно сочетание различных форм предъявления методического аппарата в учебнике: элементы методического аппарата органично вписываются в основной учебный текст и не отделяются от него; элементы методического аппарата излагаются в основном учебном тексте и выделяются в нем словами-указателями или специальными сигналами-символами; в тех случаях, когда методический аппарат является достаточно объемным, его можно выделять в виде параллельной колонки к основному учебному тексту. Математическое содержание и методический аппарат должны быть по возможности краткими. Предпочтительнее, если методический аппарат не регламентирует жестко методику изложения данного материала учителем на уроке, а предоставляет возможность для варьирования методов обучения (в соответствии с особенностями подготовки класса, педагогическими установками учителя).

3. Методический аппарат призван помочь комплексному решению задач воспитания, развития и обучения учащихся. Неотъемлемой составной частью его являются творческие задания.

4. Методический аппарат должен быть ориентирован на ученика. Он предназначен для оказания помощи именно ученику. В этих целях учителя необходимо разъяснять учащимся, что представляет собой методический аппарат в каждом отдельном тексте и как им надо воспользоваться. В противном случае методический аппарат может оказаться бесполезным или служить определенной помехой в обучении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся на наиболее актуальных рекомендациях по совершенствованию школьного учебника геометрии.

*Параметр учебника
и проблемы его совершенствования*

1. Основной учебный материал: устранение перегруженности понятиями и фактами; уточнение соотношения между традиционными и новыми темами; уточнение соотношения между элементами учебного материала, формирующими знания, умения и навыки учащихся, влияющими на их воспитание и развитие; уточнение вопроса о роли различных математических методов в построении курса; выбор оптимального уровня абстрактности трактовок понятий и фактов.

2. Логико-математическая система учебника: сокращение количества громоздких и сложных доказательств; устранение логических пробелов в доказательствах без повышения их сложности; сокраще-

Рекомендации по совершенствованию данного параметра учебника

1. Устранение рядоположенности понятий и фактов, выделение ведущих. Выделение основного учебного материала с учетом определенной формы дифференциации обучения. Сокращение вспомогательного теоретического материала. Четкое разграничение требований к учащимся при изучении основного и вспомогательного учебного материала. Обеспечение органического сочетания исторического и логического подходов при построении учебника. Увеличение количества времени на решение задач за счет рационального изложения теоретической части учебника. Уточнение образовательных целей в отношении различных групп задач. Применение при построении курса нескольких математических методов (в соответствии с их „конкурентоспособностью”).

2. Выделение ведущего и вспомогательных математических методов. Рационализация логико-математической системы учебника за счет выборочного применения нескольких математических методов. Упрощение

ние количества теорем, приводимых без доказательства (особенно в разделах, не относящихся к начальному); преодоление разбросанности в изложении родственных вопросов; обеспечение относительно последовательной группировки доказательств вокруг общих математических методов.

3. Общий объем учебника: уточнение соотношения между теоретической частью учебника и задачным материалом; учет соответствия между объемом учебника и количеством часов, отводимых на изучение курса; учет соответствия объема учебника возрастным возможностям учащихся.

4. Методический аппарат учебника: определение степени потребности в том или ином методическом аппарате; изыскание возможностей помещения методического аппарата, не приводящего к перегрузке учебника.

Данное исследование является обобщением экспериментальной работы автора, проводимой в 1963–1989 гг. в ряде школ г. Орска и Оренбургской области, в экспериментальной школе АПН СССР им. Памяти В.И. Ле-

доказательств. Сочетание уровня строгости с доступностью за счет возможности выбора отдельного варианта из более широкой совокупности (в условиях повышения вариативности логико-математической системы). Компактное изложение родственных вопросов за счет расширения набора математических методов. Снижение зависимости логико-математической системы от отдельных понятий и фактов.

3. Рационализация логико-математической системы. Уточнение объема основного и вспомогательного учебного материала, детализации их изложения. Минимизация вспомогательного теоретического материала. Группировка задач вокруг основной линии курса. Устранение недостаточности или чрезмерной избыточности системы задач.

Ориентация системы задач не на увеличение их численности, а на качественные характеристики, на усиление доли развивающих задач.

4. Нормализация нагрузки учебника математическим содержанием. Анализ сложности и трудности учебного материала. Усиление воспитывающе-развивающей и обучающей функций методического аппарата. Устранение рядоположенности между математическим содержанием и методическим аппаратом.

нина в Горках Ленинских, в школах г. Могилева и Могилевской области, с учащимися ЮМШ Белгородского, Омского, Могилевского педагогических институтов. К проведению эксперимента привлекались учителя математики Е.М. Кислова, В.М. Лебедев, Л.А. Курусь, Б.С. Каплан, Д.К. Алейникова, преподаватели педагогических институтов В.М. Клыгин, В.А. Радченко, Н.Г. Рыженко, Г.Е. Алимухамбетова, слушатели ИУУ Могилевской области, студенты Могилевского педагогического института, сотрудники ВЦ СУ Могилевской области. Проведены две группы экспериментов. Первая группа была связана с отработкой методического аппарата учебника геометрии и охватывала 3766 учащихся, вторая – с исследованием построений школьного курса геометрии на нетрадиционных логико-математических основах, она охватывала 433 ученика. Результаты первой группы экспериментов опубликованы в следующих работах: „Упражнения для выяснения необходимости доказательства” (Математика в школе, 1966, № 4), „Элементы математической деятельности как предмет обучения” (Советская педагогика, 1976, № 7), „Помогая в усвоении аксиом стереометрии” (Вечерняя средняя школа, 1978, № 2), „Составление задач как метод обучения” (Физика в школе, 1982, № 5), „Методический аппарат в помощь школьнику” (Советская педагогика, 1989, № 4), „Исследование готовности учащихся к усвоению идей аксиоматического метода” (в сб.: Новые исследования в педагогических науках, 1978, № 1, 2), „О взаимосвязи учебника и задачника по геометрии” (Проблемы школьного учебника, 1988, вып. 17), „Векторы в курсе геометрии средней школы” (Мн., 1977), „Координаты. Преобразования. Векторы” (Мн., 1987), [90], „Поисковые задания по геометрии” (Математика в школе, 1990, № 5).

Материалы по второй группе экспериментов нашли отражение в следующих работах автора (первые две – в соавторстве): „Основы современной школьной математики” (в 2 ч.; Мн., 1976–1977), „Векторное построение стереометрии” (Мн., 1974), „Проблемы реформы математического образования” (Математика в школе, 1989, № 5), [88 – 90].

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А.М. Логические основы курса планиметрии // Математика в школе. 1974. № 5.
2. Абрамович А.В., Лазаревич Э.А. Практикум по литературному редактированию. М., 1974.
3. Адамар Ж. Элементарная геометрия: В 2 т. М., 1948–1952. 2 т.
4. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3.
5. Александров А.Д. Пути развития школы // Математика в школе. 1987. № 5.
6. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Начала стереометрии: Пробный учебник для 9 класса. М., 1981.
7. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Начала стереометрии: Пробный учебник для 10 класса. М., 1982.
8. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. О пробном учебнике „Начала стереометрии“ // Математика в школе. 1982. № 4.
9. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В., Позняк Э.Г. Геометрия: Пробный учебник для 6–8 классов. М., 1981.
10. Атанасян Л.С. и др. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса. М., 1987.
11. Атанасян Л.С., Мишин В.И. Об одном построении систематического курса геометрии в средней школе // Современные проблемы методики преподавания математики. М., 1985.
12. Атанасян Л.С., Позняк В.Г. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса. М., 1979.
13. Атанасян Л.С., Позняк Э.Г. О пробных учебниках геометрии для VI – VIII классов // Математика в школе. 1981. № 1.
14. Бабанский Ю.К. Как оптимизировать процесс обучения. М., 1978.
15. Бабанский Ю.К. Методы стимулирования учебной деятельности школьников // Сов. педагогика. 1980. № 3.
16. Бабанский Ю.К. Об актуальных проблемах совершенствования обучения в общеобразовательной школе // Сов. педагогика. 1979. № 3.
17. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения. Ростов н/Д, 1972.
18. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения: Общедидактический аспект. М., 1977.
19. Базисная программа по математике // Математика в школе. 1981. № 4.
20. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., 1969.
21. Бейлинсон В.Г. Аппарат ориентировки в школьных учебниках // Проблемы школьного учебника. М., 1975. Вып. 4.
22. Бейлинсон В.Г., Зуев Д.Д. О функциональном подходе к оценке школьных учебников // Проблемы школьного учебника. М., 1977. Вып. 5.
23. Белая Л.А. К вопросу о типологии учебных изданий для общеобразовательной школы // Проблемы школьного учебника. М., 1978. Вып. 6.
24. Блох А.Я. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / Сост. В.И. Мишин. М., 1987.
25. Болтянский В.Г. Пробный учебник геометрии // Математика в школе. 1981. № 5.
26. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Геометрия 6. М., 1972.
27. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Геометрия 7. М., 1974.
28. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Геометрия 8. М., 1977.
29. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Геометрия: Пробный учебник для 6–8 классов. М., 1979.
30. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Геометрия: Учеб. пособие для 9 класса. М., 1963.

31. Возможности индивидуализации обучения учащихся доказательству геометрических теорем: Метод. разработка. Мн., 1986.
32. Волович М.Б., Красс Э.Ю., Левитас Е.Г. Место школьного учебника в системе средств обучения // Проблемы школьного учебника. М., 1976. Вып. 4.
33. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М., 1986.
34. Гальперин П.Я. Изменение методики обучения – одно из условий повышения эффективности процесса учения // Вопр. философии. 1974. № 1.
35. Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., 1948.
36. Глейзер Г.Д. Геометрия. М., 1971.
37. Гольтиков В.Ф. Русский учебник геометрии средней школы: Дис.... канд. пед. наук. М., 1967.
38. Граник Г.Г., Бондаренко С.М. О типах учебных текстов // Проблемы школьного учебника. М., 1975. Вып. 3.
39. Гусев В.А., Маслова Г.Г., Скопец З.А., Черкасов Р.С. Сборник задач по геометрии для 6–8 классов. М., 1979.
40. Донец А. Евклидова планиметрия. М., 1978.
41. Дорофеев Г.В. Строгость определений математических понятий школьного курса с методической точки зрения // Математика в школе. 1984. № 3.
42. Дубнов Я.С. Беседы о преподавании математики. М., 1965.
43. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., 1972.
44. Евклид. Начала: В 15 т. М.; Л., 1948–1950. Т. 1–3.
45. Зубов Д.Д. Школьный учебник. М., 1983.
46. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. М., 1987.
47. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения. М., 1979.
48. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика 8. М., 1981.
49. Киселев А.П. Элементарная геометрия. М., 1980.
50. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 т. М., 1987, 2 т.
51. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М., 1966.
52. Колмогоров А.Н. Некоторые соображения о структуре учебников математики // Проблемы школьного учебника. М., 1975. Вып. 3.
53. Колмогоров А.Н. и др. Геометрия: Учеб. пособие для 6–8 классов. М., 1980.
54. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Нагибин Ф.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса. М., 1970.
55. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Дис. ... д-ра пед. наук. М., 1977.
56. Краевский В.В. Определение функций учебника как методологическая проблема дидактики // Проблемы школьного учебника. М., 1976. Вып. 4.
57. Краевский В.В., Лернер И.Я. Дидактические основания определения содержания учебника // Проблемы школьного учебника. М., 1980. Вып. 8.
58. Лернер И.Я. Критерии сложности некоторых элементов учебника // Проблемы школьного учебника. М., 1974. Вып. 1.
59. Лудина Г.В. Методика изучения перемещений на координатной плоскости // Метод. рекомендации по методике преподавания математики в средней школе. М., 1981. Ч. 2.
60. Маликов Т.С. Логический и интуитивный компоненты в определениях математических понятий // Математика в школе. 1987. № 1.
61. Мантуров О.В., Исаев М.А. Об аксиоматическом методе в школьном курсе геометрии // Математика в школе. 1988. № 3.
62. Маслова Г.Г. Конструирование учебника математики // Проблемы школьного учебника. М., 1980. Вып. 8.
63. Математика: Мидленский экспериментальный учебник. М., 1971.
64. Медяник А.И. Научно-методические достоинства учебного пособия А.В. Погорелова // Математика в школе. 1983. № 2.

65. Менчинская Н.А. Психологические требования к учебнику // Изв. АПН РСФСР. М., 1955. Вып. 63.
66. Метельский Н.В. Очерки истории методики математики. Мн., 1968.
67. Микк Я.А. Оптимизация сложности учебных текстов. М., 1981.
68. Мищенко А.С., Понтрягин А.С. О некоторых принципах преподавания математики в школе // Математика в школе. 1982. № 2.
69. Моиз Э.Э., Даунс Ф.Л. Геометрия. М., 1972.
70. Монахов В.М., Гуревич В.Ю. Об одном методе системного анализа внутрпредметных связей // Математика в школе. 1980. № 2.
71. На путях обновления школьного курса математики. М., 1978.
72. Неванлинна Р. Реформа в преподавании математики // Математика в школе. 1968. № 1.
73. Нешков К.И. и др. О школьном учебнике математики // Математика в школе 1982. № 2.
74. Никитин Н.Н. Геометрия 6–8. М., 1970.
75. Никитин Н.Н., Фетисов А.И. Геометрия 6–9. М., 1956.
76. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра. М., 1984.
77. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика 6–7. М., 1979.
78. Плаже Ж. Как дети образуют математические понятия // Вопр. психологии. 1966. № 4.
79. Погорелов А.В. Геометрия 6–10. М., 1984.
80. Понтрягин Л.С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. 1980. № 14.
81. Постников М.М. Аналитическая геометрия. М., 1973.
82. Потоцкий М.В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте. М., 1975.
83. Проблемы единого уровня общеобразовательной подготовки учащихся в средних учебных заведениях / Под ред. В.М. Монахова. М., 1983.
84. Программа по математике для средней школы // Математика в школе. 1968. № 2.
85. Программа по математике для средней общеобразовательной школы (V – XI классы) // Математика в школе. 1985. № 6.
86. Проекты программы по математике // Математика в школе. 1978. № 4.
87. Проекты программы по математике // Математика в школе. 1979. № 2–3.
88. Roganovskiy N.M. Каким быть дифференцированному учебнику // Математика в школе. 1990. № 3.
89. Roganovskiy N.M. Методика преподавания математики в средней школе. Мн., 1990.
90. Roganovskiy N.M. Построение курса стереометрии IX класса на основе аксиоматически определенного понятия отражения от плоскости: Учеб. материалы / Под ред. А.И. Фетисова. М., 1969.
91. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. М., 1946.
92. Серее В. Аксиоматика и элементарная геометрия // Математика в школе. 1967. № 6.
93. Скопец З.А., Клопский В.М., Ягдовский М.И. Геометрия 9–10. М., 1981.
94. Сосницкий К. Построение содержания учебника // Проблемы школьного учебника. М., 1975. Вып. 3.
95. Столетов В.Н. О научных основах отбора содержания для учебников // Проблемы школьного учебника. М., 1980. Вып. 8.
96. Столяр А.А. Педагогика математики. Мн., 1986.
97. Стюарт Ян. Концепции современной математики. Мн., 1980.
98. Талызина Н.Ф. Место и функции учебника в учебном процессе // Проблемы школьного учебника. М., 1978. Вып. 6.

99. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. М., 1983.
100. Тесленко И.Ф., Фирсов В.В. О методической системе учебного пособия А.В. Погорелова „Геометрия” // Математика в школе. 1981. № 5.
101. Том Р. Современная математика – существует ли она? // Математика в школе. 1973. № 1.
102. Требования к знаниям и умениям школьников / Под ред. А.А. Кузнецова. М., 1987.
103. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М., 1967.
104. Фетисов А.И. Геометрия. М., 1963.
105. Философский словарь / Под ред. И.Т. Фролова. М., 1987.
106. Фирсов В.В. Пути повышения эффективности преподавания математики в современных условиях // Математика в школе. 1982. № 5.
107. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: В 2 ч. М., 1983. Ч. 2.
108. Хабиб Р.А. Учебник математики как средство организации учебно-познавательной деятельности учащихся // Проблемы школьного учебника. М., 1978. Вып. 6.
109. Черкасов Р.С. Геометрия как учебная дисциплина в современной школе // Проблемы совершенствования преподавания математики в средней школе. М., 1986.
110. Чудаков А.П. О характере текстов учебника // Проблемы школьного учебника. М., 1975. Вып. 3.
111. Шаповаленко С.Г. Учебник в системе средств обучения. М., 1974.
112. Шоке Г. Геометрия. М., 1970.
113. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Значение аксиоматики в современном школьном курсе геометрии // Воспитание учащихся при обучении математике / Сост. Л.Ф. Пичурин. М., 1987.
114. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. М., 1985.
115. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. М., 1980.
116. Delessert A. Une construction de la geometrie elementaire fondee sur la notion de reflexion. Geneve. 1963.
117. Krygowska A.Z. Le texte mathematique dans l'enseignement // Actes du premier congres international de l'enseignement mathematique. Lion, 1969.
118. Lenz H. Grundlagen der Elementarmathematik. Berlin, 1967.
119. Okon W. Podstawy wykształcenia ogólnego. Warszawa, 1967. N K.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	5
В.1. Ключевые понятия.....	5
В.2. О концепции дифференцированного обучения.....	8
В.3. О концепции школьного учебника геометрии. Проблема-задание.....	13
1. Методические требования к отбору математического содержания в школьный учебник геометрии.....	15
1.1. Типы учебников для осуществления дифференцированного обучения. Особенности отбора математического содержания в них.....	15
1.2. Отбор содержания основного учебного материала.....	18
1.3. Требования к определению объема математического содержания учебника геометрии.....	24
2. Методические требования к построению логико-математической системы школьного учебника геометрии.....	37
2.1. Требования к выбору математических методов изложения.....	37
2.2. Требования к уровню строгости изложения.....	60
2.3. Требования к систематизации учебного материала.....	71
3. Требования к совершенствованию методического аппарата учебника.....	81
3.1. Различные тенденции.....	81
3.2. Формы представления методического аппарата в учебнике.....	85
3.3. Некоторые приемы совершенствования содержания методического аппарата.....	89
3.4. Некоторые выводы.....	98
Заключение.....	101
Использованная литература.....	104

Научное издание

Рогановский Николай Максимович

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Заведующий редакцией Л.Д. Духвалов

Редактор М.С. Молчанова

Художественный редактор А.Г. Звонарев

Технический редактор С.И. Шердюкова

Корректор И.И. Ганелес

Оператор Н.М. Аланасевич

ИБ № 3215

Подписано в печать с оригинала-макета 28.02.92. Формат 60 х 90/16. Бумага кн.-журн. Офсет. печать. Гарнитура шрифта: Times New Roman. Усл. печ. л. 6,75. Усл. кр.-отт. 7. Уч.-изд. л. 7,68. Тираж 1000. Заказ 5745. Цена 20 р.

Издательство „Вышэйшая школа“ Министерства информации Республики Беларусь. 220048, Минск, проспект „Машерова“, 11.

Типография „Победа“. 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11