

Н. М. Рогановский
Е. Н. Рогановская

М Е Т О Д И К А

ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Часть 1
Общие основы методики
преподавания математики (общая методика)



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В двух частях

Часть 1

**Общие основы методики преподавания математики
(общая методика)**

*Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений
Республики Беларусь по педагогическому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям:*

1-02 05 03-01 «Математика. Физика»;

1-02 05 03-02 «Математика. Информатика»;

1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»



Могилев 2010

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»*

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики
БГПУ им. М. Танка

Эксперты: кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой
М.И. Лисова; кандидат педагогических наук, доцент *Н.К. Пещенко*;
кандидат педагогических наук, доцент *О.Н. Пирютко*;

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики БГПУ
Е.П. Кузнецова

Рогановский, Н.М.

P59 Методика преподавания математики в средней школе: учеб.
пособие: в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев:
УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2010. – Ч. 1: Общие основы мето-
дики преподавания математики (общая методика). – 312 с.: ил.

ISBN 978-985-480-604-4.

Предлагаемое учебное пособие обновляет используемое в Республике Беларусь и за рубежом ранее изданное учебное пособие Н.М. Рогановского «Методика преподавания математики в средней школе: Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов педагогических институтов по физико-математическим специальностям. – Минск: Высшая школа, 1990. – 267 с.».

Оно посвящено первому разделу курса «Методика преподавания математики» – Общим основам методики преподавания математики (общей методике).

Учебное пособие содержит следующие темы: предмет методики преподавания математики, цели обучения математике, принципы обучения математике в средней школе, современные технологии обучения математике, современные тенденции в школьном математическом образовании, школьный учебник математики, мировоззренческие и методологические аспекты обучения математике, методы обучения математике, математические понятия и методика их изучения, методика изучения теорем и их доказательств, теория и методика обучения учащихся решению задач, организационные формы обучения, урок математики.

Учебное пособие окажется полезным не только студентам первой ступени обучения, но магистрантам, а также при подготовке к вступительному экзамену в аспирантуру и сдаче кандидатского экзамена аспирантами по методике преподавания математики.

УДК 372.8:51(075.8)

ББК 74.262.21я73

© Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н., 2010

ISBN 978-985-480-604-4-1 © Оформление.

ISBN 978-985-480-603-7

УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2010

ВВЕДЕНИЕ

Методика преподавания математики как учебный предмет состоит из двух разделов: *общих основ методики преподавания математики (общей методики)* и *частной методики*, посвященной изучению отдельных математических предметов. Данное учебное пособие посвящено первому разделу – общей методике.

При изложении использовано учебное пособие Н.М. Рогановского «Методика преподавания математики в средней школе». – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 267 с.

Теоретический материал изложен с учетом современных достижений по психологии, дидактике, методике преподавания математики, с учетом произошедших изменений в практике обучения.

Приводятся задания для практических и лабораторных работ.

Кратко отметим исходные позиции данного учебного курса. Современные задачи вузовского курса «Методика преподавания математики в средней школе» вызывают большую потребность в обосновании и углублении содержания этого курса. Перманентное изменение и совершенствование образовательных школьных программ и стандартов, наличие альтернативных школьных учебников, разнообразие новых систем и технологий обучения – все это предъявляет повышенные требования к профессиональной подготовке будущего учителя математики. Особое значение в этом отношении имеет раздел «Общие основы методики преподавания математики (общая методика)». Именно этот раздел позволяет охватить многообразие существующих реалий с единых позиций, своевременно познакомить студентов с различными подходами.

Творческая направленность обучения студентов, формирование методического мышления, исследовательского подхода к решению методических проблем – актуальные задачи вузовского курса методики преподавания математики.

Этим задачам отвечает такой курс, который отходит от рецептурного стиля, является современным, научным, предстает перед студен-

тами в развитии, связывает их учебно-исследовательскую деятельность с решением крупных научных и практических проблем обучения математике.

Современность, научность, изучение курса методики преподавания математики в развитии, осознанность логики этого процесса, развитие методического мышления и методических способностей студентов, сочетание теоретической и практической подготовки – таковы основные принципы авторской методики обучения студентов.

Эти принципы положены в основу баланса между теоретической и практической подготовкой студентов. Наряду с теоретическим материалом в учебном курсе приводятся примеры, пояснения, конкретизации. Студенты знакомятся с опытом известных учителей математики. К каждой теме приводятся задания для практических и лабораторных работ, предусматривающие проведение деловых игр, разработку конспектов уроков или их фрагментов. Значительное внимание уделяется современным технологиям обучения, включая компьютерную технологию. Приводятся примеры уроков математики с использованием электронного учебника.

Тема 1

ПРЕДМЕТ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Объект и предмет методики преподавания математики
2. Соотношение понятий «система», «технология» и «методика» обучения математике
3. Связь методики преподавания математики с математикой
4. Парадигмы и концепции обучения
5. Задания для семинара и практического занятия

1. Объект и предмет методики преподавания математики

Методика преподавания математики (МППМ) – дисциплина, которая занимается разработкой теории и практики математического образования в учебных заведениях различных типов. Образование включает в себя воспитание, обучение и развитие. Оно предполагает разработку диагностически обусловленных целей образования, психолого-дидактических принципов образования, содержания, средств, методов и форм математического образования.

Объектом МППМ является ученик, развивающийся в результате воспитания и обучения.

Предметом МППМ является процесс обучения математике, закономерности этого процесса. Методика преподавания математики призвана ответить на четыре основных вопроса: *Для чего учить? Чему учить? Как учить? Какие результаты обучения должны получить?* Первый и последний из этих вопросов указывают на цели обучения, второй – на содержание обучения, третий – на средства, методы и формы обучения.

Терминологический словарь:

Воспитание – это деятельность по передаче учащимся общественно-исторического опыта, высокой морали, творческого отношения к действительности, научного мировоззрения, высокой культуры труда и поведения.

Обучение – процесс непосредственной передачи опыта поколений во взаимодействии учителя и учащихся, передачи содержания математического образования.

Развитие – объективный процесс изменения духовных сил ученика, его умственных качеств, математических способностей.

Цель обучения – воспитательная, обучающая и развивающая – представляет собой определенную фиксацию планируемых результатов обучения.

Парадигмы (концепции) и принципы обучения – основные регулятивные положения, задающие и направляющие образовательный процесс, устанавливающие его приоритеты.

Содержание обучения включает в себя знания (мировоззренческие, методологические, теоретические, практические), способы репродуктивной и продуктивной (творческой) деятельности, опыт эмоционально-ценностного отношения.

Средство обучения – материализованные и вербальные источники информации, охватывающие все виды деятельности ученика и учителя, и обеспечивающие достижение планируемого образовательного результата.

Метод обучения – это упорядоченная деятельность учителя и учащихся, направленная на достижение планируемой цели обучения. Метод обучения рассматривается как синтез *метода преподавания* (деятельности учителя) и *метода учения* (деятельности ученика).

Форма обучения, образовательная среда – способ существования и выражения обучения, внутренняя организация обучения.

Процесс обучения представляет собой целенаправленный процесс взаимодействия учителя и учащихся, в ходе которого на базе определенного содержания образования, с помощью принципов, методов, средств и форм обучения осуществляется развитие, образование и воспитание учащихся, достижение планируемых результатов обучения. Процесс обучения математике строится на основе дидактической теории процесса обучения с учетом необходимых дополнений и конкретизаций, вытекающих из специфики учебного курса математики.

Движущими силами процесса обучения являются противоречия и несоответствия между желаемыми, возможными и достигнутыми результатами обучения.

Структура процесса обучения может быть представлена следующим образом: постановка целей обучения, ориентация на определенную систему дидактических принципов, определение (отбор) содержания обучения, выбор и использование методов, средств и форм обучения.

Применительно к изучению отдельной учебной темы эта схема (локальный цикл) может быть конкретизирована следующим образом.

Структура процесса обучения при изучении отдельной темы:

- диагностическая постановка целей изучения данной учебной темы на основе анализа специфики учебной темы, возможностей учащихся, количества учебных часов и т.д.;

- учет особенностей реализации дидактических принципов при изучении данной учебной темы (учет трудности, сложности, абстрактности учебного материала, его межпредметной значимости и т.д.);

- отбор содержания учебной темы, анализ его логико-дидактических особенностей и их учет при построении процесса обучения (тематическое, поурочное планирование);

- выбор и использование методов, средств и форм обучения;

- промежуточный контроль результатов обучения, коррекция обучения с целью достижения планируемых результатов обучения, итоговый контроль, создание условий для изучения следующей учебной темы.

При переходе к новой теме обозначенный цикл повторяется.

Процесс обучения формируется под влиянием ряда *условий*, в которых он протекает. Наиболее существенными из них являются возрастные особенности учащихся и количество учебного времени, отводимого на изучение математики. Последнее задается учебным планом (с учетом той или иной формы дифференциации обучения).

Все составляющие процесса обучения взаимосвязаны и влияют друг на друга. Ведущую роль в этом взаимодействии играют цели обучения, та или иная их содержательная интерпретация.

Учебный курс методики преподавания математики состоит из двух разделов: *общая методика* (дидактика математики) и *частные методики* (методики изучения отдельных учебных предметов).

2. Соотношение понятий «система», «технология» и «методика» обучения математике

Понятие системы имеет достаточно глубокие исторические корни. Уже в античной науке был выдвинут тезис о том, что целое больше суммы его частей. Особенности системы знания исследовали Платон и Аристотель, системность познания развивалась Кантом, Шеллингом, Гегелем. С середины XX в. ведутся интенсивные разработки системного подхода и общей теории систем. Мощным стимулом этих исследований послужило создание кибернетики как самостоятельной отрасли научного знания.

Система – это некоторый объект, интегрирующий в себе различные элементы, и обладающий целостностью. Понятие системы неотделимо связано с понятиями целостности, элемента, подсистемы, отношения, связи, структуры и др. Для значительной части систем характерно наличие в них процессов передачи информации и управления. К наиболее развитым и сложным системам относятся целенаправленные системы (ориентированные на достижение определенных целей).

Процесс обучения, включающий деятельность учителя и учащихся, представляет собой определенную кибернетическую систему с присущими ей исполнительными и управляющими органами, обратной связью, использованием информации для управления.

Дидактические системы, как правило, относятся к числу *больших* систем. Признаками их является наличие большого числа разнородных элементов и связей между ними. Основная идея системного подхода состоит в том, что части должны рассматриваться в неразрывном единстве с целым.

Разработка различных систем обучения математике – одна из актуальных проблем современной методики преподавания математики. Система обучения (дидактическая система) должна обладать определенной полнотой и целостностью. Эти ее качества обеспечиваются, прежде всего, тем, что система обучения (по определению) обязана охватывать весь процесс обучения (формирование целей и содержания обучения, выбор методов, средств и форм обучения).

Дидактическая система, таким образом, может быть охарактеризована следующими признаками:

1) наличием интегративных (объединяющих) качеств. Этими качествами обладает, прежде всего, сама система – системные отношения;

- 2) наличием элементов, компонентов, блоков, узлов, подсистем;
- 3) существованием определенной структуры, устанавливающей связи и отношения между всеми частями системы;
- 4) осуществлением связей с окружающей средой (более широкой системой);
- 5) выполнением определенного набора заданных функций;
- 6) дидактическая система является целенаправленной системой, охватывающей все составляющие процесса обучения.

Признаки 1-5 относятся к характеристике общего понятия системы (родовые признаки), признак 6 является отличительным признаком дидактической системы.

Подсистемами дидактической системы являются система целей обучения, системы содержания, методов, средств и форм обучения.

В роли основы системы выступают различные психолого-дидактические концепции и теории обучения, с помощью которых осуществляется определенная конкретизация всех составляющих процесса обучения.

Более узким, чем понятие системы, является понятие технологии обучения. Технология обучения призвана дать детальную картину функционирования дидактической системы. Она обеспечивает максимально возможную конкретизацию процесса обучения и наряду с психолого-дидактическими теориями обучения также выступает в роли его системной основы.

Выделяются следующие признаки понятия *технологии обучения*:

- 1) Педагогическая технология – это совокупность психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, способов, приемов обучения, воспитательных средств; она есть организационно-методический инструментарий педагогического процесса (Б.Т. Лихачев);
- 2) Педагогическая технология – это содержательная техника реализации учебного процесса (В.П. Беспалько);
- 3) Педагогическая технология – это описание процесса достижения планируемых результатов обучения (И.П. Волков);
- 4) Технология обучения – это составная процессуальная часть дидактической системы (М. Чошанов);
- 5) Педагогическая технология – это системный метод создания, применения и определения всего процесса преподавания и усвоения знаний с учетом технических и человеческих ресурсов и их взаимо-

действия, ставящей своей задачей оптимизацию форм образования (ЮНЕСКО).

Одна и та же дидактическая система может иметь различные технологические реализации. Разработка эффективных технологий обучения математике является одной из наиболее актуальных проблем методики преподавания математики. Важным достоинством технологий обучения, объясняющим возросший к ним интерес, является возможность их воспроизведения различными учителями, сравнительно гарантированное достижение планируемых результатов обучения.

Отметим еще, что понятие методики преподавания математики шире соответствующих понятий системы и технологии обучения. В методике преподавания математики, например, может быть разработано несколько десятков миллионов вариантов различных уроков. Понятно, что такое количество уроков никакой отдельно взятой системой или технологией обучения не может быть охвачено. Методика преподавания каждого учебного предмета разрабатывает не только содержательный и методический инструментарий для построения различных систем и технологий обучения, но и сами наиболее перспективные системы и технологии обучения.

3. Связь методики преподавания математики с математикой. Современные тенденции в школьном математическом образовании

С развитием математики происходят определенные изменения в содержании среднего математического образования. В развитии математики выделяются следующие периоды.

Период *зарождения математики* (с древнейших времен до VI–V вв. до н.э.): накопление первичных фактов, устанавливаемых эмпирическим путем, порой приближенно.

Период *элементарной математики* (до XVII в.): сформировалась математика постоянных величин, началом этого периода послужило построение геометрии в знаменитых «Началах» Евклида, математика при этом излагалась в геометрической форме.

Период *классической высшей математики* (до первой половины XIX в.): сформировались основы исчисления бесконечно малых величин (математического анализа).

Период *современной математики* (со второй половины XIX в. до настоящего времени): открытие неевклидовых геометрий (Н.И. Лобачевский, Я. Больяи). Для современной математики характерно существенное расширение ее содержания, области приложений (в настоящее время математика служит универсальным языком всей современной науки); формирование новых обобщающих понятий и методов, обеспечивающих единство математики, интеграцию различных направлений ее развития; анализ оснований современной математики с широким привлечением теории множеств и математической логики.

Изменения в содержании математики вызывали соответствующие изменения в ее школьном преподавании. В XIX в. и особенно в начале XX в. выявилось существенное расхождение содержания школьной математики с содержанием математической науки, что послужило мощным стимулом возникновения широкого международного движения за реформу среднего математического образования. Идеи и концепции этой реформы активно влияли на всю систему обучения математики. Процесс реформирования продолжается и в настоящее время.

Приведем некоторые сведения, относящиеся к зарождению и развитию некоторых идей реформирования среднего математического образования. Одним из принципиальных направлений модернизации курса алгебры явилось включение в него материала, посвященного изучению функций. О включении в школьный курс идеи функции высказывались крупнейшие отечественные и зарубежные ученые С.И. Шохор-Троцкий (1891 г.), В.П. Шереметьевский (1895 г.), Ф. Клейн (1904 г.) и др. В первых десятилетиях XIX в. в России применялись учебники Н.И. Фусса, Т.Ф. Осиповского и Н.И. Библина, содержащие элементы высшей математики, которые оказали заметное влияние на обновление содержания среднего математического образования. В 1902 г. во Франции была проведена первая школьная реформа под влиянием известного математика Дарбу. Появились первые реформистские учебники Бореля, Бурле, Таннери. В Германии активную деятельность по реформе содержания математического образования вел Ф. Клейн. Начало движения за реформу в Англии было положено Дж. Перри (1899 г.). Была создана международная математическая комиссия по реформе (президентом этой комиссии был избран Ф. Клейн). Эта комиссия провела свои конференции в Брюсселе (1910 г.), Милане (1911 г.), Кембридже (1912 г.) и Париже (1914 г.). Кульминацией движения за реформу в России стало проведение Всероссийских съездов преподавателей математики (1911 – 1914 г.). Стояло два съезда, итоги работы которых были направлены на внедрение в школьный курс идеи функции, элементов математического анализа, ана-

литической геометрии, элементов теории вероятностей, геометрических преобразований. Обсуждались вопросы преемственности курсов математики средней и высшей школы, связи обучения с жизнью, соотношения в изучении теоретического материала и решении задач, методов обучения математике, фуракции (разделения) образования, фуззионизма (интеграции) в изложении содержания математического образования.

Крупным шагом в реализации реформистских идей в школьную практику явилась реформа, под руководством А.Н. Колмогорова и А.И. Маркушевича. Были созданы учебники, в которых широко использовался теоретико-множественный подход. В 11-летней школе рано вводилось понятие уравнения (IV кл.), системы координат (V кл.), понятие функции (VI кл.), системы уравнений (VI кл.). В старших классах введены были понятия производной и интеграла. Курс геометрии строился на основе геометрических преобразований, рассматривались также элементы аналитической геометрии и векторной алгебры. В 5-6-х классах арифметический материал был объединен с элементами алгебры и геометрии в единый курс математики.

В последующие годы произошла существенная коррекция этой реформы с учетом дифференциации обучения. На базовом уровне произошли заметные сокращения и возврат к традиционным подходам. В первую очередь сказанное относится к теоретико-множественному подходу. В Республике Беларусь принято 11-летнее образование, ведется непрерывная работа по совершенствованию учебного плана, образовательного стандарта, программы и новых учебников. Разработкой этих документов по всем учебным предметам руководит Национальный институт образования Республики Беларусь, разработка аналогичных документов по математике осуществлялась группой авторов учебников под руководством доктора физико-математических наук, профессора О.И. Тавгения. Предусмотрены два уровня обучения: базовый и повышенный. Запланированы также факультативные занятия, представляющие собой дополнительную форму обучения для желающих.

4. Парадигмы и концепции обучения

В методике преподавания математики находят применение многие концепции и теории обучения. Кратко представим наиболее распространенные.

Деятельностный подход к обучению. Учение выражается в активной познавательной деятельности и основывается на ней. Различают деятельность *внешнюю* (предметную) и *внутреннюю* (психическую). Внешняя познавательная деятельность необходима в учении, когда в психике еще не сформированы соответствующие образы, понятия и операции. Если же образы, понятия и операции, необходимые для усвоения новых знаний и умений, уже имеются у ученика, то учение совершается в основном в рамках внутренней познавательной деятельности. Внутренняя деятельность согласно исследованиям Ж. Пиаже и А.Н. Леонтьева возникает из внешней путем ее *утериоризации* (перевода во внутренний, мыслительный план). Учение на основе внешней деятельности иногда называется *первичным*, учение на основе внутренней деятельности – *вторичным*. Первичное обучение носит преимущественно условнорефлекторный характер, вторичное – осуществляется через восприятие.

Деятельностный подход к обучению исходит из *общей структуры деятельности* (потребности – мотивы – цели – условия – действия) и реализуется путем мотивированного и целенаправленного решения задач (проблем). В зависимости от уровня познавательной деятельности выделяются *три ее типа*:

1) Сообщение ученику готовой информации, в учении преобладает подражание, восприятие, повторение, упражнения по готовым образцам и правилам;

2) Направляемая познавательная активность ученика, в ходе которой происходит обнаружение и использование новой информации, в учении преобладают такие действия, как решение поставленных учебных задач (проблем), пробы, ошибки, отыскание способов решения задач и т.п.;

3) Активный самостоятельный поиск, учение осуществляется в режиме самодвижения, самонаучения, преобладает самостоятельный выбор вопросов и задач, поиск информации, самостоятельное решение учебных проблем, творческая деятельность.

Остановимся на характеристике некоторых реализаций деятельностного подхода в обучении (системы развивающего обучения Л.В. Занкова, Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, П.Я. Гальперина – Н.Ф. Талызиной и др.).

Развивающее обучение по Л.В. Занкову. В основу этой системы положена концепция, объединяющая развивающее обучение с

ассоциативно-рефлекторным обучением. *Основные дидактические положения данной системы обучения:*

- целенаправленное развитие с помощью комплексной развивающей системы; – системность и целостность содержания;
- ведущая роль теоретических знаний;
- обучение на высоком уровне трудности, быстрый темп изучения учебного материала;
- осознание ребенком процесса учения;
- включение в процесс обучения не только рациональной, но и эмоциональных сфер;
- проблемность в презентации содержания обучения;
- вариативность процесса обучения, индивидуальный подход к учащимся, работа над развитием всех учащихся.

Успешные эксперименты в начальной школе создают определенные предпосылки для использования этой системы в средних и старших классах. Данная система опирается на психологические положения развития ученика, предложенные известным психологом Л.С. Выготским. По Л.С. Выготскому обучение должно максимально ориентироваться на еще не сложившиеся, но возникающие психические виды деятельности ребенка. Оно должно планомерно, в интенсивном режиме осуществлять перевод ученика из *«зоны актуального развития»* (в которой ученик определенную деятельность выполняет самостоятельно) в *«зону ближайшего развития»* (в которой ученик еще не способен самостоятельно выполнить эту деятельность, но может выполнить ее при помощи учителя). Существенную роль играет мера помощи учителя, мера затруднений учащихся. Стремление оградить ученика от всяких затруднений, предупредить эти затруднения, как показывает опыт, не обеспечивает должного его развития. Интеллектуальное развитие возможно лишь на пути преодоления затруднений, на пути напряжения умственных усилий.

Принципы развивающего обучения Л.С. Выготского и Л.В. Занкова еще не получили в методике преподавания математики и особенно в практике работы средней школы должного применения. Требуются конкретные механизмы их реализации с учетом современных требований дифференциации и интеграции обучения. В данной работе предлагается (Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская) следующая интерпретация обучения «на максимально возможном уровне трудности». Допустим, что имеется уровень обучения, который для

данной категории учащихся является *основным* (базовый или повышенный). Если учащихся ограничивать только трудностями, содержащимися внутри основного уровня, то гарантий достижения результатов обучения, соответствующих этому уровню, не будет. Для достижения этих результатов требуется обучение на более высоком уровне трудности (хотя бы на немного отличающемся от основного). Этот уровень трудности не является самоцелью и служит лишь средством более полного и гарантированного достижения основного уровня обучения. Этот уровень называется *сопутствующим* (максимальным) уровнем обучения.

Заметим также, что понятия «быстрый темп обучения», «максимально возможный уровень трудности обучения» являются относительными, конкретное их наполнение может варьироваться с учетом уровня обучения, возрастных возможностях учащихся и подготовленностью учащихся определенного класса.

Развивающее обучение по Д.Б. Эльконину и В.В. Давыдову.

Ведущие цели: формирование теоретического мышления и сознания, формирование не только знаний, но, прежде всего, способов умственных действий, воспроизведение в учебной деятельности логики научного познания.

Исходные установки: доступность детям многих общих теоретических понятий в раннем возрасте, высокая оценка потенциальных возможностей учащихся к обучению (эти оценки намного выходят за рамки традиционных представлений). Основой развития учащихся служит содержание учебного материала, содержание определяет методы и формы обучения, повышение теоретического уровня учебного материала стимулирует рост умственных способностей ребенка. Развивающий характер обучения связывается с построением учебного материала на основе теоретических знаний, стержнем которых являются содержательные обобщения. К их числу относятся наиболее общие научные понятия, отражающие фундаментальные внутренние связи, вскрываемые при помощи мыслительных операций с абстрактными объектами.

Основная проблема состоит в том, чтобы обеспечить развивающее обучение, начиная от детского сада и кончая выпускным классом общеобразовательной средней школы.

Содержательное обобщение – изучение целостного объекта не путем установления его наглядного, внешнего сходства с другими, а

при помощи раскрытия его конкретных взаимосвязей, пути его внутреннего развития. В построении учебных предметов преобладают содержательные обобщения, используется проблемное изложение знаний. Развивающее обучение осуществляется путем решения учебных задач. Особое значение придается коллективным формам учебной работы, мотивации познавательной деятельности.

Метод учебных задач предполагает формирование следующих действий: принятие учеником учебной задачи, преобразование условий задачи с целью выделения существенного отношения, моделирование этого отношения в графической, буквенной, символической формах, придание модели отношения абстрактной формы в целях изучения этого отношения в «чистом виде», построение системы частных задач, решаемых общим способом, контроль выполнения предыдущих действий, оценка усвоения общего способа как результата решения данной учебной задачи.

Ассоциативно-рефлекторная парадигма (концепция) обучения. Ассоциативно-рефлекторная концепция обучения опирается на теорию И.М. Сеченова и И.П. Павлова условно-рефлекторной деятельности головного мозга. Согласно этой теории усвоение знаний, формирование навыков и умений, развитие ученика происходит на основе образования ассоциаций. *Ассоциация* рассматривается как «основной простейший элемент познавательного процесса» (Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская). Основная задача ассоциативно-рефлекторной теории обучения состоит в том, чтобы изучить, каким образом ассоциации и их системы образуются в условиях обучения. Повторение рассматривается как необходимое условие образования и закрепления условных связей. При этом важно иметь в виду повторяемость не только начального и конечного звеньев рефлекса (стимул – реакция), но и условно-рефлекторного акта в целом, центральное звено которого осуществляется в форме различных мыслительных операций и, прежде всего, в форме аналитико-синтетической деятельности мозга.

Ассоциации (по Ю.А. Самарину) делятся на *локальные, частно-системные, внутрисистемные, межсистемные* (или предметные). Развитие интеллекта представляется в виде процесса объединения ассоциаций в системы, совершаемого на основе аналитико-синтетической деятельности. Предусматриваются следующие этапы: восприятие учебного материала, его осмысление, запоминание и применение.

Изменение ассоциаций происходит в двух противоположных направлениях: с одной стороны, связи усложняются (образуются цепи ассоциаций, их системы, низшие виды переходят в высшие), а с другой стороны, по мере того как процесс усвоения автоматизируется, происходит упрощение ассоциаций (промежуточные связи выпадают, высшие виды трансформируются в «низшие» и т.п.). В разработку этой теории обучения существенный вклад внесли С.Л. Рубинштейн, Н.А. Менчинская, Д.Н. Богоявленский, Ю.А. Самарин и др.

Теория и методика поэтапного формирования умственных действий. Исходным тезисом этой теории (Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина) является положение о принципиальной общности внутренней (мыслительной) и внешней деятельности человека. Понимание и умение рассматриваются как субъективные обозначения двух основных частей предметного действия. Первая из них называется *ориентировочной*, вторая – *исполнительной* частью действия. Ориентировочная часть выполняет управляющую функцию в осуществлении действия. К ориентировочной части относятся составление плана действия, контроль и коррекция его исполнения. Основная задача обучения заключается в том, чтобы не просто сформировать действие, а в том, чтобы сформировать его с определенными заранее намеченными свойствами. Решающую роль в формировании действия играет его ориентировочная часть. Выделены *три типа ориентировки*. Первый тип отличается неполнотой, предельной конкретностью ориентиров, последние устанавливаются самими учащимися путем неоднократных проб. Второй тип ориентировки включает все условия, необходимые для выполнения действия. Эти условия задаются ученику в готовом виде. Третий тип ориентировки характеризуется полнотой, обобщенностью, при этом ориентировочная основа составляется самими учащимися, с помощью общего метода, сообщаемого им учителем. Особо подчеркивается роль полной ориентировочной основы действий, обладающей определенной общностью и поддающейся переносу на различный учебный материал.

Выделяются *пять этапов*, последовательного перевода внешних действий во внутренний план:

- 1) Предварительное знакомство с действием с помощью его ориентировочной основы (ООД). При чем под ООД понимается текстовая или графическая модель действия;

2) Материализованное действие, проводимое во внешней материальной форме;

3) Этап внешней речи (речи вслух). Учащиеся вслух проговаривают то действие, которое изучается;

4) Этап внутренней речи. Учащиеся проговаривают действие (или его фрагмент) про себя;

5) Этап автоматизированного действия. Действие выполняется в автоматическом режиме, даже без мысленного контроля, что свидетельствует о переходе действия во внутренний план.

Конкретная реализация этой схемы может быть различной. Если, например, учебный материал знаком учащимся из пропедевтического курса, то вероятнее всего, этапы 1-2 будут опущены (он уже был пройден), или будут обозначены в краткой, сокращенной форме. Не имеется в виду и какое-либо обособленное, растянутое во времени прохождение этапов 3-5.

На основе теории поэтапного формирования умственных действий может систематизироваться *методический аппарат учебника*. При этом выделяются следующие составляющие.

1) *Мотивационный аппарат*: информация, в которой учащимся сообщаются цели изучения учебного материала, его необходимость и полезность.

2) *Ориентировочный аппарат*: а) средства общей ориентировки по выполнению учебной деятельности (иллюстративный материал, справочный материал, рубрики, шрифтовые выделения, сигналы – символы, оглавление, введение, указатели); б) средства ориентировки по выполнению конкретных действий (общие схемы формирования понятий, общие схемы решения задач, планы решения отдельных задач, изложения фрагментов теории, указания частного характера, например, подчеркивание что в данном учебном материале учащимся уже было известно, а с чем знакомятся впервые и т.д.).

3) *Исполнительный аппарат*: система изложения теоретического материала (обладающая качествами полноты, краткости, простоты, психологической убедительности, последовательности изложения и т.д.), система задач (обладающая внутренней целостностью, эвристичностью, необходимым воспитывающе-развивающим и обучающим потенциалом). В исполнительном аппарате должны быть предусмотрены виды деятельности с внешней опорой на модель, рисунок, схему, а также виды деятельности без внешней опоры на материальные объекты.

4) *Контрольный аппарат* (средства пооперационного контроля и контроля по результату).

5. Задания для практического занятия

Задание 1. Ответьте на следующие вопросы:

- 1) Что является предметом методики преподавания математики?
- 2) Как определяется процесс обучения? Какую структуру имеет процесс обучения?
- 3) Как процесс обучения конкретизируется применительно к изучению отдельной учебной темы?
- 4) Каким образом учебный план влияет на процесс обучения?
- 5) Охарактеризуйте понятия «система обучения», «технология обучения» и «методика обучения».

Задание 2. Охарактеризуйте деятельностный подход к обучению, его структуру.

Задание 3. Охарактеризуйте систему развивающего обучения Л.В. Занкова.

Задание 4. Сформулируйте основные положения системы развивающего обучения по Д.Б. Эльконину – В.В. Давыдову.

Задание 5. Охарактеризуйте сущность ассоциативно-рефлекторной концепции обучения.

Задание 6. Охарактеризуйте теорию поэтапного формирования умственных действий.

Задание 7. Ответьте на вопрос: «Каким образом развитие математики влияет на школьный курс математики?». Приведите соответствующие примеры.

Тема 2

ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. Цели обучения как систематизирующий фактор
2. Взаимосвязь целей, содержания, средств, методов и форм обучения математике
3. Постановка образовательных целей обучения математике

4. Постановка развивающих целей обучения математике
5. Постановка воспитательных целей обучения математике
6. Самое трудное, но необходимое – комплексное планирование целей обучения, таблица целей, дерево целей, структура целей
7. Задания для практического занятия

1. Цели обучения как систематизирующий фактор

Определенное соотношение развивающих, образовательных и воспитательных целей существенным образом определяет систему обучения. Изучение одного и того же учебного материала может быть построено один раз таким образом, что на первый план окажутся выдвинуты развивающие цели, другой раз – образовательные цели, третий раз – воспитательные цели, четвертый раз – определенная комбинация этих целей. В дидактике и методиках обучения различным учебным предметам получены значительные результаты, свидетельствующие в пользу развивающих систем обучения. С позиции современной теории и практики обучения образование оправдывает себя лишь в том случае, если оно служит эффективным средством развития и воспитания учащихся. Прямой связи между образованием и развитием не существует. Еще Выготский отмечал, что не всякое обучение приводит к развитию. Больше того, обучение, осуществляемое на плохом профессиональном уровне, способно тормозить развитие учащихся. Обеспечение образовательного процесса развивающими качествами – достаточно сложная задача, требующая от учителя высокого профессионализма. В массовой практике обучения, вопреки теории и опыту учителей-новаторов, чаще можно видеть, что в основном ведется работа по формированию знаний, умений и навыков и совершенно недостаточно уделяется внимание развитию учащихся. Такое обучение, как правило, является излишне «будничным», малоэффективным, а его развивающие цели оказываются не более чем формальными декларациями. Наряду с субъективными, существуют и значительные объективные трудности. Дело в том, что развивающий процесс по своей предсказуемости и технологичности во многом уступает образовательному процессу. Если, например, обозначена некоторая последовательность учебных тем,

то, как правило, в этой последовательности видна определенная логика и целесообразность. Если же мы скажем, что сегодня будем «развивать» наблюдательность, завтра – сообразительность, а в конце четверти – критичность мышления, то кроме недоумения, ничего другого такая «последовательность» вызвать не может. Трудности в интеграции образовательного и развивающего процессов, недостатков профессионализма порождают иной раз предложения, сводящиеся к отказу от систематических учебных курсов. Для развития учащихся предлагается учебный материал, имеющий нередко мало общего с научными основами учебного предмета. Такие предложения глубоко ошибочны и способны привести, в лучшем случае, лишь к поверхностному развитию и образованию учащихся. Реально они означают отказ от полноценного образования для большинства учащихся. Современная дидактика акцент делает на «триединство» образовательных, развивающих и воспитательных целей обучения. Такой подход методологически является верным, однако, требуется серьезная разработка механизмов (технологий) его осуществления. В противном случае «триединство» окажется обычной декларацией. Прежде всего, должна быть устранена имеющая место неопределенность в истолковании смысла этого важнейшего понятия. Если принять, что «триединство» означает равноправие образовательных, развивающих и воспитательных целей обучения, то придем к одной системе обучения. Если отказаться от равноправия целей обучения, то придем к иным системам обучения. В любом случае необходимо иметь в виду, что воспитанность, развитость и образованность – три самые важнейшие компоненты личности. Независимо от того, каким образом устанавливается главенство тех или иных целей обучения, отметим, что воспитательные и развивающие цели не могут быть достигнуты в «обход» образовательных целей. Планомерное, эффективное развитие и воспитание возможно только на базе образования, при его помощи. Образование является не только важнейшей самостоятельной целью, но и средством развития и воспитания. Наряду с этим, прогресс в развитии и воспитании, безусловно, служит более углубленному решению образовательных задач. Последнее обстоятельство крайне важно в реализации целей обучения в качестве систематизирующего фактора. Учитывая же состояние практики обучения, можно без преувеличения отметить, что поднятие статуса развивающих и воспитательных целей уже означало бы настоящую ре-

волюцию в обучении школьников. Использование целей обучения в качестве систематизирующего фактора, безусловно, должно учитывать существующие формы дифференциации обучения. Одним из основных факторов, приводящих к деформации и разрушению системы целей обучения, является перегрузка учащихся учебным материалом. В этом случае не хватает времени на достижение даже образовательных целей, о других целях обучения, вообще, всерьез говорить не приходится. Имеет значение соотношение, удельный вес компонентов содержания обучения, которые ориентированы на те или иные цели обучения. Например, первые прогрессивные реформы математического образования (см. тему 1) были связаны с увеличением роли задачного материала, преодолением формального характера математического образования. Другой пример: возможное перенасыщение учебного материала историческими сведениями; что может стимулировать достижение определенных воспитательных целей, но образовательные и развивающие цели, скорее всего, будут упущены. Еще один пример: перенасыщение содержания обучения задачами с межпредметной фабулой. Эти задачи помогают устанавливать связь математики с географией, ботаникой, зоологией и т.д. Безусловно, такие задачи весьма ценные. Но избыток их отвлекает от основного содержания, уводит в сторону, выдвигает порой дополнительные, второстепенные моменты на первый план, нанося тем самым урон образовательным и развивающим целям. Особенно отмеченное явление оказывается нежелательным, если в обучении плохо раскрыты связи между различными разделами самой математики (арифметикой, алгеброй, геометрией, элементами математического анализа, комбинаторикой, элементами теории вероятностей и т.д.). Анализ учебно-методических комплексов по математике с этих точек зрения может дать немало материала для размышлений и выводов.

2. Взаимосвязь целей, содержания, средств, методов и форм обучения математике

Цели, содержание, средства, методы и формы обучения взаимно связаны и обуславливают друг друга (при сохранении ведущей роли целей обучения). Из различных целей обучения наиболее подвижны и изменчивы образовательные цели. Подтвердим это положение и проил-

люстрируем механизм взаимодействия различных составных частей процесса обучения. Зависимость между образовательными целями обучения и содержанием обучения можно проследить на примере школьных учебников, соответствующих различным реформам общего среднего математического образования. Программа по математике 1968 г. большое значение придавала теоретико-множественным понятиям. Они вводились в IV классе (по старой структуре школы) и получали широкое применение в школьном курсе математики. В последующих программах была изменена ориентация школьного курса математики на теоретико-множественные понятия (см. статью Понтрягина Л.С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. – 1980. – № 14. – С. 99-110). В результате на базовом уровне обучения отказались от теоретико-множественного подхода изучения уравнений, неравенств и функций и вернулись к традиционным трактовкам этих понятий. Считать теоретико-множественные понятия предметом обучения или не считать – выбор этой альтернативы является одним из способов фиксирования образовательной цели, приводящей к существенной перестройке содержания образования в том или ином направлении. Отказ строить содержание школьного курса математики на теоретико-множественной основе не означает полного отрицания роли теоретико-множественных понятий в этом курсе. Теоретико-множественная символика может использоваться в чисто дидактических целях, как средство наглядности (для записи различных математических предложений), получая свое отражение тем самым в методах обучения.

Рассмотрим другой пример. Программа 1968 г. большое значение придавала изучению геометрических преобразований. Они являлись основным предметом изучения, на их основе строился весь школьный курс геометрии, что нашло соответствующее отражение в учебном пособии под редакцией А.Н. Колмогорова. Образовательные цели изучения геометрических преобразований в последующих программах иные. Ставится более ограниченная цель: ознакомить учащихся с геометрическими преобразованиями (изучить наиболее важные теоретические сведения о движениях и преобразованиях подобия). Формирование навыков по применению геометрических преобразований при изучении других тем и решении задач не планируется. В соответствии с такими целями в учебном пособии А.В. Погорелова геометрические преобразования излагаются в виде отдельной небольшой темы и почти не используются при изложении

теоретического материала и решении задач других тем. Изучать или не изучать геометрические преобразования в школьном курсе, изучать в виде отдельной темы или использовать их в качестве основы построения всего курса геометрии – эти предложения представляют собой различные постановки образовательной цели, существенным образом влияющие на содержание обучения. Полезно иметь в виду, что включение геометрических преобразований в школьный курс определенным образом влияет и на методы обучения. Например, наглядные методы обучения пополняются демонстрациями, показывающими движение фигур. Фигуры при этом рассматриваются в динамике, что создает новые условия для развития пространственного представления и воображения учащихся.

Взаимодействие образовательных целей с формой обучения удобнее всего проследить в связи с дифференциацией обучения. Какое содержание (в каком объеме, с какой глубиной) необходимо рассматривать на том или ином уровне обучения – типичное проявление такого взаимодействия.

Примеры такого взаимодействия: исключение темы «Векторы» на базовом уровне и сохранение этой темы на факультативном обучении, или сохранение темы «Движения» на базовом и факультативном обучении, с обеспечением на последнем большей детализации.

Воспитательные и развивающие цели строятся с учетом особенностей изучаемого учебного материала и сказываются, прежде всего, на выборе методов обучения.

3. Постановка образовательных целей обучения математике

Основными документами, в которых фиксируются образовательные цели обучения математике, является программа и образовательный стандарт по математике. Необходимо различать два уровня описания целей обучения: *общая характеристика целей обучения* и *конкретное их представление*. Существуют различные способы конкретного представления целей обучения. Образовательные цели, например, формулируются в виде требований к уровню математической подготовки учащихся. В программе по математике для этого выделяется специальный раздел «Требования к математической подго-

товке учащихся». Другой раздел программы «Содержание обучения» представляет образовательные цели в еще более конкретной форме.

Дальнейшей конкретизацией образовательных целей служит учебник. Предельно конкретный уровень представления образовательных целей имеет место в экзаменационных билетах для учащихся, контрольных работах, предлагаемых Министерством образования. В методических пособиях часто формулируются цели обучения для отдельных тем, уроков. Образовательные цели призваны разграничить основной и второстепенный материал и в соответствии с этим помочь учителю рационально распределить учебное время. Умение правильно формулировать цели уроков приходит к начинающему учителю не сразу. В период педагогической практики студенты нередко испытывают затруднения в постановке целей урока. При формулировании ими образовательной цели урока не всегда хватает четкости, конкретности (особенно в дифференциации целей «соседних» уроков). Иногда образовательная цель повторяет (или почти повторяет) название темы урока. Например, цель урока на тему «Первый признак равенства треугольников» чаще всего формулируется так: «изучить первый признак равенства треугольников». Аналогично формулируются цели и в других случаях: «изучить теорему Виета», «изучить определение производной функции» и т.д. Во всех этих формулировках имеется общий недостаток: в них не уточняется, на каком уровне должен быть изучен данный элемент учебного материала. Необходимо указывать, когда ставится цель только ознакомить учащихся с тем или иным элементом учебного материала, когда – добиться хорошего воспроизведения учебного материала учащимся, когда – заложить первоначальные умения и навыки и т.д.

Важно учитывать, что знания бывают следующих видов:

- *мировоззренческие знания*, формирующие научное мировоззрение, раскрывающие роль математики в объяснении научной картины мира;
- *методологические знания*, знакомящие учащихся с математическими, логическими и эмпирическими методами;
- *теоретические знания*, составляющие содержание фундаментальных и прикладных математических теорий (система понятий и их определения, система теорем и их доказательства);
- *практические знания*, содержащие информацию о роли математики в общественной практике, политехнические и профориентационные сведения.

Мировоззренческие знания являются наиболее общими (высокими) знаниями, далее по убывающей уровня общности следуют методологические, теоретические и практические знания.

При формулировании образовательной цели полезно указывать, какой вид знаний имеется в виду.

Примеры формулирования образовательных целей:

- сформировать начальные представления учащихся о возникновении понятия числа и его роли в приложениях математики (мировоззренческие знания);

- ознакомить учащихся с методом от противного на примере доказательства первых геометрических теорем (методологические знания);

- ознакомить учащихся с линейной функцией и ее свойствами (теоретические знания);

- ознакомить учащихся с применением равных треугольников в геодезии (практические знания)».

Приведем пример учебного материала, в котором излагаются определенные методологические знания. Эти знания относятся к генетическому и аксиоматическому методу, возможному их сочетанию в обучении (генетический метод науки, при котором знание не приводится сразу в готовом, законченном виде, а показывается процесс отыскания этого знания, процесс построения соответствующей теории). Метод, получающийся при сочетании генетического и аксиоматического метода, мы называем *генетической формой аксиоматического метода* (Н.М. Рогановский).

Пример применения генетической формы аксиоматического метода при изучении темы «Равнобедренный треугольник».

I. *Постановка образовательной цели.* Изучить треугольники определенного вида (рис. 2.1).

II. *Математизация эмпирического материала* (перевод визуально-графической информации на словесно-символический математический язык).

По рисунку перечисляем ряд свойств $\triangle ABC$:

- 1) $AB = BC$;
- 2) $\angle A = \angle C$;
- 3) медиана BD является биссектрисой $\triangle ABC$;
- 4) медиана BD является высотой $\triangle ABC$.

III. *Построение теории.* Из четырех перечисленных утверждений выделим минимальное число таких, на основании которых можно доказать остальные. Выясним, можно ли на основании первого утверждения доказать остальные.

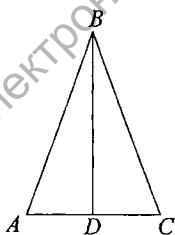


Рис. 2.1

1 шаг: $1 \Rightarrow 2$? Проведем медиану BD , получим два треугольника: $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. Эти треугольники равны по трем сторонам: $AB=BC$ (утверждение 1), BD – общая сторона этих треугольников, $AD=DC$ (так как BD – медиана, проведенная к стороне AC). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle C$ (утверждение 2). Итак, из утверждения 1 следует утверждение 2.

2 шаг: $1 \Rightarrow 3$? Из равенства треугольников ABD и CBD следует также, что $\angle ABD = \angle CBD$, т.е., что медиана BD является биссектрисой $\triangle ABC$. Итак, из утверждения 1 следует утверждение 3.

3 шаг: $1 \Rightarrow 4$? Из равенства треугольников ABD и CBD следует еще, что $\angle ADB = \angle CDB$. Так как эти углы смежные, то их сумма равна 180° . Поэтому $\angle ADB = \angle CDB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Это означает, что $BD \perp AC$ и, значит, медиана BD является одновременно и высотой $\triangle ABC$. Итак, из утверждения 1 следует утверждение 4.

Общий вывод. Из утверждения 1 следуют утверждения 2-4. Учитывая особую роль утверждения 1 в построении теории данного треугольника, положим его в основу определения этого треугольника и назовем этот треугольник особым образом. В геометрии такой треугольник называется равнобедренным (сообщаем термин). В итоге приходим к следующему определению и доказанным выше теоремам.

Треугольник, имеющий две равные стороны, называется *равнобедренным*.

Теоремы: 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Итак, что характерно для описанного метода обучения в методическом плане? Во-первых, велось теоретическое объяснение не одного отдельного факта, а сразу некоторой совокупности фактов. Во-вторых, роль утверждения 1 как исходного (аксиомы) данного фрагмента теории не сообщалось учащимся в готовом виде, учащиеся должны были установить это сами, отыскивая эту «аксиому». Они решали задачу, относящуюся не к одному какому-либо предложению, а ко всей совокупности предложений 1-4. При этом применялся метод проб, метод перебора, что составляет характерную черту генетического метода. Доказательства первоначально выступали не как средство окончательного логического оформления теории, а как средство поиска исходных предложений теории (аксиом), т.е. доказательства выполняли те функции, которые присущи генетическому методу. В целом, такой учебный материал несет, прежде всего, методологическую информацию (на примере конкретной учебной темы). В итоге учебной деятельности приходим к определенному теоретическому знанию (фрагменту теории), состоящему из определения равнобедренного треугольника, двух теорем и доказательств

этих теорем. Воспроизведение теории может ограничиваться формулированием определения и теорем, изложением доказательств в готовом виде (опуская процесс поиска).

Планирование образовательных целей представляет собой определенный процесс, отражающий в себе переход от одних уровней знаний к следующим более высоким уровням. Образовательная цель в определенный момент изучения учебного материала должна необходимым образом связываться с указанием планируемого уровня знаний. Какие уровни знаний могут быть выделены в этих целях?

Приведем один из сравнительно распространенных вариантов.

1. *Уровень воспроизведения.* Этот уровень связывается с изучаемым в данный момент или ранее изученным учебным материалом, он содержит следующие подуровни.

1.1. *Воспроизведение терминологии.* Это качество знаний формируется с помощью таких заданий:

1) Назовите записанные ниже свойства чисел: а) $a + b = b + a$; б) $(a + b) + c = a + (b + c)$; в) $a(b + c) = ab + ac$;

2) Четырехугольник, в котором противоположные стороны параллельны, называется...

1.2. *Воспроизведение фактов.* Это качество знаний формируется с помощью таких заданий:

1) Пусть a , b – катеты, c – гипотенуза прямоугольного треугольника. Какими из следующих равенств выражается теорема Пифагора: а) $a^2 = b^2 + c^2$; б) $c^2 = a^2 + b^2$; в) $c^2 = b^2 - a^2$;

2) Углы при основании равнобедренного треугольника...

1.3. *Воспроизведение алгоритмов.* Это качество знаний формируется с помощью таких заданий:

1) Выполните действия: а) $2 + (-1) = \dots$; б) $(-2)(-3) = \dots$;

2) Примените формулу квадрата суммы: а) $(a + b)^2 = \dots$; б) $(a + 2)^2 = \dots$;

3) Постройте треугольник по трем данным сторонам.

1.4. *Воспроизведение доказательств теорем (решений задач).* После того, как изучено какое-либо доказательство (решена задача), в целях закрепления предлагаются задания такого вида:

1) Расскажите доказательство теоремы (о сумме смежных углов, о равенстве вертикальных углов, теоремы Виета и т.д.);

2) Повторите доказательство утверждения: «Угол между биссектрисами двух смежных углов равен 90° ».

2. *Уровень понимания.* Этот более высокий уровень знаний представим следующими подуровнями. Он также относится к учебному материалу, который изучается в данный момент или был изучен ранее.

2.1. *Понимание понятий.* Это качество знаний формируется с помощью следующих заданий:

1) Является ли число $-0,5$: а) натуральным; б) целым; в) дробным; г) рациональным; д) иррациональным; е) действительным; ж) комплексным?

2) Является ли квадрат: а) ромбом; б) прямоугольником; в) параллелограммом; г) трапецией; д) n -угольником?

3) Могут ли параллельные прямые совпадать? Скрещивающиеся прямые – лежать в одной плоскости?

4) Какое из следующих чисел является рациональным, какое – иррациональным: а) $0,10100100010000\dots$; б) $0,100100100100\dots$; в) $2121121112111\dots$?

5) Какое из следующих равенств справедливо: а) $a^3 = a + a + a$; б) $a^3 = a \cdot a \cdot a$; в) $a^3 = 3a$?

6) Какое из следующих равенств справедливо: а) $\log_2 8 = 4$; б) $\log_2 8 = 3$; в) $\log_2 8 = \frac{1}{3}$;

7) Нарисуйте прямоугольный равнобедренный треугольник. Обозначьте и прочитайте внешние углы данного треугольника. Сколько внешних углов имеет каждый треугольник?

2.2. *Понимание фактов (аксиом, теорем).* Это качество знаний формируется с помощью следующих заданий:

1) Сформулируйте отдельно условие теоремы (аксиомы) и ее заключение;

2) Из каких частей состоит условие теоремы (аксиомы, задачи)?

3) Из каких частей состоит заключение теоремы (аксиомы, задачи)?

4) Запишите кратко теорему (аксиому) с помощью символических обозначений;

5) Сформулируйте теорему (аксиому) другими словами;

6) Сформулируйте теорему, обратную данной;

7) Приведите рисунок, иллюстрирующий аксиому: «Мера угла равна сумме мер углов, на которые он разбивается лучом, проходящим между его сторонами»;

8) Может ли быть в треугольнике два тупых угла?

9) Укажите центр и радиус окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$;

10) Постройте сумму двух данных векторов по правилу параллелограмма (треугольника);

11) Сколько неподвижных точек имеет осевая симметрия (центральная симметрия, параллельный перенос, поворот)?

12) Приведите числовой пример, подтверждающий distributive свойство умножения чисел относительно сложения.

2.3. *Понимание доказательств (решений задач).* Это качество знаний формулируется с помощью заданий, предусматривающих воспроизведение доказательства: а) с некоторыми изменениями формы его изложения (при другом расположении чертежа, других буквенных обозначениях); б) в более

структурированной форме, с выделением и нумерацией шагов доказательства (в соответствии с обозначенным планом доказательства); в) с обоснованием каждого шага доказательства.

3. *Уровень применения знаний.* Этот уровень содержит следующие подуровни (Предлагаемые ниже задачи приводятся из книги: А.И. Худобин, Н.И. Худобин, М.Ф. Шуршалов. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям: Пособие для учителей. Изд. 2-е. – М.: Просвещение, 1970. – 448 с.).

3.1. *Непосредственное применение знаний:* простейшие стандартные задачи (вычислите $\log_7 49$).

3.2. *Решение стандартных задач комплексного характера:* при их решении интегрируются знания из одной содержательной линии, например, линии тождественных преобразований (найдите $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$).

3.3. *Решение стандартных задач, предполагающих интегрирование различных однопредметных содержательных линий:* например, линии тождественных преобразований и уравнений или неравенств (решите уравнение $5\log_2 x = 3\log_2 x + 6$).

3.4. *Решение нестандартных задач – задач на доказательство* ($\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$).

3.5. *Решение нестандартных задач, предлагающих исследование решения* (решите уравнение и исследуйте решение относительно параметра a : $\lg x - \lg(x-2) = a$).

3.6. *Решение нестандартных задач, нестандартность задается новизной ситуации* ($\lg x + \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{4}\lg x + \frac{1}{8}\lg x + \dots = 2$).

3.7. *Решение нестандартных задач с межпредметным содержанием* (Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Периметр треугольника равен 12, а сумма логарифмов по основанию 60 сторон равна 1. Докажите, что треугольник – прямоугольный).

3.8. *Решение нестандартных задач повышенной сложности* (найдите целые корни уравнения $\log_{x+12} x^8 - \log_{\sqrt{x}}(x+12) = 0$).

С учетом описанных уровней знаний достаточно конкретно могут быть сформулированы образовательные цели. Например, по теме «Логарифмы и их свойства» образовательные цели могут быть поставлены следующим образом. На первом уроке: изучить логарифмы и их свойства, предусмотрев уровни воспроизведения, понимания и уровень непосредственного применения знаний. На этом уроке изучается теоретический материал, решение задач ограничивается приведением примеров на уровнях понимания и непосредствен-

ного применения знаний. Следующий урок может быть посвящен закреплению теоретического материала на этих же уровнях, дополнив их двумя новыми уровнями решения стандартных задач (уровнями 3.2-3.3). Образовательные цели третьего и последующих уроков могут быть посвящены исключительно уровням применения знаний. При этом могут быть выбраны различные стратегии планирования образовательных целей. Одна из них (более традиционная) состоит в последовательном переходе от одного уровня применения знаний к следующему более высокому уровню. При таком планировании переход к уровню 3.3. осуществляется после того, как будут решены все упражнения уровня 3.2. и т.д. Вторая стратегия предусматривает более быстрое продвижение по «лестнице» уровней. На втором и третьем уроках могут быть охвачены все уровни применения, рассматривая на этих уроках по 2-3 упражнения из каждого уровня. Решение задач ведется при этом как бы по «вертикальному срезу» всей системы задач, учащиеся быстрее вводятся во все многообразие задач по данной теме и методов их решения. Такой подход к планированию образовательных целей существенно повышает развивающие качества системы обучения, более тесно увязывает друг с другом образовательные и развивающие цели. Домашнее задание и решение задач на следующих уроках также могут быть спланированы в соответствии с данной стратегией. Важно иметь в виду, что выбор той или иной стратегии формирования образовательных целей приводит к различным системам обучения.

4. Постановка развивающих целей обучения математике

В умение постановки развивающей цели обучения мы включаем три основных составляющих: формулирование развивающей цели с учетом специфики изучаемой темы, планирование средств ее реализации, выделение критериев, позволяющих судить о степени достижения поставленной развивающей цели и дающих возможность корректировать процесс обучения. В психолого-дидактических исследованиях справедливо подчеркивается необходимость всестороннего, гармонического развития личности. Поэтому при изучении даже небольшого фрагмента учебного материала необходимо планировать

не одну какую-либо развивающую цель, а комплекс развивающих целей. При этом возможно, что одна из этих целей становится в данный момент ведущей, она выдвигается на первый план, а другие выступают в роли благоприятного фона, содействующего достижению главной цели. Вообще, необходимо стремиться к тому, чтобы каждая развивающая цель «работала» на усиление действия всех других целей (развивающих, образовательных, воспитательных).

Постановка развивающей цели предполагает понимание *основания*, лежащего в формулируемой цели, природы этого основания, степени его общности. Это необходимо для того, чтобы правильно подобрать соответствующие средства достижения данной цели и критерии проверки ее достижимости. Основанием формулируемой развивающей цели может служить то или иное качество ума. В этой связи возможны такие цели как развитие гибкости, критичности, оперативности, глубины ума, самостоятельности, широты мышления и т.д.

Важнейшими развивающими целями являются развитие способности: алгоритмического и эвристического мышления, свертывания и развертывания мыслительных операций, переноса мыслительных операций на новые ситуации, модификации мыслительных операций в ранее известных и новых ситуациях, цельности восприятия, памяти, оперирования укрупненной информации, «бокового» мышления, генерирования идей, их «сцепления», беглости речи.

Придерживаясь методов научного познания, возможна постановка следующих развивающих целей. Развитие наблюдательности, способности к целенаправленному экспериментированию по обнаружению закономерности, развитие умений описать результаты эксперимента на математическом языке.

В соответствии с логическими методами познания предметом развития может служить умение проводить анализ, синтез, обобщение, сравнение, аналогию, конкретизацию, индукцию, дедукцию, классификацию, абстрагирование и т.д.

Основание развивающей цели может быть ориентировано на наиболее общие математические методы, такие как метод математического моделирования, аксиоматический метод и др. Основание развивающей цели (общего характера) может быть конкретизировано применительно к специфике изучаемого материала. В этой связи могут ставиться, например, цели по развитию числовой, алгебраической, геометрической, комбинаторной интуиции и т.д. Актуальным при

обучении математике является развитие логического мышления, пространственного представления и воображения.

Важно, чтобы конкретизации развивающих целей общего плана не сводились к единичным случаям, а выстраивался своего рода ряд конкретизации. Например, для алгебраической интуиции такими конкретизациями могут служить развитие интуиции при выполнении тождественных преобразований, решений уравнений и неравенств, исследовании функций и построении их графиков. Развитие геометрической интуиции может быть конкретизировано по таким направлениям как развитие интуиции, связанной с применением метода равных треугольников, метода координат, геометрических преобразований, тригонометрии, векторов и т.д. Аналогично может конкретизироваться цель по развитию логического мышления применительно к изучению того или иного арифметического, алгебраического и геометрического материала. Примеры таких целей: развитие логического мышления в процессе применения метода равных треугольников при изучении перпендикулярности и параллельности прямых в курсе планиметрии, развитие логического мышления в процессе применения метода от противного при изучении признаков параллельности прямых в курсе планиметрии, развитие логического мышления при решении текстовых задач алгебраическим (арифметическим) способом и т.д. Примером предельной конкретизации может служить следующая цель: развитие наблюдательности, умения анализировать и делать индуктивные обобщения при подведении учащихся к теореме Виета (теореме Пифагора, Фалеса и т.д.). Предельной конкретизацией отличаются и такие цели как: развитие умений обнаружить замысел решения (план решения) таких-то задач, развитие умений по выполнению дополнительных построений при решении задач по такой-то теме, развитие умений по отысканию всех возможных случаев, подлежащих рассмотрению при решении данной задачи (доказательстве теоремы).

Возможные конкретизации цели по развитию критичности мышления: развитие умений найти ошибку, формирование установок на выяснение таких вопросов как: все ли данные задачи использованы при решении задачи, является ли задача определенной, с избыточными данными, недостающими данными, нельзя ли задачу решить иначе, проще, нельзя ли обобщить задачу (конкретизировать, составить аналогичную).

Цель по развитию гибкости мышления может быть конкретизирована следующим образом: развитие гибкости мышления в процессе применения признаков равенства треугольников к доказательству равенства отрезков, углов, параллельности и перпендикулярности прямых, решении задач, связанных с параллелограммом, трапецией, окружностью, изучением тригонометрических тождеств....

Обратим внимание на одну весьма существенную особенность развивающих целей, формулируемых в конкретной форме. Как правило, при их формулировании указываются средства достижения этой цели. Например, в формулировке цели «развитие гибкости мышления в процессе применения признаков равенства треугольников...» (см. выше) прямо указывается, на каких задачах эта цель будет достигаться. В одном классе это будут задачи на доказательство равенства отрезков, углов, параллельности и перпендикулярности прямых. Позже это будут задачи, связанные с параллелограммом, трапецией, окружностью. В последующем обучении это могут быть задачи, связанные с тригонометрическими тождествами и т.д.

Конкретная форма постановки развивающей цели при изучении теоремы Виета (см. выше) также содержит определенные указания на средства ее достижения. Предполагается рассмотрение нескольких квадратных уравнений, их корней, суммы и произведения этих корней (возможно оформление специальной таблицы), дальнейшая работа по обнаружению теоремы Виета связана с наблюдением такой таблицы, ее анализом, высказыванием соответствующей догадки (индуктивного обобщения).

Прием совмещения в одной формулировке цели обучения и указаний на средства ее достижения особенно полезен для начинающего учителя. Этот прием поможет ему отойти от формального, декларативного провозглашения цели обучения (например, в конспекте урока), поможет построить урок в соответствии с выбранной целью.

Учебники также подсказывают нередко средства достижения развивающих целей. Например, в учебниках геометрии Н.М. Рогановского, Е.Н. Рогановской и О.И. Тавгеня задачи систематизируются не только по тематическому признаку, уровням сложности, но и по тем или иным учебным проблемам: «Сколько решений имеет задача?», «Все ли случаи рассмотрены при решении задачи?», «Какие дополнительные построения необходимо выполнить при решении следующей задачи?» и т.п. В итоге соответствующие развивающие

цели (формирование умений определять число решений задачи, количество случаев, подлежащих рассмотрению при решении этой задачи и т.д.) непосредственно связываются с конкретными задачами, которые выступают средством достижения этих целей.

Система обучения также может подсказать средства достижения развивающих целей. Например: логическое развитие учащихся в процессе крупноблочного изучения признаков и свойств параллельных прямых в курсе планиметрии; развитие самостоятельности мышления при модульном изучении теоретического материала по теме формула корней квадратного уравнения; формирование умений поиска решения задач (с опорой на карточку-инструкцию, указания по решению задач, приводимые замыслы или планы решения задач...); развитие логического мышления в процессе решения задач повышенной трудности, формирование обобщенных умений по решению задач (по данной теме) на основе решения ключевых задач и т.д.

Остановимся еще на *критериях* (показателях) достижения тех или иных развивающих целей. Отметим, что многие из критериев применимы одновременно и к развивающим, и к образовательным целям. Например, беглость речи, свободное использование математической речи (устной, письменной), правильное использование математической и логической символики являются одновременно объективными критериями достижения достаточно высокого уровня развития и критериями глубоких знаний (знания понятийного и фактологического материала). В этом случае уместно говорить о наличии достаточно высокой культуры математической речи. В аналогичном смысле можно утверждать, что наличие культуры арифметических вычислений (выполнения тождественных преобразований буквенных выражений, чертежей, соответствующих условию геометрических задач и т.д.) является признаком достижения высоких уровней развития, знаний и умений. Критериями развития служат широта переноса знаний на новые ситуации, умение решать задачи повышенной трудности, наличие способности самостоятельного изучения теоретического материала по учебнику, умение пользоваться справочной литературой и т.д. Проявление учеником наблюдательности, догадки, находчивости, нестандартности мышления – также признаки устойчивой положительной динамики его развития. Склонность ученика к аналитико-синтетической деятельности – один из наиболее важных критериев наличия достаточно высокого уровня развития.

В аналогичном смысле умение пользоваться любыми другими логическими методами познания (и не только логическими) можно рассматривать как определенный признак (показатель) развития учащихся.

Для практических целей обучения чаще всего достаточно ограничиться качественной оценкой уровня развития учащихся: начальный уровень, средний уровень, высокий уровень. С ее помощью вполне успешно можно вести мониторинг динамики процесса развития учащихся.

5. Постановка воспитательных целей обучения математике

В постановку воспитательной цели включены следующие три составляющие: формулирование воспитательной цели (с учетом специфики изучаемого учебного материала), планирование средств ее реализации, установление обратной связи, позволяющей судить об эффективности реализации планируемой воспитательной цели. (Сравните со структурой постановки развивающей цели обучения.) Важно обеспечить интегративный подход к воспитанию, развитию и обучению на уроках математики. Необходимыми профессиональными качествами учителя математики являются: а) знание им основных воспитательных целей и б) умение их конкретизировать с учетом различных условий обучения.

К числу *основных воспитательных целей* относим:

- раскрытие роли математики в обеспечении гармонического развития интеллектуальных, эмоциональных, волевых и моральных качеств личности;

- приобщение учащихся к общественно значимым ценностям в области математики (общие черты математической деятельности и отражение их в других видах деятельности, математическое моделирование, прикладные аспекты математики, взаимодействие основ математики и ее приложений, ориентация учащихся на профессии, связанные с математикой и ее применениями);

- организация познавательной деятельности на уроках математики, способствующей развитию общественного сознания учащихся (формирование средствами математики научного взгляда на мир, разъяснение мировоззренческих вопросов, связанных с математикой и математической деятельностью, профилактика суеверий);

– организация познавательной деятельности при обучении математике, стимулирующей развитие творческих способностей личности (всестороннее использование потенциала математики для развития творческих начал личности);

– развитие активной жизненной позиции личности школьника в процессе изучения математики (привлечение учащихся к построению учебного процесса, к формированию целей, установок, мотивов, познавательных интересов, оценок учебной деятельности);

– формирование общения школьников в различных формах коллективной работы на уроках математики (умение работать в коллективе, участвовать в диалоге, диспуте, умение аргументировать свои суждения, уважительно относиться к суждениям других).

Непременным профессиональным умением учителя математики является умение конкретизировать воспитательные цели обучения с учетом имеющихся условий (специфики учебной темы, возраста учащихся, состава класса и т.д.). При формулировании воспитательной цели желательно указывать средства их достижения, планировать «обратную связь» с целью проверки эффективности воспитательного воздействия. Отдельно отметим воспитательные возможности исторического материала. Исторические экскурсы позволяют в доступной для учащихся форме раскрыть материалистическую основу происхождения математических понятий и фактов. Они положительно сказываются на эмоциональном отношении учащихся к учебному материалу, на воспитании их моральных качеств и развитии интеллекта. Незаменимым средством при этом являются также старинные задачи, задачи с занимательным сюжетом, математические игры и т.п.

Приведем некоторые конкретизации воспитательных целей:

– *Подчеркивание общественной значимости* изучения математики на примере задач, ориентированных на различные профессии (В шариковом подшипнике, плотно прилегая друг к другу, находятся 20 одинаковых по размеру стальных шариков диаметром 15 мм. Найдите длину внутреннего и наружного кольца качения (профессия инженера));

– *Организация познавательной деятельности*, способствующей становлению научного подхода к изучению окружающего мира (Объясните, возможно ли солнечное затмение сразу на всей Земле?);

– *Стимулирование активной жизненной позиции* на уроках математики путем привлечения их к конструированию учебного процесса (Например,

приступая к изучению свойств и признаков параллелограмма, говорим учащимся, что изучение можно построить по одному из следующих вариантов: а) теорию вопроса излагает учитель, затем проведет ее закрепление; б) теорию изучат учащиеся самостоятельно по учебнику, затем будет проведено ее закрепление у доски; в) ни учитель не будет рассказывать теорию в готовом виде и не будем пользоваться учебником, а постараемся сами самостоятельно додуматься до изучаемых свойств и их доказательств. Какой вариант выберем? (Реализуется тот вариант, на котором остановились учащиеся));

– *Организация общения школьников* в процессе коллективной учебной работы на примере подготовки им урока-семинара по теме «Осевая и центральная симметрии (в курсе планиметрии)». Для подготовки урока в процессе домашней работы сообщается его план: 1) Что такое осевая и центральная симметрии? Как строятся симметричные фигуры? 2) Какими свойствами обладают осевая и центральная симметрии? 3) Примеры решения задач на осевую симметрию; 4) Примеры решения задач с помощью центральной симметрии. Учащиеся дома готовят этот урок, затем проводят его. Каждый ученик получает для подготовки одно из приведенных четырех заданий. На уроке заслушивается сообщение ученика по своему вопросу, затем ведется обсуждение этого вопроса (закрепление, обратная связь), с помощью которого вносятся необходимые коррективы в познавательный процесс;

– *Формирование познавательного интереса* путем привлечения элементов истории на уроках математики. Например, можно для этой цели, использовать задачи, связанные с именами выдающихся ученых (Задача Архимеда: «В окружности радиуса R хорды AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке M . Докажите, что $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$, R – радиус окружности»);

– *Формирование познавательного интереса* при помощи задач занимательного характера (Задача Ньютона: «Мне нужна помощь, чтобы посадить девять деревьев в десять рядов так, чтобы в каждом ряду было три дерева. Скажи, как, – и я ничего больше у тебя не спрошу»);

– *Формирование познавательного интереса* путем подчеркивания элемента новизны, стимулирования отыскания различных способов решения задачи, поощрения стремления найти рациональный способ решения, решить задачу повышенной сложности, стимулирование заинтересованности отдельных учащихся идти опережающим, индивидуальным темпом обучения и т.д.

Приведем пример создания интереса подчеркиванием элемента новизны при изучении арифметической прогрессии. Учитель просит записать последовательности из ста чисел, отличающихся друг от друга на некоторое число (записи делаются с помощью учителя): 1, 2, 3, ..., 100; 1, 3, 5, ..., 199; 1, 4, 7, ..., 298.

Далее предлагает учащимся найти сумму чисел каждой из этих последовательностей. Пока учащиеся пытаются это сделать, учитель, проделав некоторые несложные вычисления, называет ответы: 5050, 10000, 14450. Учащиеся проявляют заметный интерес к тому, каким образом учителю довольно быстро удалось найти все три суммы. «Секрет» обнаруживается при ознакомлении учащихся с формулой суммы n членов арифметической прогрессии.

– Создание условий психологического комфорта при решении задач, которые требуют значительных интеллектуальных усилий. Пример такой задачи: «В $\triangle ABC$ из вершины B проведена медиана BM , K – произвольная внутренняя точка отрезка BM . Докажите, что если $\angle BAK = \angle BCK$, то $\triangle ABC$ – равнобедренный». Задача может быть решена с помощью осевой симметрии, теоремы синусов, метода от противного. Решение ее можно отнести на достаточно длительный промежуток времени (2-3 недели), при этом поощряется высказывание замысла решения задачи, отдельные шаги в правильном направлении, оказывается помощь в виде некоторых подсказок. Полезно предупреждение такого рода: «Внешне задача выглядит довольно обычно, но трудность решения позволяет рассматривать ее как олимпиадную задачу».

6. Самое трудное, но необходимое – комплексное планирование целей обучения, таблица целей, дерево целей, структура целей

Из различных целей обучения в более систематическом виде представлены образовательные цели. Поэтому комплексное планирование всех целей обучения можно начинать с образовательных, дополняя затем их воспитательными и развивающими целями. Такой порядок разработки целей оправдывается тем обстоятельством, что детальное планирование образовательных целей позволяет выявить наиболее важные логико-дидактические особенности изучаемого материала и в более полной мере учесть их при формулировании воспитательных и развивающих целей. Заметим также, что указанный порядок относится, главным образом, к технологии разработки целей обучения и не означает, что именно в таком порядке цели обучения будут ставиться в реальном учебном процессе. В реальном процессе, начиная изучать новую тему, необходимо, разумеется, мотивировать ее изучение, продемонстрировать необходимость новых знаний для решения конкретных практических задач, стимулировать познавательный интерес к изучению данной темы. Это оз-

начает, что первой ставящейся и решающейся целью является воспитательная цель. Рассмотрим один из возможных вариантов формирования целей обучения на примере темы «Логарифмы».

1. **Мотивация изучения логарифмов.** Приведение примера конкретной задачи, иллюстрирующей необходимость новых знаний, стимулирование познавательного интереса можно осуществить, ознакомив учащихся с барометрическим способом измерения высоты, используемым в летном деле. В основе этого способа лежит логарифмическая формула, которая приводилась выше: $h \approx 8000 \ln \frac{p_0}{p}$, где h – высота поднятия в метрах, p_0 и p – соответственно давление на уровне моря и на высоте h .

2. **Введение понятия логарифма.** Далее учитель вводит понятие логарифма, его обозначение, приводит пример вычисления: $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$. Учитель предлагает учащимся воспроизвести определение логарифма и найти некоторые логарифмы: $\log_3 9$, $\log_2 16$ и т.д. Образовательная цель, которая ставится в этот момент: формирование знания о логарифме на уровнях воспроизведения и понимания. Первые шаги в изучении логарифма могут быть тесно связаны с развивающими целями. Одна из них – развитие математической речи учащихся (путем воспроизведения определения логарифма и его обозначения). Другая развивающая цель направлена на стимулирование процесса понимания (осознания) понятия логарифма. В этих целях учитель сознательно ограничился одним примером логарифма, не пошел по пути «разжевывания» этого понятия, а спланировал ситуацию, предусматривающую активизацию мыслительной деятельности учащихся, повышение самостоятельности их в овладении данным понятием. Заметим, что систематическое использование данного приема приучает учащихся не «пасовать» перед малознакомыми понятиями, глубже вникать в их суть уже на начальном этапе изучения, проявлять сообразительность и догадку. Воспитательная цель (и средства ее достижения) на данном этапе изучения понятия логарифма: создание ситуации затруднения, формирование качеств личности, помогающих учащимся не терять чувство уверенности в малознакомых ситуациях, перевод ситуации затруднения в ситуацию успеха.

3. **Конкретизации понятия логарифма.** Рассматриваем две специальные конкретизации понятия логарифма. Сообщаем, что в математике часто применяются логарифмы по основаниям 10 и e , приводим соответствующие обозначения логарифмов. Возвращаемся к задаче, с помощью которой мотивировали необходимость изучения логарифмов. Находим, например, что если $p_0 = 760$ мм рт.ст., $p_h = 300$ мм рт.ст., то самолет находится на высоте $h \approx 8000 \ln \frac{760}{300} = 7436$ (м).

На этом этапе, как видно, была продолжена работа по развитию математической речи учащихся: их словарный запас пополняется терминами «десятичный логарифм», «натуральный логарифм». Образовательная цель включает в себя формирование знаний на уровнях понимания и непосредственного применения знаний (имея в виду примеры вычисления десятичных и натуральных логарифмов), одновременно с этим был «обозначен» уровень применения знаний при решении задач с межпредметным содержанием. В воспитательном плане, с целью подкрепления интереса учащихся, вычисление высоты полета самолета можно предварить вопросом «Ребята, как вы думаете, на какой высоте окажется самолет, если давление на этой высоте равно 300 мм рт. ст.?» высказанные предположения затем сравниваются с результатом вычислений.

4. Применение понятия логарифма к решению стандартных задач комплексного характера. На первом уроке целесообразно начать рассматривать стандартные задачи комплексного характера (т.е. задачи следующего более высокого уровня знаний): 1) Найдите логарифмы (если они существуют): а) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; б) $\log_2 \sin 225^\circ$ и т.д.; 2) Найдите основание x : $\log_x 2 = 2$ и т.д.

Образовательная цель на данном этапе: положить начало формирования уровня знаний – уровня решения стандартных задач комплексного характера. Развивающая цель: развитие догадки и сообразительности. Учитель при этом не спешит сообщить готовый ответ, дает возможность учащимся подумать, какое преобразование необходимо выполнить, полезны предупреждения типа «Не спешите проводить вычисления!», «Нельзя ли ответ найти устно?» и т.д. Воспитательная цель: поддержание ситуации успеха, поощрение учащихся, проявивших догадку в решении упражнений.

5. Домашнее задание: закрепить соответствующий теоретический материал (формулировку определения логарифма выучить наизусть), предлагаются также задачи, относящиеся к уровням применения знаний: уровню непосредственного применения и уровню решения стандартных задач комплексного характера. Взаимодействие всех целей обучения наглядно представим в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1

Таблица целей обучения на первом уроке по теме «Логарифмы»

Образовательная	Развивающая	Воспитательная
1-2-ой этапы урока		
О-1. Изучение понятия логарифма на уровнях воспроизведения и понимания.	Р-1. Развитие математической речи, стимулирование процессов понимания и самостоятельности учащихся.	В-1. Мотивация изучения логарифмов, предъявление практической задачи, решение которой требует знания логарифмов. Создание ситуации затруднений, перевод ее в ситуацию успеха.

Образовательная	Развивающая	Воспитательная
3-й этап урока		
О-2. Продолжение изучения понятия логарифма на уровнях воспроизведения и понимания. О-3. Обозначение уровня применения знаний при решении задач межпредметного (практического) характера.	Р-2. Продолжение работы по развитию математической речи учащихся (осваиваются термины «десятичный логарифм», «натуральный логарифм»).	В-2. Завершение мотивации изучения логарифмов, высказанной в начале урока: решается задача на нахождение высоты полета самолета барометрическим способом.
4-й этап урока		
О-4. Продолжение изучения понятия логарифма на уровнях воспроизведения, понимания и непосредственного применения. О-5. Обозначение уровня решения стандартных задач комплексного характера.	Р-3. Развитие догадки и сообразительности.	В-3. Создание ситуации успеха, поддержание интереса путем поощрения.
Домашнее задание		
О-6. Планирование заданий, предусматривающих закрепление изучаемого учебного материала на всех рассмотренных выше уровнях знаний (воспроизведение, понимание, непосредственное применение, решение стандартных задач комплексного характера).	Р-4. Развитие самостоятельности мышления учащихся. Р-5. Развитие умений переноса знаний на новые ситуации (в ходе решения стандартных задач комплексного характера).	В-4. Формирование уверенности учащихся в том, что они справятся с домашним заданием. Для этого предусматриваются некоторые приемы «поддержки» самостоятельной работы: более трудные упражнения предложить в классе, для домашней работы – либо аналогичной трудности, либо более легкие: задать упражнения, для которых в учебнике есть ответы, указания для их выполнения и т.д. В-5. Подчеркивание ответственности учащихся за выполнение домашнего задания.

Последовательность постановки целей на уроке такова: (В-1, О-1, Р-1) → (В-2, О-2, Р-2) → (В-3, О-3, Р-3) → (В-4, О-4, Р-4) → (В-5, О-5, Р-5). Эта последовательность образует своего рода «целевой маршрут», «путеводитель» урока. Цели урока можно представить в виде следующей схемы (дерева целей, схема 2.2).

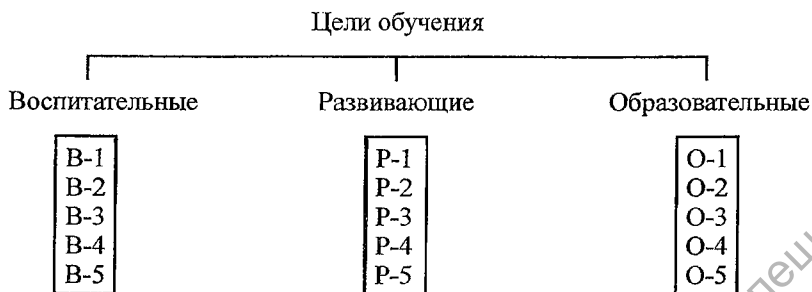


Схема 2.1. *Дерево целей обучения на первом уроке по теме «Логарифмы»*

Таблица 2.2

Структура целей урока на тему «Логарифмы»

Этапы урока	Цели урока
№ 1-2	В-1→О-1→Р-1
№ 3	О-2→О-3→Р-2→В-2
№ 4	О-4→Р-3→В-3
Домашнее задание	В-4→В-5→О-5→Р-4→Р-5

7. Задания для практического занятия

Задание 1. Первым практическим навыком, которым должен овладеть студент, является навык безошибочной дифференциации целей обучения по трем группам (образовательные, воспитательные и развивающие). В изучении данного вопроса, приобретении соответствующих умений помогут следующие задания.

а) Укажите, какие из следующих целей являются образовательными, воспитательными, развивающими:

- Математика является одним из элементов общечеловеческой культуры. Ее идеи и методы оказали большое влияние на методологию научного познания действительности. Завершенность, изящность математических формулировок, убедительная сила доказательств формируют чувство прекрасного. Эстетическое воздействие математики в соответствующих условиях сравнимо с воздействием шедевров искусства;

- Предусмотрены следующие цели обучения математике: овладение теми математическими знаниями, которые необходимы для практической деятель-

ности, изучения других дисциплин и продолжения образования; развитие умственных навыков, необходимых не только для математической деятельности, но и для полноценной жизни в обществе; выработка правильного представления о месте математики среди других наук, о возможностях математики в познании и описании действительности; воспитание таких черт личности, как целенаправленность, настойчивость в преодолении трудностей, самостоятельность, ответственность, самоконтроль, выразительность, точность и аргументированность высказываний, критичность и вариативность мышления.

б) Укажите, какие из следующих целей являются образовательными, воспитательными, развивающими. Основными целями изучения курса математики в V—VII классах являются:

- постепенное систематическое развитие понятия числа, выработка умений и навыков выполнять устно и письменно арифметические действия с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами;

- знакомство с основными геометрическими фигурами, их некоторыми свойствами, выработка умений узнавать геометрические фигуры, строить их с помощью линейки, угольника, транспортира, циркуля, использовать свойства фигур при решении простейших задач;

- постепенное формирование основных алгебраических понятий: переменной, выражения, формулы, уравнения, выработка умений составлять выражения, проводить их тождественные преобразования, решать линейные уравнения;

- выработка умений смоделировать текстовую задачу на языке математики и найти ответ на вопрос задачи, применяя усвоенные математические методы.

- Целями алгебраической части курса математики VII–IX классов являются: знакомство с понятием иррационального числа, множеством действительных чисел, изучение выражений, формул, уравнений, неравенств, функций как средств математического моделирования объектов и процессов действительности, приобретение навыков преобразований выражений и формул, достаточных для решения математических задач и задач других предметных областей;

- Целями геометрической части курса математики VII–IX классов являются: систематическое изучение плоских геометрических фигур и их свойств, систематизация и углубление представлений об измерении геометрических величин, выработка умений, необходимых для усвоения смежных дисциплин и следующего курса стереометрии;

- Целями обучения математике являются: формирование логики и интуиции учащегося, его пространственных представлений; развитие умственных качеств учащегося – смекалки, самостоятельности, критичности и гибкости

мышления; формирование познавательных процессов — внимания, восприятия, памяти, представления; формирование умственных операций — выделения, сверки, анализа, синтеза, структурирования, моделирования, интерпретации; формирование познавательных умений — поставить вопрос, выдвинуть и проверить гипотезу, применить знания, сделать вывод; формирование учебных умений — выделить главное, составить план, сформулировать цели.

Задание 2. Какие цели обучения конкретизируются в следующей характеристике требований к подготовке учащихся V–VII классов (содержательная линия «Числа и величины»):

- знать и правильно употреблять термины, связанные с различными видами чисел и способами их записи: натуральное число; класс; разряд; дробное число; числитель дроби; знаменатель дроби; обыкновенная дробь; десятичная дробь; процент; целое число; положительное число; отрицательное число; модуль числа; стандартный вид числа;

- уметь переходить от одной формы записи чисел к другой: заменять обыкновенную дробь равной ей обыкновенной дробью с другим знаменателем; заменять целое число и десятичную дробь равной им обыкновенной дробью; заменять обыкновенную дробь в тех случаях, когда это возможно, десятичной дробью; понимать, что не каждую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби; заменять десятичную дробь процентом; заменять процент десятичной дробью;

- знать связь между записями чисел, которые часто употребляются, например: $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ и т.д.

Задание 3. Какие цели обучения конкретизируются в следующей характеристике уровня предъявления к подготовке учащихся V–VII классов (содержательная линия «Числа и величины»):

- систематизировать знания о натуральных числах; получить представление о позиционной и непозиционной системах счисления; осознать процесс введения в математику новых чисел; понять, что развитие понятия числа, введение новых чисел продиктовано потребностями практики и внутренними потребностями самой математики; систематизировать знания о рациональных числах; научиться переходить от записи рационального числа десятичной дробью к его записи обыкновенной дробью и наоборот;

- уверенно выполнять арифметические действия над рациональными числами, находить целую степень рационального числа;

- овладеть понятиями и фактами, связанными с отношением делимости чисел, на уровне, достаточном для их применения при решении задач;

- понимать смысл и уметь пользоваться основными величинами.

Задание 4. Обратимся к постановке воспитательных целей. Они должны быть тесно связаны с содержанием урока. Это могут быть цели по формированию научного мировоззрения, сознательного отношения к учебе, развитию познавательной и общественной активности, культуры учебного труда, воспитанию общественной сознательности, расширению политехнического кругозора, подготовке к сознательному выбору профессии и т.д. Составьте список литературы по вопросам трудового, экономического, экологического воспитания, профессиональной ориентации на уроках математики.

Указание. Выполнение данного задания целесообразно распределить между различными студентами.

Задание 5. Развивающие цели должны находиться также в тесной связи с содержанием урока. Приведем примеры постановки развивающих целей: развитие у учащихся навыков применения анализа, синтеза, сравнения, аналогии, индукции, дедукции, обобщения, конкретизации, моделирования классификации; развитие у учащихся геометрической, алгебраической и числовой интуиции, пространственного представления и воображения, сообразительности, наблюдательности, памяти и т.д. Проанализируйте фрагмент учебника математики для V класса по теме «Десятичные дроби». Оцените его возможности для развития учащихся.

Задание 6. Разработайте таблицу и структуру целей обучения к некоторому фрагменту учебного материала.

Тема 3

ПРИНЦИПЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

- 1. Выбор принципов обучения**
- 2. Необходимость расширенной трактовки принципа научности обучения**
- 3. Интегративный принцип в обучении**
- 4. Система принципов обучения (подведение итогов)**
- 5. О технологии реализации принципов обучения**
- 6. Задания для практических и лабораторных работ**

1. Выбор принципов обучения

1.1. *Краткий обзор развития принципов обучения.* Принципы обучения (лат. *principium* – основа, первоначало) представляют собой наиболее крупные, основополагающие требования к построению процесса обучения. Они должны охватывать все составные части этого процесса, содействовать обеспечению его целостности и эффективности. Изменение условий практики обучения вызывает определенные изменения в составе принципов обучения, в содержании каждого принципа. С развитием методики преподавания математики совершенствуются и углубляются технологии реализации принципов обучения с учетом предметной специфики школьного курса математики. Актуальной является проблема комплексного применения принципов в обучении, выработки обобщенных умений, ориентации их на ту или иную систему или технологию обучения.

Подтвердим сказанное кратким обзором принципов в различной учебной литературе. Отметим, что существенное значение имеет то, какие принципы выделялись различными авторами, в какой последовательности они перечислялись, какой принцип считался наиболее актуальным в определенный период, какое содержание вкладывалось в принципы, в какой мере принципы обеспечивали целостность процесса обучения.

Некоторое представление о развитии принципов обучения дают следующие факты. Далеко не сразу они получили отражение в научной и учебной литературе. Так в Педагогической энциклопедии, изданной в 1928 – 1929 гг. (в 3 т. / Под ред. А.Г. Калашникова. – М.) дидактические принципы вообще не упоминались. В вузовском учебнике П.Н. Шимбарёва и И.Т. Огородникова (Педагогика. – М., 1954) описано всего пять принципов: систематичности и последовательности обучения, сознательности, прочности, доступности и наглядности.

В методике преподавания математики под ред. С.Е. Ляпина (М.: Учпедгиз, 1952. – С. 32-33) приводится шесть принципов: наглядности, прочности, систематичности, доступности, единства теории и практики.

В методике преподавания математики в средней школе В.М. Бадиса (М.: Учпедгиз, 1954. – С. 45-51) особо выделяются принципы сознательности, наглядности, систематичности, прочности, активности и самостоятельности учащихся, генетического характера изложения, единства теории и практики, научности.

В Педагогическом словаре (М.: Изд. АПН РСФСР, 1960. – Т. 2. – С. 178-180) выделяются девять принципов: связи теории с практикой в обу-

чении, воспитывающего обучения, научности, систематичности, сознательности и активности учащихся, наглядности, доступности, индивидуального подхода к учащимся.

Эти принципы брались за основу изложения многих учебных пособий по методике преподавания математики.

В Педагогике математики А.А. Столяра (Мн.: Высшая школа, 1974. — С. 65-81) принципы приводятся в такой последовательности: научности, сознательности, активности, наглядности, прочности, индивидуального подхода. Эти принципы приводятся в своеобразной трактовке деятельностного подхода, которая, к сожалению применения в практике обучения не получила.

В методике преподавания математики в средней школе: Общая методика Ю.М. Колягина, В.А. Оганесяна, В.Я. Саннинского и Г.Л. Луканкина (М.: Просвещение, 1975) приводится такой же набор принципов, как и в предыдущем источнике, и добавляется принцип воспитания в обучении математике.

В более поздних изданиях расширяется состав принципов, усиливается их системообразующая роль в организации процесса обучения. Например, в курсе педагогики под ред. Ю.К. Бабанского (Педагогика. — М.: Просвещение, 1988. — С. 43-62) сформулированы следующие принципы: целенаправленности педагогического процесса, связи школы с жизнью, научности содержания воспитания и обучения, доступности, учета возрастных и индивидуальных особенностей учащихся, систематичности и последовательности, сознательности, активности, самостоятельности и творчества учащихся, наглядности, коллективного характера воспитания и обучения, уважения личности ребенка в сочетании с разумной требовательностью к нему, оптимального выбора методов, форм и средств обучения, прочности, осознанности и действенности результатов образования, воспитания и развития, комплексного подхода к воспитанию.

Отметим, что расширение состава принципов приводит к целесообразности объединения их в некоторые группы.

1.2. Необходимость выбора принципов единства процесса обучения. Большую системообразующую функцию выполняет *принцип целенаправленности педагогического процесса*, единства его целей. Этот принцип связывает все составляющие процесса обучения, действует его целостности. Однако, на наш взгляд, он служит частью *принципов единства процесса обучения*, которые предполагают обеспечение совместимости всех частей процесса обучения, комплексный учет их взаимовлияния друг на друга.

Наряду с целями, значительной связующей силой обладает предметное (в нашем случае — математическое) содержание. Учет предметной специфики курса математики в целом и составляющих его

учебных тем по своей значимости заслуживает выделение его в качестве специального принципа, который мы называем *принципом учета предметной специфики учебного курса*.

В обеспечении единства процесса обучения значительную роль может играть выделение в качестве принципа обучения *принципа управляемости процесса обучения* (планирование целей и задач обучения, учет применяемых методов, средств и форм обучения, эффективное использование обратной связи в обучении, контроль знаний, стимулирование познавательного интереса, формирование внутренней мотивации и т.д.).

В итоге *принципы единства процесса обучения* представлены в данной работе следующими принципами: *единства целей (целенаправленности) процесса обучения, учета предметной специфики учебного курса и управляемости процесса обучения*.

1.3. Характеристика принципа единства целей обучения (целенаправленности процесса обучения). Еще М.В. Ломоносов высоко оценил развивающие возможности математики (вспомним его высказывание: математика – это гимнастика ума). Однако автоматически, без каких-либо усилий, этот тезис в обучении не реализуется. Со стороны учителя требуется высокий профессионализм.

Принцип единства целей обучения предполагает, что его реализация осуществляется одновременно во всех составных частях процесса обучения (при целеполагании, отборе содержания, использовании средств, методов и форм обучения), в любом его локальном акте. Благодаря этому составные части процесса обучения сливаются в единый процесс.

В мировой массовой практике, по-видимому, трудно отыскать пример последовательного осуществления принципа единства целей. Поэтому с полным правом можно считать, что этот принцип ориентирован на будущее, на перспективу развития средней школы.

Советская школа характеризовалась в основном как образовательная. Она обеспечивала достаточно высокий образовательный уровень, развивающей стороне обучения уделялось меньше внимания. Образовательный уровень нередко обеспечивался тотальной перегрузкой учащихся. Большая ответственность лежит на проводимых реформах средней школы. Снижение учебной нагрузки учащихся, без повышения эффективности обучения и прежней «недооценки» развивающей стороны обучения может привести к кризису средней школы.

Считается, что в массовой средней школе Западной Европы и США акцент в обучении делается на развитие учащихся, что нередко проявляется в снижении образовательной подготовки. Заметим, что развивающее обучение легко подменить некоторой его видимостью, свести к поверхностным, неглубоким результатам – своего рода *псевдоразвитию*. Международный опыт свидетельствует в пользу принципа единства целей обучения и показывает, насколько сложна проблема его реализации в практике обучения.

При планировании целей, содержания, средств, методов и форм обучения учитель призван обеспечить решение всего комплекса развивающих, образовательных и воспитательных целей обучения математике. Ранее отмечалось, что цели обучения во многом определяют процесс обучения в целом. Тот или иной подход к целеполаганию и реализации целей (в содержании, средствах, методах и формах обучения) приводит к различным системам и технологиям обучения и что особенно важно – к различным результатам обучения.

Принцип единства целей обучения призван обеспечить их равенство, многосторонний учет взаимного влияния друг на друга: знания должны служить средством развития и воспитания, полученное развитие – средством дальнейшего повышения образовательного уровня и воспитанности учащихся и т.д.

Принцип единства целей обучения реализуется также при помощи соответствующим образом ориентированной системы методов и форм обучения. Особенно ценной в этом отношении является систематизация методов обучения в зависимости от уровня познавательной деятельности ученика. Наиболее высокие уровни познавательной деятельности ученика правомерно связываются с проблемными методами обучения (проблемным изложением, эвристической беседой, исследовательским методом). Однако, на наш взгляд, не следует принижать, и тем более отрицать, развивающие возможности репродуктивного метода обучения. При сообщении учебной информации в готовом виде могут развиваться такие качества как глубина, скорость восприятия и понимания, прочность запоминания, готовность к воспроизведению крупной порции информации, способность к выделению в ней главных наиболее существенных связей (часто это требует значительных психических и интеллектуальных усилий).

Методы обучения, классифицируемые по источнику знаний (словесные, наглядные, практические), также обладают значительными возможностями для усиления развивающего обучения.

Для развития интеллектуальных умений важно овладеть различными методами научного познания. Особую роль в этом плане играют логические методы познания (анализ, синтез, индукция, дедукция, обобщение, конкретизация, абстрагирование и т.д.). Поэтому для школьного курса математики важна систематизация методов обучения на основании логических методов. Отметим, что эти методы обладают значительной дидактической общностью и широтой сферы применения. Систематически пользуясь логическими методами (через соответствующие методы обучения), мы делаем их, по существу, предметом обучения. В этих условиях общелогические интеллектуальные умения формируются более целенаправленно, системно и интенсивно. Умение учащимися проводить анализ, синтез, сравнение, индукцию, дедукцию и т.д. является одновременно важнейшим показателем и средством их умственного развития.

1.4. Пример сочетания образовательной и развивающей компонент обучения на учебном материале, посвященного введению понятия координат вектора на факультативном занятии.

1. Учитель сообщает учащимся тему урока: «Мы познакомимся с новым понятием – координаты вектора».

2. Далее он мотивирует необходимость изучения нового понятия: зачем нужны координаты вектора. (Как и координаты точки, они помогают определять положение вектора на плоскости; с помощью координат вектора излагается векторная алгебра.)

3. Затем учитель подводит учащихся к важной математической идее: каждой геометрической закономерности в расположении двух векторов отвечает некоторая арифметическая закономерность, и наоборот. Для этого он приводит рисунок, на котором изображена координатная сетка и на ней несколько векторов. Спрашивает, какие векторы расположены «одинаково» на координатной плоскости, а какие – «неодинаково». Ученики говорят, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.1) расположены «одинаково», а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, например, «неодинаково».

4. Учитель одобряет ответы учащихся и объясняет, что отмеченная геометрическая закономерность в расположении двух векторов вызвана арифметической закономерностью: в первом случае векторы имеют равные координаты, во втором случае координаты векторов не равны.

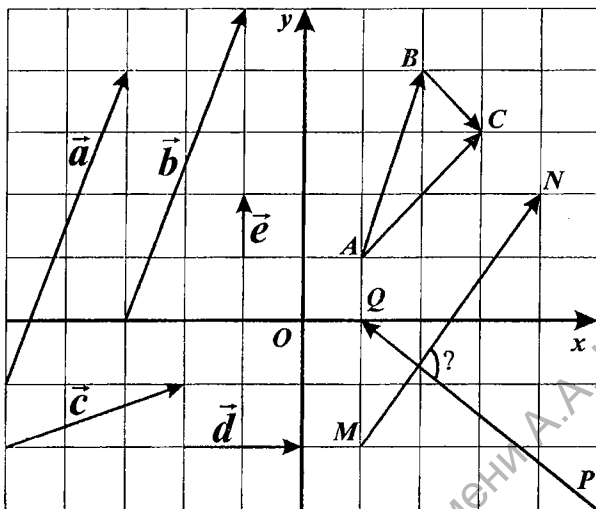


Рис. 3.1

5. Далее учитель обращается к классу: «Как же определить координаты вектора?». (Для этого необходимо знать координаты начала и конца вектора. Если от координат конца вектора отнять одноименные координаты начала, то полученная пара чисел и есть координаты вектора.)

6. Затем учитель ставит новый вопрос: «Можно ли определить координаты вектора по чертежу?». (Выясняется, что для этого надо сосчитать число «клеток» при движении от начала вектора к его концу сначала вдоль оси x , затем вдоль оси y , учитывая при этом направление движения. Например, чтобы «пройти» от начала вектора $\vec{a}$ к его концу, надо в направлении оси x «пройти» 2 клетки (значит, первая координата вектора равна 2), затем в направлении оси y — 5 клеток (значит, вторая координата вектора $\vec{a}$ равна 5). Таким образом, вектор $\vec{a}$ имеет координаты 2 и 5: $\vec{a}(2; 5)$. Полученный результат полностью согласуется с определением координат вектора.)

7. Далее вырабатывается навык чтения координат вектора по чертежу. Рассматривая на рисунке другие векторы, ученики показывают, как надо «пройти» от начала вектора к его концу, как считать клетки направления движения; называют и записывают координаты векторов. Возможные ошибки исправляются. Предлагаются другие задания такого рода. Учитель добивается, чтобы все учащиеся справились с ними.

8. Учащимся предлагается установить некоторые закономерности в расположении вектора на координатной сетке, связанные с изменением той либо другой его координаты: координата уменьшается, оставаясь положительной;

равна нулю, принимает отрицательные значения. В итоге учащиеся замечают, что если первая координата вектора равна нулю, то вектор располагается «вертикально», если вторая координата равна нулю, то вектор располагается «горизонтально», если первая координата уменьшается, оставаясь положительной, то увеличивается угол наклона вектора к оси абсцисс, вектор располагается «круче». Замечаем, что координаты определяют направление вектора, угол наклона вектора к оси абсцисс, длину вектора и т.д.

9. На координатной сетке строится $\triangle ABC$ с вершинами в узлах сетки, предлагается рассмотреть координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$. В итоге обнаруживается, что координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ получаются сложением одноименных координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

10. На координатной сетке строятся два вектора $\overrightarrow{PQ}(3; 4)$ и $\overrightarrow{MN}(-4; 3)$. Выясняются, что эти векторы лежат на перпендикулярных прямых. Предлагается найти значение выражения $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3$. Оно оказывается равным нулю. Случайно ли получилось это значение, или закономерное?

В итоге целенаправленно проведена работа по развитию числовой и геометрической интуиции учащихся в их тесной связи друг с другом. Учащиеся научились «считывать» координаты вектора, изображенного на координатной сетке. У них возникли наглядные представления о влиянии координат вектора на его расположение на координатной сетке. На наглядном уровне убедились, что между геометрическими и числовыми закономерностями существуют глубокие связи. Сформированные наглядные представления, безусловно, помогут учащимся в изучении всей темы, посвященной векторной алгебре.

1.5. Принцип учета предметной специфики учебного курса. С учетом предметной специфики учебного материала конкретизируются цели обучения, подбираются средства, методы и формы обучения. Существенное значение имеют такие параметры учебного материала как его объем, сложность, степень абстрактности, трудности, уровень научности, строгости, систематичности, интегрированности и т.д.

Для определения предметной специфики учебного материала целесообразно проводить его *логико-дидактический анализ*. Предметом логико-дидактического анализа может быть отдельная единица учебного материала (определение, теорема, доказательство, задача), отдельная учебная тема, несколько учебных тем, материал всего курса. С помощью логического анализа выделяются наиболее важные понятия и предложения, характеризующие содержание учебно-

го материала, и связи, в которых находятся эти понятия и предложения (внутритемные, внутрипредметные, межпредметные). При помощи дидактического анализа дается оценка сложности и трудности учебного материала и с учетом этого определяются особенности реализации принципов обучения, их комплексного применения, планируется целесообразное сочетание средств, методов и форм обучения, формулируются конкретные рекомендации для построения системы уроков.

В ходе дидактического анализа необходимо установить, каким развивающим и воспитательным потенциалом обладает данный учебный материал, какие средства, методы и формы обучения способны реализовать этот потенциал в обучении наиболее полно.

Предупреждение явления «*квазиразвития*» достигается благодаря использованию фундаментального компонента. Для этого необходимо обеспечить полноту и систематичность представления знаний в школьном курсе (мировоззренческих, методологических, теоретических, практических) и соответствующих им умений и навыков. Задание достаточно высокого доступного уровня обучения позволяет теснее увязать друг с другом развитие и образование (один из принципов развивающего обучения по Л.В. Занкову). Важным средством соединения образовательного и развивающего обучения служит практика решения нестандартных задач, задач повышенной трудности, задач интегративного характера. В этих целях полезно систематизировать задачи по каждой учебной теме по трем группам сложности, отнеся к уровню обязательных требований задачи первых двух уровней и возможно часть задач третьего уровня; остальные задачи третьего уровня рассматривать на уровне предъявления. Увеличивая часть задач третьего уровня, рассматриваемых со всеми учащимися, можно поднимать уровень обязательных требований, приближая его к уровню предъявления. Следует учитывать, что систематическое обращение к уровню предъявления служит средством гарантированного обеспечения уровня обязательной образовательной подготовки.

Сложный материал предполагает больше помощи учащимся со стороны учителя в его усвоении, в обеспечении понимания. Обращение к самостоятельной работе учащихся, при наличии больших проблем с пониманием учебного материала, по меньшей мере, может оказаться неэффективным.

Структурная сложность учебного материала, отдельных его элементов предполагает обращение к анализу логического строения (структуры) определений, теорем, доказательств, решений задач. В этом случае полезными окажутся различные приемы структуризации учебного материала.

Если учебный материал отличается высокой абстрактностью, то изучается возможность применения средств наглядности, наглядного метода обучения, метода конкретизации и т.д.

Если учебный материал знакомит учащихся с математическим методом, то целесообразно обратиться к методам обобщения и конкретизации, позволяющими усвоить этот метод в обобщенном виде и дающими возможность ознакомиться с наиболее типичными примерами его применения.

Если дидактический анализ показывает, что учебный материал является легким для учащихся, то возможно изложение его учителем в виде рассказа, лекции, либо планируется самостоятельное его изучение с привлечением учебника, таблиц, кодопозитивов и т.д.

1.6. Принцип управляемости процесса обучения. Управление процессом обучения может быть *стратегическим* и *тактическим*. *Стратегическое управление* выражается в выборе определенной системы и технологии обучения, задающих ту или иную конкретизацию целей, содержания, средств, методов и форм обучения. Процедуры выбора и конкретизации являются важнейшими составляющими управления. Стратегическое планирование осуществляется в процессе выбора и конкретизации принципов обучения, обеспечивающих единство, целостность и целенаправленность процесса обучения.

Тактическое управление осуществляется внутри определенной системы или технологии обучения и строится с учетом общего их характера и особенностей.

Примером стратегического управления служит составление учебных программ и стандартов математического образования. Тематическое планирование, разработка планов-конспектов системы уроков – примеры тактического управления.

Важнейшим средством и стратегического, и тактического управления является учебник. Управление при помощи учебника осуществляется путем выделения в учебнике основного и дополнительно текстов, материала для самостоятельного изучения, путем применения приемов и средств выделения главного и второстепенного,

мотивации, подчеркивания новизны учебного материала. Положительную роль играют шрифтовые выделения, наличие обобщающего резюме. Стратегическое управление осуществляется с помощью формирования системы задач (распределение задач по уровням сложности, по виду учебных проблем, выделение ключевых задач, задач, формирующих обязательные умения и навыки, задач для самоконтроля и т.д.).

По своему стилю управление может быть *авторитарным* (управленческие функции выполняет учитель, администрация школы, района и т.д.) и *неавторитарным* (к организации процесса обучения привлекаются учащиеся – самоуправление, педагогика сотрудничества). Стимулированию самоуправления служит, к примеру, предложение учащимся выбрать из числа обозначенных средства, методы и формы обучения. Этой же цели служит и согласование с учащимися характера оценки (например, учитель договаривается с учащимися о том, что при оценивании будет учитываться не только качество ответа, но и догадка, сообразительность, самостоятельность мышления и т.д.).

Непосредственное управление процессом обучения осуществляется на внутришкольном уровне и, прежде всего, учителем математики.

Особую роль играет *оперативное управление*, опирающееся на обратную связь. Обратная связь (от ученика – к учителю) дает учителю информацию о качестве усвоения учебного материала и позволяет ему своевременно вносить необходимые коррективы в процесс обучения.

На основании понятия обратной связи выделяются три вида обучения: *неуправляемое* (обратная связь отсутствует), *слабоуправляемое* (обратная связь используется эпизодически), *управляемое* (обратная связь осуществляется систематически).

В психологическом плане важно, чтобы обратная связь сопровождалась преимущественно положительной оценкой учащихся, носила адресный характер (ты правильно понял, усвоил, решил, нарисовал, ответил, заметил, догадался, сообразил, проанализировал, обобщил и т.д.).

Средства управления делятся на *автоматизированные* и *неавтоматизированные*. К автоматизированным относятся устройства, осуществляющие обратную связь без непосредственного участия

учителя (компьютер, телевидение, радио, кино, диафильм, кодопозитивы, магнитофон, видеозаписи, программированные печатные материалы, карточки и т.д.).

Неавтоматизированные средства управления представляют обратную связь в виде устных или письменных вопросов и заданий, которые ставятся и оцениваются непосредственно учителем (беседа, собеседование, диагностическая самостоятельная работа и т.д.).

Методы управления: активизация познавательной деятельности учащихся, ориентация на определенные цели, стимулирование готовности к определенной деятельности, включение учащихся в деятельность, регулирование и координация учебной деятельности, контроль со стороны учителя, самоконтроль и др.

Виды контроля: текущий, периодический и итоговый. Формы контроля: фронтальный, групповой, индивидуальный, комбинированный и самоконтроль. Методы и способы контроля: устный опрос, контрольная работа, уплотненный опрос, самостоятельные работы контролирующего характера, объективный автоматизированный или неавтоматизированный контроль.

Совершенствованию подлежит *техника оценивания учащихся*. Переход от пятибальной к десятибальной шкале представляется оправданным: повышается точность измерения результатов обучения. Она может быть использована не только для оценки уровня знаний, умений и навыков, но и оценки развития учащихся. Наблюдательность, догадку, интуицию, изобретательность, умение пользоваться анализом, синтезом, индукцией, дедукцией – необходимо ценить выше, чем простое воспроизведение заученного материала. Творческий подход к нестандартным ситуациям должен стать критерием выставления наиболее высоких баллов в этой системе. Самостоятельное изучение части теоретического материала и решение учащимися нестандартных задач одновременно является показателем как высокого образовательного уровня, так и высокого уровня развития.

Более высокие оценки связаны с систематической самостоятельной работой учащихся с учебником, самостоятельным изучением ими части теоретического материала, самостоятельным решением задач (до показа образцов их решения учителем).

2. Необходимость расширенной трактовки принципа научности обучения

2.1. *Два главных аспекта принципа научности.* Обратимся к принципу научности обучения. Традиционно используется узкая трактовка этого принципа, ограничивающаяся рамками предметного содержания учебного курса: установление связи между содержанием науки (в нашем случае – математики) и учебным курсом, обеспечение точности, ясности, разумной строгости изложения, ознакомление с методами научного познания. В такой трактовке данный принцип больше всего влияет на содержание обучения, на остальные составляющие процесса обучения его влияние не столь заметно и во многом носит опосредованный характер. Более широкая трактовка призвана охватывать весь процесс обучения, обеспечивать возможность непосредственного влияния его на цели, средства, методы и формы обучения. Если, к примеру, некорректно ставятся цели обучения, или неправильно применяются средства, методы и формы обучения, или выхолащивается суть тех или иных технологий обучения, то как такое обучение можно считать научным?

Наряду с *предметной научностью*, в обучении не в меньшей мере необходима и *психолого-дидактическая научность*. Поэтому мы выделяем вторую группу принципов, включая в нее два принципа – *принцип научности предметного содержания учебного курса* и *принцип психолого-дидактической обоснованности процесса обучения*.

Указанные принципы действительно охватывают весь процесс обучения. Цели реализуются при помощи целевой систематизации учебного материала, в содержании и средствах обучения закладывается определенная строгость изложения, та или иная форма связи с современной математикой, методы и формы обучения строятся на базе научных основ определенных систем и технологий обучения.

При помощи целевой систематизации осуществляется взаимное влияние принципа единства целей и принципа научности. Осознание подобных связей между принципами помогает воспринимать их не как набор изолированных постулатов, а как определенную систему исходных, взаимосвязанных положений, определяющих основные требования к построению процесса обучения.

Остановимся на анализе взаимодействия указанных двух аспектов научности в различных формах дифференциации обучения. Осо-

бый интерес представляет установление роли временного фактора. Для школьного курса математики основными (научными) методами систематизации являются: целевая, логико-математическая и психолого-дидактическая систематизации.

2.2. *Принцип научности предметного содержания учебного курса.* Следуя традиции можно выделить следующие аспекты реализации принципа научности в обучении: реализация его в учебнике, обеспечение высокого научного уровня изложения учебного материала учителем на уроке (последовательность и систематичность изложения учебного материала, соответствие содержания учебника современному уровню науки); выработка у учащихся учебно-исследовательских навыков и умений.

Систематические знания характеризуются как знания о научных основах учебного предмета. Они формируются на основе усвоения понятий и фактов в определенной логической последовательности. Наиболее полное свое выражение этот принцип находит в *систематических курсах математики*. Можно выделить три вида систематизации учебного материала: *целевая, логическая и психологическая*.

В качестве методов систематизации широко применяются индуктивные и дедуктивные методы, аналогия, обобщение, конкретизация и др.

Встречаются попытки «ревизии» принципа систематичности, которые выражаются в отказе от изложения в среднем звене обучения основ науки. (Такая идея высказана, например, М.М. Постниковым.) В отдельных странах (например, в Англии, Швеции, Финляндии), по существу, отказались от систематического курса геометрии. Это обстоятельство не замедлило отрицательно сказаться на уровне логического развития учащихся, на их возможностях в усвоении курса математики.

Различают еще *системные знания*. Они характеризуются, прежде всего, как методологические знания основ научной теории. Одним из средств формирования системных знаний является включение в учебник сведений о математической теории и способах ее построения.

Выделим следующие *составные части знания о математической теории*: 1) что является предметом изучения данной теории; 2) какие понятия являются неопределяемыми; 3) какими аксиомами

описываются неопределяемые понятия; 4) какой эмпирический материал лежит в основе аксиом; 5) какие понятия являются определяемыми; 6) какие факты доказываются (являются теоремами). Выясните, в какой мере школьные учебники отражают сведения о математической теории. Своевременные пояснения на этот счет, безусловно, способствуют формированию системных знаний.

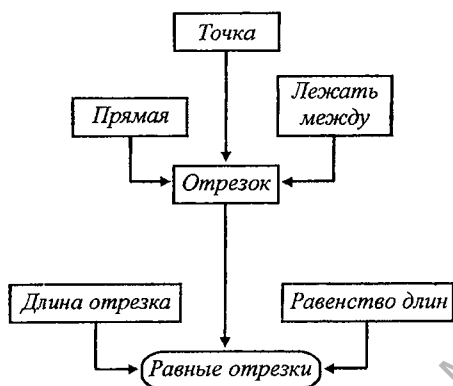


Рис. 3.2

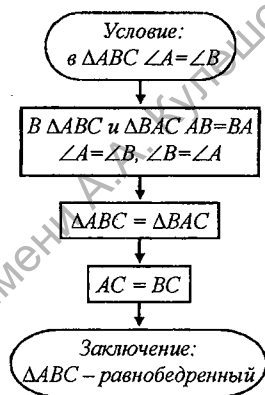


Рис. 3.3

Хорошим педагогическим приемом, иллюстрирующим связь между понятиями (а значит, и систему понятий), является приведение учащимся *логико-структурных схем*. Выше приводится пример такой схемы (рис. 3.2) для понятия равных отрезков. С помощью этих схем учащимся необходимо разъяснить, что определения устанавливают связи между понятиями, выполняют упорядочивание понятий, расположение их в определенной системе.

Если связи между понятиями устанавливаются с помощью определений, то связи между фактами (теоремами) выявляются в ходе проведения доказательств. В процессе построения доказательств осуществляется упорядочивание математических фактов, приведение их в систему.

Логико-структурная схема доказательства наглядно представляет связи между фактами. Такие схемы в значительной степени способствуют формированию у учащихся системы знаний. Читателю предлагается оценить с этой точки зрения логико-структурную схе-

му доказательства следующей теоремы: «Если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный» (рис. 3.3).

Научность изложения обеспечивается достижением необходимой дидактически обоснованной его строгости. Максимальная строгость возможна в рамках аксиоматической теории. Однако последовательное аксиоматическое построение школьного курса математики недоступно учащимся. Поэтому в методике преподавания математике ограничиваются лишь вопросом об отражении в школьном курсе идей аксиоматического метода, об определенной мере использования в нем аксиоматического подхода. Аксиоматический подход выражается в построении теоретического материала с использованием аксиом, в построении системы определений понятий и доказательств теорем. В большей мере аксиоматический подход по традиции представлен в курсе геометрии и в меньшей мере – в курсе алгебры.

В различных формах дифференциации обучения строгость изложения учебного материала может отличаться друг от друга.

Основным показателем научности обучения является качество знаний, умений и навыков учащихся, уровень их развития. Приведем некоторые признаки, свидетельствующие о том, что научность в обучении обеспечена на высоком уровне:

- учащиеся свободно владеют математической речью, математической символикой;
- показывают неформальное усвоение учебного материала, его понимание;
- чувствуют потребность в доказательстве математических утверждений, в строгих обоснованиях;
- проявляют критичность в отношении своих суждений и суждений других участников учебного процесса;
- отличают математические доказательства от эмпирических методов, от обоснований методом неполной индукции, по аналогии и т.д.;
- показывают признаки аналитико-синтетического мышления;
- знания теоретического материала обладают обобщенностью, доведены до уровня соответствующего математического метода;
- проявляют способность к избирательному и совместному применению различных математических методов; к отысканию рациональных решений задач;
- проявляют настойчивость в решении задач повышенной сложности и достигают при этом определенных успехов;

- владеют навыками учебно-исследовательской деятельности, осознают процесс получения знаний, решения задач.

Низкий уровень знаний и развития учащихся – признак плохого обеспечения научности обучения. О потере научности обучения свидетельствуют следующие признаки:

- участники учебного процесса нечетко излагают теоретический материал; путают аксиомы, определения и теоремы; не понимают сути доказательств, не чувствуют потребности в них;
- слабо развита математическая речь;
- участники учебного процесса допускают математические ошибки, которые ими не замечаются и не устраняются;
- учащиеся испытывают значительные затруднения уже при решении задач на непосредственное применение знаний.

К потере научности приводят два основных пути: а) учитель излагает материал на завышенном научном уровне, который, к сожалению, оказывается недоступным учащимся; б) учитель излагает учебный материал на невысоком научном уровне, крайне поверхностно, формально, опуская большинство доказательств теорем, решая с учащимися только самые первые, простейшие задачи.

Научность содержания школьного курса математики означает не только обеспечение его математической и логической корректности, но и поддержание определенной связи школьного курса с современной математикой, с ее идеями, понятиями, фактами и методами.

Это направление реализуется в школьном курсе путем включения в него теоретико-множественных понятий, новых тем (координат, векторов, геометрических преобразований, производной, интеграла, сведений из комбинаторики, теории вероятностей и т.д.).

Мера обновления школьного курса существенно зависит от того, насколько рано вводятся новые темы, как часто они используются при изложении другого учебного материала.

Пример нарушения принципа научности. На уроке геометрии решается задача: «Стороны данного треугольника 3,5 см, 4 см, 8 мм. Большая сторона второго треугольника, подобного данному, 6 см. Вычислите стороны второго треугольника». На доске делаются следующие записи.

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $AB = 3,5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 0,8$ см, $B_1C_1 = 6$ см.

Найти: A_1C_1, A_1B_1 .

Решение: $k = \frac{6}{4} = 1,5$, $A_1B_1 = 3,5 \cdot 1,5 = 5,25$, $A_1C_1 = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2$.

В заключение этой работы ученику ставится вопрос: «На какой признак подобия при решении данной задачи мы опирались?» Ответ ученика: «На первый». В чем проявилось нарушение принципа научности?

2.3. Принцип психолого-дидактической обоснованности процесса обучения. Эффективность реального процесса обучения во многом зависит от его психолого-дидактической обоснованности. Целостность этого процесса, его направленность на конечный результат зависят от ориентации процесса обучения на парадигму обучения, на соответствующую ей технологию обучения. В этих целях используются различные концепции (теории) усвоения и развития учащихся. Довольно распространенным является мнение о том, что эти концепции и теории весьма схематично, неполно и недостаточно глубоко отражают «живую картину» психических процессов. Это мнение часто оказывается небезосновательным и порождается трудностями изучения психики человека, носящей в высшей степени сложный и интегративный характер. Особенно ощущается недостаточность научной информации по управлению и развитию психических процессов.

Актуальным является исследование возможностей дополнителности и сочетания некоторых психолого-дидактических теорий, находящихся как в определенной близости друг к другу, так и являющихся альтернативными. Важно ориентироваться в условиях и границах применения той или иной концепции усвоения и развития, в том, насколько тесно коррелируют между собой психолого-дидактическая концепция и соответствующие ей теоретические разработки системы или технологии обучения. И самое главное – в какой мере психолого-дидактические теории получают отражение в практике обучения.

Выше охарактеризованы наиболее важные парадигмы (концепции) обучения: *ассоциативно-рефлекторная концепция; концепции деятельностного подхода в обучении, интериоризаторская концепция обучения, концепция развивающего обучения, гештальттеория.*

Выскажем следующие замечания. В определенном смысле интериоризаторская концепция является однонаправленной. В ней рассматриваются только перевод внешних действий во внутренние. Практика обучения свидетельствует также о необходимости *обратного перевода: вывода внутренних действий во внешний план.* При этом условии можно лучше судить о сформированности психических процессов, их состоянии, внести необходимые коррективы в про-

цессе обучения. Особое значение имеют такие приемы, которые могут одновременно выполнять обе указанные функции. Например, приемы структуризации (текста учебника, записей, выполняемых учителем и учащимися, представление рассуждений (доказательств теорем, решений задач) в виде наглядно-графической схемы, нумерация построений, выполняемых при изготовлении рисунков и чертежей, совмещение приемов структуризации текстовой и графической информации). Эти приемы одинаково эффективны как при первом, так и при обратном переводе (при воспроизведении учебного материала учащимися). Многоэтапность перевода материализованных действий во внутренний план порождает представление о том, что методика обучения, строящаяся на указанном принципе, неизбежно окажется слишком громоздкой и ресурсоемкой (по интеллектуальным затратам, расходованию учебного времени и т.д.). Однако это не так. К примеру, наличие пропедевтического курса математики, в котором материализованные действия представлены в полном объеме, во многих случаях освобождает от повторения этих действий в систематическом курсе. Если эти действия в систематическом курсе актуализируются, то в более кратком, свернутом виде. Средства наглядности, которые никак нельзя считать порождением «затратной» дидактики, также представляют этап материализованных действий. Традиционная методика всегда ориентирована не на пассивное созерцание наглядности, а активное ее использование учащимися. Доказательство ни одной геометрической теоремы или решение задачи не обходятся без чертежа или рисунка. Выполнение их также представляет собой этап материализованных действий. Эти и другие примеры свидетельствуют о том, что в традиционной методике этап материализованных действий всегда присутствовал. Нельзя недооценивать этап внешней речи. Опытный учитель всегда следит за тем, чтобы ученик одновременно рисовал и говорил, писал и говорил. В практике школы используется комментированное решение задач, в целях развития математической речи используется проговаривание вслух формулировок определений и теорем (хором; отдельными учащимися), практикуется воспроизведение учащимися вслух доказательств теорем на этапе закрепления. Проговаривание вслух служит средством обратной связи, ускоряет усвоение учебного материала, дает возможность строить «уроки полного усвоения». Практика подтверждает необходимость этапа внутренней речи. Особенно распро-

страненной ее формой является чтение учебника про себя (на уроке, во время самостоятельной работы).

Разумеется, никакой этап не должен доводиться до абсурда. К такой крайности по существу, к зубрежке, легко придти, если требовать излишне многократное воспроизведение вслух одного и того же материала (учителю, ученику, родителям, брату, сестре, магнитофону и т.д. – как это делалось, например, в опыте В.Ф. Шаталова).

В теории и практике обучения обучение и развитие рассматриваются как две взаимосвязанные стороны единого процесса. Обучение выступает в качестве ведущей движущей силы психического развития школьника. К содержанию развития относятся все качества личности (знания, умения и навыки; способы умственных действий; самоуправляющие механизмы личности; эмоционально-нравственная и деятельностно-практическая сферы). Выделяются два уровня развития. *Уровень актуального развития* – характеризуется той деятельностью, которая уже сформировалась и школьник ее может выполнить самостоятельно. *Уровень зоны ближайшего развития* – характеризуется тем, что школьник не может самостоятельно овладеть некоторыми видами деятельности, но справляется с ними с помощью учителя. **Основная установка развивающего обучения** – обучение должно осуществляться в зоне ближайшего развития ребенка.

Типичными примерами «соединения» обучения и развития является подведение учащихся к понятиям и фактам (конкретно-индуктивный метод их введения), организация поиска решения задач и доказательства теорем. Особенно ценным в этом плане является такой поиск, который помогает додуматься до общего замысла решения (доказательства), приемы которого носят обобщенный характер и могут найти широкое применение в дальнейшем обучении.

Обучение по гештальттеории оперирует крупными, законченными в смысловом отношении фрагментами учебного материала; первые шаги в обучении связываются с запечатлением самой структуры крупного фрагмента и его смысла. К этому направлению примыкают исследования по укрупнению знаний, крупноблочному изложению учебного материала.

2.4. Принципы наглядности и доступности как составные части психолого-дидактической обоснованности процесса обучения. Любое психолого-дидактическое обеспечение учебного процесса,

любая парадигма обучения не может обойтись без *принципов наглядности и доступности*. Не случайно принцип наглядности был назван Я.А. Коменским «золотым правилом дидактики». Он требует сочетания наглядности и мысленных действий, наглядности и слова. Вредным является как недостаточное, так и избыточное применение средств наглядности. Их недостаток приводит к формальным знаниям, а избыток может затормозить развитие логического мышления, пространственного представления и воображения.

Наглядность означает не только наглядность результатов обучения (знаний), но и интенсификацию процесса обучения при помощи наглядности. Наглядность выступает не как самоцель, а как средство получения высоких результатов обучения, получения их более экономным путем.

Данный принцип также находится в развитии. Заметим, например, что в гносеологической литературе встречается до десяти различных определений наглядности. *Наиболее общей является характеристика наглядности при помощи модельного представления знаний. При этом для построения модели используются более наглядные теории. В результате наглядность абстрактной теории усиливается при помощи менее абстрактного, более наглядного знания.*

В математике особую роль играют геометрические модели. Геометрия выступает в качестве основного средства наглядности, обслуживая все разделы школьного курса.

Наглядность связана с интуицией — с возможностью непосредственного усмотрения истины.

Кроме геометрической наглядности можно говорить и о физической наглядности (индуктивной простоте) учебного материала. В данном случае наглядность обеспечивается при помощи физической модели, простого физического опыта или эксперимента.

Наглядность часто связывается с классическими теориями, с историческими подходами, возникшими первоначально в математике. И в этом есть большой смысл.

Одно дело наглядность понятий и фактов и совсем другое — наглядность доказательств (рассуждений). Эта проблема до конца еще не исследована в психолого-дидактической литературе. В математике особое значение в этом плане имеет структурирование рассуждений. Наглядность имеет не только объективное, но и субъективное содержание. Например, по мере формирования привычки опериро-

вания учебным материалом он становится более наглядным, более обозримым, принимает более компактную и мобильную форму.

Существуют три вида наглядности: *натуральная, изобразительная и символическая*. В обучении математике используются все три вида наглядности, однако их соотношение на различных стадиях обучения различно. С возрастом учащихся увеличивается доля символической наглядности, так как именно она наиболее полно соответствует характеру математической науки. Важнейшим примером символической наглядности является структуризация изложения учебного материала (краткая запись с применением логико-математической символики, структуризация формулировки определения, теоремы, доказательства теоремы, решения задачи, чертежа, в котором нумерацией указана последовательность построений). Символическая наглядность в этом случае обнажает логику рассуждений, делает ее, как говорят психологи, главной фигурой восприятия, что безусловно, повышает наглядность и доступность учебного материала.

Рекомендуется придерживаться некоторых общих приемов использования средств наглядности на уроке, помогающим избежать пассивного «созерцания» учащимися средств наглядности, активизирующим их практические и мысленные действия. Такими приемами являются: сообщение цели использования средства наглядности, краткое его описание, обеспечение хорошего доступа для его обзора, управление действиями учащихся по достижению указанной цели, оперативность (экономное расходование учебного времени).

2.5. Пример применения символической наглядности при изучении доказательства теоремы.

Теорема. Через данную точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную к данной прямой a .

Замысел доказательства. Доказательство проведем методом от противного. Будет использоваться также метод равных треугольников. Аксиома параллельности здесь еще не применяется. Возможны два случая: $A \in a$, $A \notin a$.

Доказательство. 1-й случай: $A \in a$. 1. Допустим, что существуют две прямые AC и AC_1 (рис. 3.4), перпендикулярные к прямой a . Могут ли прямые AC и AC_1 не совпасть?

2. Если бы эти прямые не совпадали, то получились бы два различных(!) угла BAC и BAC_1 , равные 90° каждый и отложенные в одну и ту же полуплоскость от прямой AB .

3. Это противоречит аксиоме откладывания угла. Следовательно, прямые AC и AC_1 совпадают. Единственность прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a , для данного случая доказана.

2-й случай: $A \notin a$. 1. Допустим, что существуют две прямые AC и AC_1 (рис. 3.5), перпендикулярные к прямой a . Могут ли эти прямые не совпадать?

2. Выполним дополнительные построения: продолжим AC за точку C и на продолжении отложим отрезок $CA_1 = CA$; проведем еще отрезок C_1A_1 ; получим треугольники ACC_1 и A_1CC_1 .

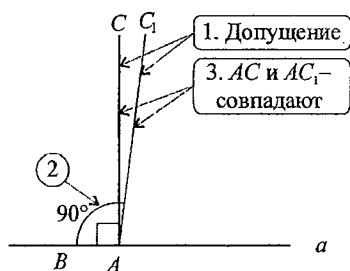


Рис. 3.4

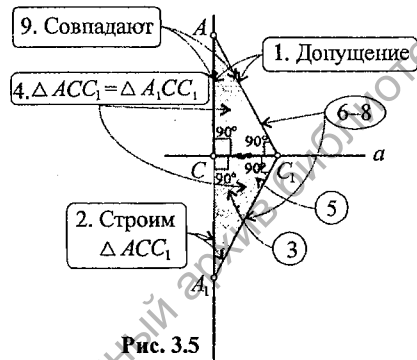


Рис. 3.5

$$3. \angle A_1CC_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

4. Тогда $\triangle ACC_1 = \triangle A_1CC_1$ – по двум сторонам и углу между ними.

5. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A_1C_1C = \angle AC_1C$. Но $\angle AC_1C = 90^\circ$ (по допущению). Значит, $\angle A_1C_1C = 90^\circ$.

$$6. \text{Отсюда } \angle AC_1A_1 = \angle AC_1C + \angle A_1C_1C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

7. Значит, $\angle AC_1A_1$ – развернутый; поэтому точки A , C_1 и A_1 лежат на одной прямой.

8. Получили противоречие: через точки A и A_1 проходят две прямые – прямая AA_1 и «прямая» AC_1A_1 , а этого быть не может.

9. Следовательно, прямые AC и AC_1 совпадают. Единственность прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к данной прямой a , доказана и в этом случае.

Принцип доступности требует, чтобы обучение строилось на

основе учета возрастных возможностей учащихся. С его помощью регулируется уровень сложности учебного материала, определяется выбор методических подходов изложения его на уроке, правильная дозировка домашних заданий. Слишком упрощенное содержание обучения снижает его развивающие и воспитательные возможности. Поэтому рекомендуется (по Л.В. Занкову), чтобы содержание заданий для учащихся находилось в «зоне их ближайшего развития». До-

ступность изложения может быть обеспечена путем применения средств наглядности, с помощью методов индукции, конкретизации, путем установления связи учебного материала с жизненным опытом учащихся. Читателю рекомендуется привести соответствующие примеры из школьных учебников математики.

С точки зрения математики доступность учебного материала может быть охарактеризована коэффициентом доступности k – отношением количества информации, превращающейся в знание, к количеству всей информации в данном учебном материале: $1 \geq k \geq 0$.

2.6. Заключительная группа – принципы активности, сознательности и прочности. Эту группу можно назвать *принципами интенсификации обучения*. Такое название их лучше подчеркивает процессуальную сторону обучения.

Сознательное усвоение характеризуется: наличием обоснованного самостоятельного мышления, способностью объяснить свои действия, пониманием изученного, осознанием путей получения нового знания, умением применять знания. Применение знаний связано с «*переносом*» их в те или иные ситуации. Возможность осуществления учащимися переноса более высокого уровня (на более отдаленную, необычную, существенно отличающуюся от первоначальной новую ситуацию) свидетельствует о высокой степени сознательности усвоения. Сознательное усвоение помогает избежать *формализма* в знаниях.

Различаются *два вида формализма* (по Я.С. Дубнову):

1) ученик не видит связи математических понятий и фактов с реальным миром – *формализм первого вида*;

2) ученик воспроизводит определение, но не понимает по смыслу (например, формулирует определение логарифма, но не может найти $\log_2 8$) – *формализм второго вида*.

Предупреждению формализма знаний содействуют присмыслы конкретизации, примеры, иллюстрирующие связь с жизнью. Пример является самым лучшим средством против формализма любого рода. Примеры должны быть в учебнике, приводится учителем на уроке, к учащимся необходимо чаще обращаться с заданием «Дети, приведите примеры ...».

С *принципами активности и прочности* рекомендуем ознакомиться по работе [11]. Активность может быть внешняя и внутрен-

няя (мыслительная). Внешняя активность не всегда стимулирует внутреннюю активность. Мы были свидетелями одного урока, на котором решение примеров проводилось в форме соревнования между группами учащихся. Учитель на классной доске вывесил плакат с нарисованной ракетой, предложил два столбика примеров и сказал: «Какая группа решит быстрее, та и полетит в космос». Дети торопливо бежали к доске (вот она внешняя активность), в спешке решали примеры, наделали «кучу» ошибок, и самое худшее – ошибки остались не исправленными ни учениками, ни учителем (как можно говорить о внутренней активизации в этом случае?). Разумеется, этот пример не является примером подражания и надеемся, что он не является типичным.

В активизации обучения, активизации мыслительной деятельности исключительно большая роль отводится проблемным методам обучения и самостоятельной работе учащихся.

Активная мыслительная деятельность невозможна без наличия потребности в ней, без ее мотивации, без поддержания познавательного интереса учащихся.

Рекомендуем проанализировать хотя бы одну тему из школьного учебника с этой точки зрения и найти в нем примеры активизации познавательной деятельности учащихся.

Прочность усвоения может быть обеспечена четким выделением *главного в учебном материале*, выявлением *внутренних и внешних связей* изучаемого материала (например, с помощью логико-структурных схем), продуманной *системой повторения и применения знаний*, *дифференцированным подходом* к объяснению наиболее сложных мест учебного материала. Более прочными оказываются те знания, которые добываются кропотливым самостоятельным трудом.

3. Интегративный принцип в обучении

3.1. Необходимость интегративного принципа в современном обучении. Интеграция наук – объективная закономерность, отражающая единство мира, всеобщую взаимосвязь явлений. Дифференциация наук нередко рассматривается как момент в общем историческом процессе их интеграции. Эту мысль знаменитый ученый-физик М. Планк сформулировал следующими словами: «*Наука представ-*

ляет собой внутреннее единое целое. Ее разделение на отдельные области обусловлено не столько природой вещей, сколько ограниченностью способностей человеческого познания. В действительности существует непрерывная цепь от физики и химии через биологию и антропологию к социальным наукам, цепь, которая ни в одном месте не может быть разорвана, разве лишь по произволу».

Интеграция знаний осуществляется различными путями: унификацией понятийного и категориального аппарата, взаимопроникновением методов, взаимодействием по объектам исследования, образованием комплексных (синтетических) наук.

Интегративные процессы в науке вызывают необходимость их отражения в школьном обучении.

Отметим, что приведенные выше принципы процесса обучения, по существу являются интегративными. Примером интегративного подхода служит распространение принципа научности на весь учебный процесс.

Интегративный принцип в обучении включает в себя такие достаточно традиционные принципы как принципы связи обучения с жизнью, прикладной направленности обучения, преемственности, реализации межпредметных связей.

Основу интегративного принципа в обучении должна составлять, прежде всего, интеграция математического содержания (арифметического, геометрического, алгебраического, начал математического анализа, комбинаторики, элементов теории вероятностей и т.д.).

Существуют различные формы интеграции учебных курсов, в том числе и такие, которые *сохраняют определенную (заранее планируемую) самостоятельность этих курсов.*

Модернизация содержания школьного курса математики в условиях дифференциации обучения – объективное явление. Однако практические попытки обновления содержания, к сожалению, породили серьезную проблему перегрузки учащихся. В условиях «информационного бума» эта проблема не может решиться локальными, техническими полумерами. Многое зависит от способа организации информации. Значительными возможностями в этом плане обладает интегративный подход к построению школьных курсов. Он позволяет уплотнить информацию, сделать ее более системной, структурированной и удобной для восприятия и оперирования ею.

Интеграция геометрии и алгебры предполагает усиление *внутрипредметной интеграции*, которую мы рассматриваем как необхо-

димую предпосылку межпредметной интеграции. В противном случае объединение двух курсов со слабыми системными качествами может привести к еще более бессистемному курсу. Усилению внутрипредметной интеграции способствует крупноблочное изложение учебного материала.

Интегративный курс может оказаться неэффективным, если он сводится к механическому чередованию геометрического и алгебраического материала. Геометрия и алгебра должны максимально содействовать в изложении друг друга. Это содействие проявляется в достижении более простой общей структуризации, рационализации теоретического материала, повышению доступности.

Межпредметная интеграция включает в себе значительные преимущества. В отдельных учебниках геометрии и алгебры систематизация учебного материала ведется, исходя из внутренней логики только одного курса, потребности другого же курса учитываются крайне слабо. Поэтому проблема межпредметных связей превратилась в «вечную» и трудно разрешимую проблему. Эффективное ее решение возможно лишь в рамках интегративного учебника математики.

Систематизация учебного материала с более общих позиций, учитывающих одновременно интересы геометрической и алгебраической подготовки учащихся, создает больше условий для рационального, более компактного и взаимосвязанного построения курса математики в целом. Такой курс помогает сэкономить учебное время, сконцентрировать усилия на главном. Интегрирование обеспечивает не только согласованное изложение геометрии и алгебры, единую последовательность изложения, но и взаимное проникновение их друг в друга. Это положение относится и к теории, и к системе задач. Изучение теоретического материала сопровождается решением задач, отличающихся большим разнообразием. Активный перенос знаний на различные ситуации, более частое переключение с одних знаний на другие, избирательное применение знаний, привычка совместного применения геометрии и алгебры, сближение знаний с применениями – все это в совокупности создает качественно новые условия для развития, образования и воспитания учащихся.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что главная цель интеграции состоит в том, чтобы отойти от экстенсивного пути развития содержания образования, ограниченного по своим возможностям и сопряженного с перегрузкой учащихся. Интеграция призвана избе-

жать другой крайности — механического сокращения учебного материала, приводящего к снижению математической подготовки учащихся. Основное назначение интеграции — обеспечить интенсификацию процесса обучения и организацию его на основе общей стратегии образования, развития и воспитания учащихся.

3.2. Общая концепция интегративного курса математики в средней школе. В XX в. определились следующие три этапа развития интегративного подхода в обучении:

— 1 этап (рубеж веков — 20-е гг.) — проблемно-комплексное обучение на межпредметной основе (Дж. Дьюи, С.Л. Рубинштейн, С.Т. Шацкий и др.). Комплексная система обучения (от лат. *complexus* — связь, объединение, сочетание) характеризовалась расположением учебного материала вокруг определенного стержня. Этим «стержнем» могло служить какое-либо ремесло, фабрика, сельское хозяйство, природа, ее богатства, борьба за промфинплан, борьба за сев и коллективизацию и др. Поэтому вместо логического развития учебного курса получалось случайное сочетание обрывочных знаний. В советский период комплексная система получила определенное применение в начальной школе. В школе второй ступени было сохранено предметное преподавание, хотя и здесь изучение учебных дисциплин концентрировалось вокруг общих комплексных тем. С начала 30-х гг. в советской школе вернулись к предметному преподаванию. На новой основе стала осмысливаться роль межпредметных связей и политехнический принцип обучения.

— 2 этап (30 — 70 гг.) — разработка межпредметных связей при автономном существовании различных учебных курсов.

— 3 этап (80 г. — по настоящее время) — собственно интеграция, приводящая к объединению некоторых курсов; при этом основания интеграции существенно отличаются от тех, которые были приняты на первом этапе.

Неудача первого этапа интеграции привела не только к возврату к раздельным учебным курсам, но и к чрезмерному дроблению учебного материала внутри каждого из них. В условиях одинаковости и всеохватывающего характера среднего общего образования это казалось необходимым средством доступности обучения. Потребовалось еще 50 лет для того, чтобы убедиться в невозможности эффективно решения проблем обучения на этом пути. В противовес чрезмерному дроблению учебного материала в 70-х гг., вновь усиливается интерес к проблеме интеграции. Более продвинутыми интеграционными подходы оказались в предсистематических курсах.

В Республике Беларусь в последнее десятилетие активизируются исследования по проблеме интегративных подходов в обучении

математике. Организации содержания учебного материала на основе внутрипредметной интеграции посвящены работы Н.М. Рогановского. Интегративные подходы при построении системы задач рассматриваются А.Б. Василевским, И.А. Ананич, А.И. Астапуком, О.А. Левончик. Разработкой программы единого курса математики занимаются И.А. Новик, Т.А. Лукашова, Г.И. Украинец. Интегративной функции отдельных упражнений посвящена работа О.Н. Пирютко. Теоретические аспекты интеграции курсов алгебры и геометрии анализируются Г.Н. Солтаном.

Учитывая имеющийся опыт, сформулируем основные положения (концепцию) интегративного подхода в обучении.

1. Понятие интегративной связи следует рассматривать как новое понятие, отличающееся от понятий внутри- и межпредметной связей. Элементы учебного материала, между которыми устанавливается внутри- или межпредметная связь могут в общей структуре курса находиться на значительном удалении друг от друга. Поэтому не всегда внутри- и межпредметные связи могут рассматриваться как интегративные. Под *интегративными связями* мы понимаем такие внутри- и межпредметные связи, которые обеспечивают сближение соответствующих элементов и частей учебного материала, объединение их, одновременное и параллельное изучение.

В широком смысле под *интегративным подходом в обучении* мы понимаем систему обучения, построенную на интегративном принципе и включающую в себя все составные части процесса обучения (цели, содержание, средства, методы и формы обучения).

Интеграция (в узком смысле) определяется нами как систематизация учебного материала, обеспечивающая сближение различных элементов учебного материала в общей его структуре, объединение различных его частей, повышение системных качеств изложения.

Оптимальные условия для реализации интеграции в узком смысле (применительно к предметному содержанию) создаются в рамках интегративного подхода в широком смысле.

2. Интегративный подход представляет собой определенную *идеологию обучения*. Эта идеология не означает полного отрицания традиционной. Напротив, многое что есть в традиционной системе обучения она сохраняет, но сохраняет в измененном, соответствующим образом переработанном виде. Интегративный подход в обучении мы определяем как *открытую систему*, предполагающую развитие

и совершенствование. При этом установку типа «все или ничего» мы считаем неприемлемой. Интегративный подход целесообразнее осуществить «методом последовательных приближений», сохраняя все лучшее, что есть в традиционной системе.

3. Интеграция не должна приводить к снижению систематичности учебных курсов, достигнутой при их традиционном построении. Существенным является выбор соотношения между внутри- и межпредметными связями. Возможны следующие *виды интегративных учебных материалов (ИУМ)*:

I вид – ИУМ, в которых внутрипредметные связи сильнее межпредметных.

II вид – ИУМ, в которых внутри- и межпредметные связи по силе действия примерно равноправны.

III вид – ИУМ, в которых внутрипредметные связи слабее межпредметных.

Первые два вида следует считать основными. Они обеспечивают более «плавный» переход от автономных курсов к интегративному, создают условия для сохранения систематического характера учебника.

4. На первый план должны выдвигаться не внешние атрибуты интеграции (изложение геометрии и алгебры в одной книжной обложке, формальное чередование геометрического и алгебраического материала и т.д.), а содержательная интеграция, основывающаяся на оптимальном подборе геометрического и алгебраического материала, излагаемого в непосредственной близости, параллельно, или в форме взаимного проникновения. Критерием оптимальности должно служить достижение большей систематичности и рациональности изложения учебного материала (принцип оптимальности по Парето).

5. Школьный курс математики, построенный на интегративном принципе, должен обеспечить определенную самостоятельность развития геометрии и алгебры, представляя их как наиболее крупные содержательные линии интегративного курса. Эти содержательные линии должны подчиняться как общей логике развития интегративного курса, так и своей внутренней логике.

3.3. *Состав принципов интегративного подхода.* Приведенные данные подчеркивают целесообразность выделения третьей группы принципов – *принципы интегративного подхода в обучении*. Эту группу представим следующими принципами: *усиления развивающего*

характера обучения в условиях интегративного подхода, выбора общего систематизирующего начала интегративных курсов математики, крупноблочного, компактного изложения родственных вопросов, интеграции знаний и их применений, дополнительности различных форм интеграции, связи обучения с жизнью (прикладной направленности обучения).

Характеристика этих принципов приведена в работе: Е.Н. Рогановская. Методика разработки учебно-дидактических материалов на интегративной основе в курсе математики 7 – 9 классов. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2000. – 112 с.

О реализации принципа связи обучения с жизнью. Изучение основ науки должно осуществляться в тесной связи с раскрытием важнейших их применений в промышленности, сельском хозяйстве и общественной жизни. При этом основы науки не должны подменяться ее приложениями.

Использование в обучении математических моделей реальных ситуаций, отбор содержания обучения, отвечающего поставленной цели, представляют собой основные средства реализации принципа связи обучения с жизнью. Важной составной частью этих средств являются задачи и примеры прикладного характера.

При реализации принципа связи обучения с жизнью должно учитываться действие остальных принципов дидактики, например принципа доступности. Приводя учащимся задачи с техническими терминами, необходимо разъяснять им смысл этих терминов. Наблюдения показывают, что учащиеся V–VI классов не всегда правильно понимают смысл таких слов, как «токарь», «болванка», «производительность труда» и др. Из-за непонимания смысла некоторых слов часто теряется смысл всей задачи.

Как уже отмечалось, знакомство учащихся с построением математических моделей реальных ситуаций служит наиболее характерным средством реализации принципа связи обучения математике с жизнью.

Целесообразно использовать в обучении конкретные примеры связи математики с жизнью. Более убедительными являются примеры применения изучаемого на уроке математического материала к решению некоторых практических задач. Оцените с этой точки зрения следующую задачу: «При проверке вертикальности прямоугольных колонн строители пользуются следующим несложным приспособлением (рис. 3.6).

Два прямоугольных листа фанеры соединяются шарнирами в виде «двугранного угла». К каждому листу на прямых, перпендикулярных к общему ребру, прикрепляется уровень. Если оба уровня показывают горизонтальное направление, то колонна, к которой прикладывают это приспособление, расположена вертикально.

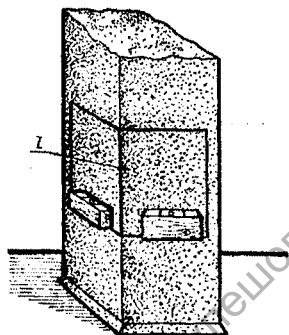


Рис. 3.6

4. Система принципов обучения (подведение итогов)

Приходим к следующей системе принципов (таблица 3.1):

Таблица 3.1

Принципы обучения математике

Название группы	Название принципа
1. Принципы единства процесса обучения	Принцип целеполагания, единства целей обучения. Принцип учета предметной специфики учебного курса. Принцип управляемости процесса обучения.
2. Принципы научности	<i>Принципы научности предметного содержания учебного курса:</i> принцип систематичности и последовательности изложения, принцип соответствия школьного курса математической науке, принцип дидактически приемлемой и обоснованной строгости. <i>Принципы психолого-дидактической обоснованности процесса обучения:</i> принцип ориентации на определенную парадигму обучения и на применение соответствующей ей технологии обучения; принципы наглядности и доступности; принципы активности, сознательности и прочности.

Название группы	Название принципа
3. Принципы интегративного подхода	Принцип усиления развивающего обучения. Принцип выбора общего систематизирующего начала (сквозных линий) интегративных курсов математики. Принцип крупноблочного, компактного изложения родственных вопросов. Принцип интеграции знаний и их применений. Принцип дополнительности различных форм интеграции. Принцип связи обучения с жизнью (прикладной направленности обучения).

5. О технологии реализации принципов обучения

Рассмотрим технологию возможной реализации принципов обучения на примере изучения темы «Уравнение прямой».

Эта технология включает:

- формирование основного методического замысла реализации принципов обучения;
- конкретизацию этого замысла;
- отбор содержания учебного материала;
- выбор средств, методов и форм обучения.

Методический замысел реализации принципов обучения. При разработке содержания данной темы учтем, что система координат является одним из наиболее эффективных и естественных средств интеграции курсов алгебры и геометрии. Это обстоятельство позволяет высказать следующий методический замысел осуществления принципов обучения: попытаемся найти такой вывод уравнения прямой, который бы опирался на совместное применение системы координат и традиционно-геометрических сведений, а так же служил убедительной демонстрацией интегративного подхода. Вокруг этого содержательного стержня будем строить процесс обучения.

Конкретизация замысла. Для осуществления сформулированного выше замысла обратимся к существующим способам вывода уравнения прямой. В последних школьных учебниках для этого используется формула расстояния между двумя точками. Вывод носит чисто алгебраический характер, геометрические соображения в нем почти не используются. Другие доказа-

тельства (с использованием подобия треугольников или элементов тригонометрии) неудобны по причине слишком позднего их рассмотрения. Нельзя ли использовать более ранние геометрические сведения, например, метод площадей? Предложим соответствующий вывод, который для учебно-методической литературы является, по-видимому, новым.

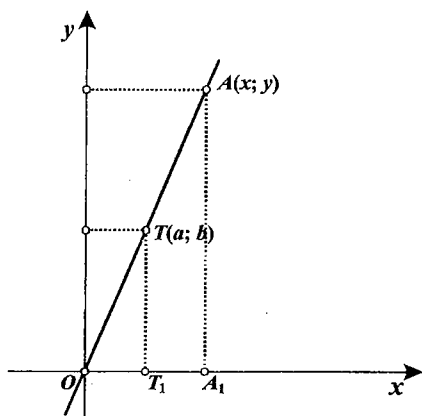


Рис. 3.7

Представим площадь $\triangle OAA_1$ как сумму площадей $\triangle OTT_1$ и прямоугольной трапеции TAA_1T_1 и из полученного равенства выразим y через x :

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(b+y)(x-a), \quad (1)$$

$$xy = ab + bx - ab + xy - ay,$$

$$bx - ay = 0, \quad ay = bx, y = \frac{b}{a}x. \quad (2)$$

Если точка $A \notin a$, то равенство (1), а значит, и равенство (2) выполняться не будет. Это означает, что равенство (2) является искомым уравнением прямой a .

Замечания. 1. Если точка A принадлежит другим частям прямой a , то рассуждения проводятся аналогично.

2. Без существенных изменений рассуждения проводятся, если точка A находится в других четвертях координатной плоскости. В случае, если какие-либо из чисел a, b, x и y — отрицательны, то катеты треугольников выражаются модулями этих чисел.

Коэффициент при x называется *угловым коэффициентом прямой*. Его обычно обозначают буквой k . Тогда уравнение (2) запишется в виде $y = kx$.

Отбор содержания учебного материала. В этот учебный материал входят: а) определение уравнения прямой; б) вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом для случаев: прямая проходит через начало координат, прямая не проходит через начало координат; в) задачи и упражнения, связанные с составлением уравнения прямой.

1 случай. Пусть прямая a проходит через начало координат и точку $T(a; b)$, $A(x; y)$ — текущая точка прямой (рис. 3.7). Необходимо найти равенство, связывающее координаты x и y (это равенство и называется *уравнением прямой*).

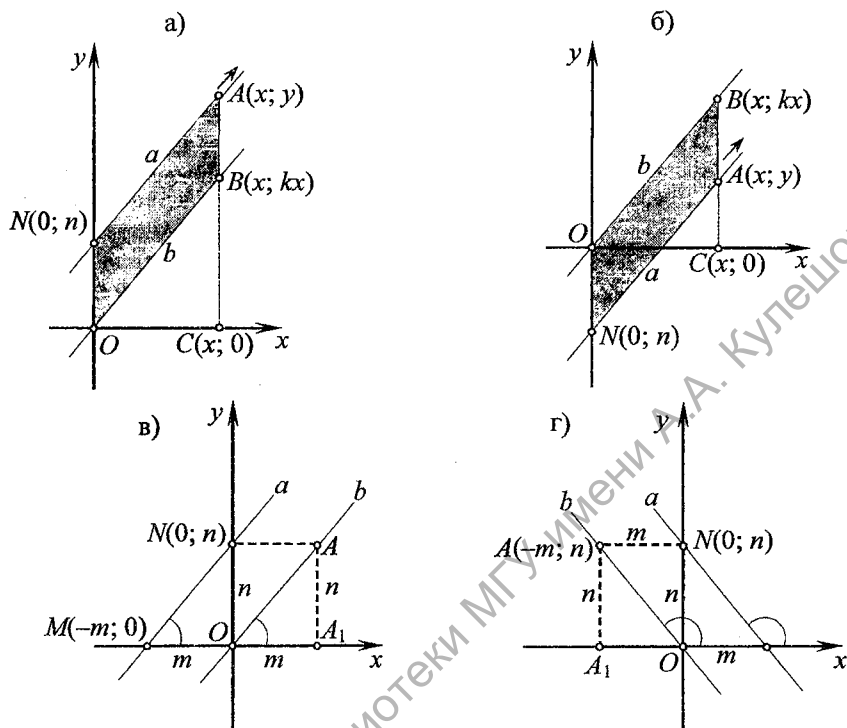


Рис. 3.8

Равенство $k = \frac{b}{a}$ выражает геометрический смысл углового коэффициента: он равен отношению ординаты точки T к ее абсциссе. Нетрудно заметить, что с изменением значений коэффициента k изменяется угол наклона прямой AT к оси абсцисс. По этой причине число k называется угловым коэффициентом прямой OT .

2 случай. Пусть прямая a не проходит через начало координат (рис. 3.8, а) и пересекает ось ординат в точке $N(0; n)$. Проведем через начало координат прямую b , параллельную прямой a . В силу первого случая прямая b имеет уравнение $y = kx$.

Пусть $A(x; y)$ – текущая точка прямой a . Нетрудно видеть, что если $n > 0$ (см. рис. 3.8, а), то $y = AC = BC + AB = kx + n$. Приходим к искомому уравнению прямой b : $y = kx + n$. (3)

К такому же уравнению приходим и в случае $n < 0$ (рис. 3.8, б): $y = AC = BC - AB = kx + n$ (учли, что в этом случае $n < 0$).

Число n имеет простой геометрический смысл – это ордината точки пересечения данной прямой с осью ординат. Число k по-прежнему называется угловым коэффициентом прямой (заметим, что прямые a и b наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом).

Задача. Прямая a не проходит через начало координат и отсекает от осей абсцисс и ординат соответственно отрезки m и n . Запишите уравнение прямой.

Решение. 1 случай: прямая a наклонена к оси абсцисс под острым углом (рис. 3.8, в). Так как прямая a пересекает ось ординат в точке $N(0; n)$, то она имеет уравнение $y = kx + n$. Осталось выразить через n и m угловой коэффициент k . Для этого проведем через начало координат прямую b , параллельную a . Найдем угловой коэффициент прямой b . Проведем через точку N прямую, параллельную оси абсцисс. Пусть A – точка пересечения двух построенных прямых. Из равенства треугольников OAA_1 и MNO следует, что $AA_1 = ON = n$, $OA_1 = MO = m$. Тогда можно найти координаты точки A : $A(m; n)$. Поэтому $k = \frac{n}{m}$. Находим уравнение прямой a :

$y = \frac{n}{m}x + n$. Итак, угловой коэффициент данной прямой оказался равным отношению данных отрезков n и m .

2 случай: прямая a наклонена к оси абсцисс под тупым углом. Рассуждая как и в предыдущем случае (рис. 3.8, г), получаем, что $k = \frac{n}{-m} = -\frac{n}{m}$ и $y = -\frac{n}{m}x + n$ – уравнение прямой a .

Общий вывод. Искомое уравнение прямой a :

$y = \frac{n}{m}x + n$, если прямая наклонена к оси абсцисс под острым углом;

$y = -\frac{n}{m}x + n$, если прямая наклонена к оси абсцисс под тупым углом.

Выбор средств, методов и форм обучения. Начнем с основного средства обучения – с учебника. Возможны различные варианты. Приведенное выше содержание учебного материала может быть изложено в основном тексте учебника или приведено в качестве дополнительного материала (в виде задач). Кроме учебника, средством обучения являются рисунки, выполняемые на доске (плакате, кодопозитиве, в виде компьютерной графики).

Что касается, методов и форм обучения, то они могут варьироваться достаточно широко. Определенным ограничителем выступает временной фактор – количество учебных часов, выделяемых на изучение данного материала. Любым выбранным методом и формам обучения нетрудно придать направленность, позволяющую с их помощью ярче подчеркнуть интегративный характер рассуждений, использования наглядно-геометрического метода.

Выяснение геометрического смысла углового коэффициента прямой до знакомства с понятием тангенса угла усиливает наглядность изложения, значительно упрощает составление уравнения прямой.

Пример 1. Если прямая проходит через начало координат и точку $A(-3; 2)$, то ее уравнение имеет вид $y = -\frac{2}{3}x$.

Пример 2. Если прямая отсекает от отрицательных полуосей абсцисс и ординат отрезки, равные соответственно 4 и 5, то она имеет уравнение $y = -\frac{5}{4}x - 5$.

6. Задания для практических и лабораторных работ

Задание 1. Выполните краткий обзор материала, относящегося к принципам обучения, по источникам, предложенным преподавателем.

Задание 2. Приведите пример совместной реализации принципов обучения при изучении отдельного фрагмента курса математики 5-6 классов.

Задание 3. Выполните предыдущее задание на материале курса геометрии.

Задание 4. Выполните задание 2 на материале курса алгебры.

Задание 5. Подготовьте и проведите деловую игру по изучению отдельного фрагмента школьного курса математики. Предусмотрите совместное применение различных принципов обучения.

Тема 4

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

- 1. Традиционная технология обучения в ее современном состоянии**
- 2. Крупноблочное изложение учебного материала**
- 3. Информационная технология обучения, предусматривающая использование электронного учебника**

4. Технология обучения, предполагающая организацию управляемой самостоятельной работы учащихся на основе тестовых заданий
5. Задания для практического занятия

1. Традиционная технология обучения в ее современном состоянии

Традиционная технология обучения прошла большой путь своего развития. Первоначально она оформилась в XVII в. благодаря работам Я.А. Коменского. Свое концептуальное обоснование она получила в ассоциативно-рефлекторной теории обучения, дидактических принципах, предложенных Я.А. Коменским (принципы научности, природосообразности, систематичности, доступности, прочности, сознательности, наглядности, связи теории с практикой, учета возрастных и индивидуальных особенностей). Со временем расширялась и углублялась содержательная трактовка этих принципов, изменялись их названия и состав.

Для традиционной технологии в ее современном состоянии характерно усиление внимания к развивающе-воспитывающей стороне обучения, к проблемным методам обучения. Возрастает техническая оснащенность процесса обучения, включая его компьютеризацию. Широкое применение получила дифференциация обучения. В современном виде традиционное обучение опирается на достаточно широкую психолого-дидактическую базу. Концепция усвоения включает в себя ассоциативно-рефлекторную теорию обучения, теорию поэтапной интериоризации. Частичное влияние оказывают и другие теории обучения (бихевиористские, гештальттеория и др.).

Традиционная технология охватывает все компоненты процесса обучения (цели, содержание, методы, средства и формы обучения). Поэтому эта технология обладает важнейшим качеством – полнотой. Больше того, традиционная система является сверх полной, она обладает большой степенью избыточности. Избыточность является следствием того, что в рамках традиционной технологии в ее современном состоянии существуют различные подходы содержательного наполнения каждой компоненты процесса обучения. Имеющая место высокая вариативность к определению целей, содержания,

методов, средств и форм обучения, означает гибкость технологии обучения, ее динамизм, способность более адекватно учитывать различные условия обучения (возраст учащихся, специфику учебного материала, количество учебного времени и т.д.). В этом состоит неоспоримое преимущество традиционной системы обучения. Наличие избыточности предъявляет повышенные требования к профессиональной подготовке учителя. Необходимой составляющей ее является умение избирательно относиться к богатому технологическому арсеналу. Учитель должен обладать умением выбирать каждый раз такие средства, которые наиболее оптимально учитывают изменяющиеся условия и обеспечивают достижение планируемых результатов обучения. Благодаря этому обеспечивается целостность процесса обучения, определенная целенаправленность и логика этого процесса, предупреждение возможного его рассогласования.

Целостность процесса обучения обеспечивается, прежде всего, *инвариантной составляющей технологии обучения*. Гибкость, приспособляемость этого процесса – *вариативной частью*. Поэтому важно в каждой технологии обучения выделять инвариантную и вариативную части. Инвариантная составляющая складывается из инвариантов каждой структурной компоненты процесса обучения.

Инвариантом целей обучения является установка на единство воспитательных, развивающих и образовательных целей, на обеспечение их полного равноправия, на поднятие статуса (учитывая состояние практики обучения) развивающих целей.

Вариативной составляющей целей обучения является их соотношение, удельный вес в каждый отдельный момент обучения. Предполагается широкое варьирование развивающих и воспитательных целей, обеспечение их комплексного характера. Варьирование развивающих целей обеспечивается определенной динамикой развития учащихся (за счет подходящего выбора трудности учебного материала, темпа его изучения, увеличения блоков информации, наращивания уровня познавательной деятельности, осознания процесса получения нового знания, научных методов его добывания и т. д.).

Инвариантной частью содержания обучения является, прежде всего, традиционное содержание курса математики в средней школе, которое сложилось за последние 100-150 лет. В геометрии к нему относятся различные разделы синтетической геометрии: равенство треугольников, параллельность и перпендикулярность прямых, при-

знаки и свойства четырехугольников, правильные многоугольники, окружность и др. К традиционному содержанию аналитического характера относятся элементы тригонометрии в курсе геометрии, решение с их помощью прямоугольных и произвольных треугольников, а также подобие фигур. Своего рода эталоном выбора и фиксирования объема традиционного содержания в учебниках может служить классический учебник геометрии А.П. Киселева. Инвариант школьного курса алгебры составляют тождественные преобразования алгебраических и трансцендентных выражений, соответствующие им уравнения, неравенства и функции.

В содержании обучения математике прослеживаются определенные *интеграционные* тенденции. Так если ранее в средней школе изучались четыре предмета: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия, то в последнее время место курса арифметики занял курс математики, интегрирующий арифметику, элементы геометрии и алгебры; курс тригонометрии также прекратил самостоятельное существование и был объединен с курсом геометрии и алгебры. В действующем учебном плане средней школы Республики Беларусь математика представлена вообще одной строкой, без деления ее на отдельные предметы.

К вариативной части предметного содержания относятся сравнительно новые темы школьного курса математики: в геометрии — координаты, векторы, геометрические преобразования; в алгебре — элементы математического анализа, комплексные числа, элементы комбинаторики и теории вероятностей. Некоторые из этих тем на базовом уровне обучения могут отсутствовать или быть представлены в небольшом объеме по сравнению с повышенными уровнями обучения.

Достаточно определенно сложился *инвариант, относящийся к методам обучения*. К нему мы относим методы мотивации и стимулирования познавательного интереса, а также методы обучения, классифицируемые по уровню познавательной деятельности учащихся. Известным ученым-дидактиком М.Н. Скаткиным предложена такая классификация методов обучения:

- 1) Информационно-рецептивный метод;
- 2) Репродуктивный метод;
- 3) Проблемное изложение (генетический метод);
- 4) Эвристический (частично-поисковый) метод;

5) Исследовательский метод (либо под руководством учителя, либо при полной самостоятельности учащихся).

При информационно-рецептивном методе учитель сообщает в готовом виде специально отобранные знания, создает условия для восприятия этих знаний, показывает образцы (рецепты) применения знаний на практике. Источником информации служит не только учитель, но и учебник, телевидение, радио, кинодемонстрация, кодопозитивы, компьютер, материализованные действия (с натуральным предметом, изображением предмета, рисунком, схемой и т. д.). Этот метод предполагает, таким образом, использование словесных, наглядных и практических методов, выделяемых по другому основанию – источнику знаний. Данный метод обеспечивает усвоение знаний на уровне осознанного восприятия, понимания и запоминания.

Репродуктивный метод предназначен для доведения знаний до уровней воспроизведения и непосредственного применения знаний (применение знаний по образцу и в ситуациях, близких к этому образцу). Неоднократное воспроизведение знаний обеспечивает прочность их усвоения. Для усвоения готовых знаний оба эти метода (информационно-рецептивный и репродуктивный) являются наиболее экономичными. Благодаря этим качествам они получили излишне широкое применение в практике обучения, приводящее к разбалансированию системы методов обучения, значительному вытеснению методов обучения, ориентированных на более высокие уровни познавательной деятельности.

Следующие методы обучения отходят от сообщения знаний в готовом виде, они призваны показать процесс получения знаний, приобщить учащихся к этому процессу. Начала этих методов заложены еще в античной науке (вспомним такие поисковые методы как анализ Паппа и анализ Евклида). Большое влияние на методы обучения оказали исследования по эвристике (Декарт, Спиноза, Ньютон, Лейбниц, Пуанкаре и др.). В проблемном изложении учитель показывает различные примеры возможного открытия нового для учащихся знания, акцентирует внимание учащихся на осознание процесса его получения. Структура этого метода такова: постановка учебной проблемы, фиксирование найденного решения (возможных при этом затруднений и противоречий), доказательство правильности решения, анализ его рациональности и существования других решений. Особенность познавательного процесса в том, что ученик не

только воспринимает, осознает и запоминает информацию, но и следит за логикой познавательного процесса, выбором средств обнаружения математической закономерности и ее обоснования. Главное назначение проблемного изложения – помочь учащимся овладеть на приводимых образцах различными приемами научного мышления.

Эвристический (частично-поисковый) метод предполагает определенное участие учащихся в обнаружении нового знания. Он осуществляется в принципе по такой же схеме, что проблемное изложение только на тех или иных этапах этой схемы частично привлекаются учащиеся. Наиболее распространенной формой эвристического метода является беседа. Схему построения такой беседы при решении математических задач предложил Д. Пойа. Эта схема известна в методике преподавания математики под названием «таблица Пойа».

Исследовательский метод заключается в организации самостоятельной поисковой, творческой деятельности учащихся по постановке и решению учебных проблем. Организация этой деятельности может осуществляться под руководством учителя, или при полной самостоятельности учащихся.

Отметим наиболее типичные ситуации применения проблемных методов при обучении математике: индуктивное подведение и обнаружение фактов (аксиом, теорем), составление задач, поиск доказательства теорем и решений задач. Решение задач не по образцу – наиболее распространенная ситуация применения проблемных методов в обучении. Проблемные методы могут применяться в различных сочетаниях с информационно-рецептивным и репродуктивным методами: непроблемные методы преобладают – проблемные используются частично; и те и другие методы используются при изложении некоторого материала в равных соотношениях; преобладают проблемные методы – непроблемные используются частично. Применение первого сочетания методов может быть доведено до 70-80%, второго – до 30-40%, третьего до 20-30%. Считается, что проблемные методы требуют больших затрат времени. Поэтому особенно ценны такие разработки проблемных методов обучения, которые экономны по временным затратам. Каждый метод обучения предполагает использование различных научных методов: логических (анализа, синтеза, индукции, дедукции, обобщения, конкретизации и т.д.), эмпирических, теоретических (наблюдения, метода математического моделирования и т.д.). Повышение уровня познавательной деятельнос-

ти предполагает осознание методов науки, с помощью которых добывается новое для учащихся знание. Методы науки также относятся к инвариантной части методов обучения.

В методике преподавания математики особенно подробно разработаны методы обучения математическим понятиям, теоремам и доказательствам. Основательные разработки имеются также по обучению учащихся решению задач.

К вариативной части методов обучения относим соотношение, удельный вес применяемых методов. Больше всего это положение означает необходимость усиления роли проблемных методов обучения (проблемного изложения, эвристического и исследовательских методов), так как эти методы имеют существенное значение в постановке развивающего обучения. В этих же целях необходимо спланировать и применение информационно-рецептивного и репродуктивного методов обучения. Эти методы заключают в себе немалый развивающий потенциал. Например, эти методы позволяют увеличить темп изучения, подать учебный материал укрупненными блоками, что (при правильной методике) положительно влияет на динамику развития учащихся.

К инвариантной части средств обучения относится, прежде всего, основное традиционное средство — учебник, а также дидактические материалы для учащихся, и ставшие традиционными технические средства обучения (кодопозитивы, диапозитивы, кинодемонстрации, видеозаписи и т. д.).

К вариативной части относим средства новейших информационных технологий: компьютерный вариант учебника, компьютер как средство программированного, модульного обучения, использование компьютерной (в том числе динамичной) графики как средства наглядности и т. д. Определенное продвижение в этом вопросе зависит от оснащенности школ современными компьютерными системами, обученности педагогических кадров, разработанности программного обеспечения и т. д.

К инвариантной части форм обучения относится классно-урочная форма, основой которой является урок. Мы исходим из того, что урок отражает в себе все составные части целостного процесса обучения. Существуют различные классификации уроков, учитывающие в большей мере ту или иную компоненту процесса обучения. Полная классификация, представляющая все многообразие уроков, должна проводиться по всем пяти признакам (Е.Н. Рогановская): целям, содержанию, методам, средствам и формам обучения (см. тему 11).

К вариативной части форм обучения можно отнести уроки, отражающие некоторые формы внеклассной работы, с применением занимательных и деловых игр, уроки по профессиональной ориентации и др.

Управление процессом обучения включает в себя планирование целей обучения, отбор содержания, методов, средств и форм обучения. Существенную роль в управлении процессом обучения играет наличие *обратной связи* (ученик – учитель). Обратная связь может носить оперативный характер (ведется обучение некоторому элементу нового знания и тут же проверяется осознанность усвоения, понимание). Обратная связь может относиться к более высоким уровням знаний, связанным с их применениями в различных ситуациях. В традиционной системе обучения наряду с многовариантными самостоятельными и контрольными работами на 45 мин., широко используются кратковременные работы на 7-15 мин. В последнее время в рамках традиционной системы обучения усиливается внимание к тестовой методике проверки знаний учащихся. Обратная связь помогает осуществлять диагностику и коррекцию процесса обучения. Управление процессом обучения осуществляется также за счет частичного использования технологий программированного и модульного обучений.

Изложенное выше позволяет сделать вывод о том, что традиционная система представляет собой открытую, динамично развивающуюся систему. Ее можно считать прародительницей многих других систем обучения, которые первоначально зарождались внутри традиционной и в последствии, по мере своего развития, приобретали самостоятельный статус. Традиционная система обучения остается преобладающей во всех школах мира.

Как бы основательно не была разработана какая-либо система (технология) обучения, требуется творческий подход к ее применению на практике. Процесс обучения настолько сложный, что по-видимому, полностью технологизировать его невозможно. Представление о технологии обучения как о некотором шаблоне, следование которому будто бы автоматически гарантирует высокие результаты обучения, является глубоко ошибочным.

В этой связи представляется поучительным размышление известного писателя М.М. Пришвина (1873 – 1954 гг.): «С невероятным трудом я занимался в школе математикой... но когда через двадцать пять лет пришлось помочь сыну, я в три дня просто прочитал алгебру... тот метод обучения, при

котором я не мог постигнуть алгебру, называется *методом готовых знаний*, а то, как я потом, когда мне изнутри понадобилось, и я сам проходил, называется *методом исследовательским*. Значит, разница в том, что в готовом методе, *велят*, а в исследовательском занимаюсь я сам, и задача педагога состоит в пробуждении у каждого ученика этой *самости*. Но это я так понимаю современные задачи, а на стенах даже такого живого учреждения, как Сокольническая биостанция, этот исследовательский метод изображен графически методистами так сложно, с таким множеством стрелок, крючков, лучей, что понять также трудно, как решить самую сложную задачу по какой-нибудь сферической тригонометрии, и если такой исследовательский метод явится в провинцию, то этот труп творчества ничем не будет отличаться от трупа готовых знаний» (Избранное. – М.: Изд-во «Правда», 1977. – С. 214).

2. Крупноблочное изложение учебного материала

Крупноблочное изложение учебного материала в определенной мере присутствует и в традиционной системе обучения (например, при изложении учебного материала лекционным методом), но в традиционном обучении оно не является главенствующим. Практика же обучения отличается излишним стремлением к дробному изложению, к чрезмерному дроблению учебного материала на мелкие порции. Дробная подача учебной информации затрудняет формирование целостной системы знаний. Именно этот недостаток стимулирует развитие технологии крупноблочного изложения учебного материала. Определенный вклад в развитие крупноблочного изложения учебного материала внесли учителя-новаторы.

2.1. *Крупноблочное изложение в опыте Р.Г. Хазанкина. К инвариантной части* технологии Р.Г. Хазанкина мы относим следующие ее исходные установки: подача учебной информации укрупненными порциями, обучение математике есть обучение решению задач, обучение решению задач есть обучение умению типизации и умению решать типовые задачи, сочетание урочной и внеурочной форм работы, индивидуализация обучения «трудных» и «одаренных», личностный подход, педагогика успеха, педагогика сотрудничества.

К вариативной части технологии Р.Г. Хазанкина мы относим формы обучения, которым в данном опыте отводится большая роль. Используется восемь типов уроков: урок-лекция, урок решения ключевых задач, урок решения обучающих задач, урок-консультация, урок-зачет, урок анализа ито-

гов зачета, урок-контрольная работа, урок анализа контрольной работы. Отметим, что Р.Г. Хазанкин свой опыт создавал, работая в классах с углубленным изучением математики. Поэтому использование некоторых «вузовских» форм обучения является вполне естественным.

Изучение новой темы Р.Г. Хазанкин начинает лекцией. По продолжительности лекция длится от половины урока до двух уроков. В ходе урока-лекции планируется достижение следующих целей: заинтересовать учащихся новым материалом, обеспечить необходимую мотивацию его изучения; изложить знания таким образом, чтобы рельефно подчеркивалась его суть, главные положения; познакомить учащихся с методами исследования, использование которых возможно при изучении данной темы; заложить базу не только для решения задач, но и для доступной учащимся исследовательской и творческой деятельности. Уделяется внимание эмоциональной стороне лекции, привлекаются интересные исторические сведения.

Существенная роль отводится конспектированию лекции учащимися. Если Р.Г. Хазанкин работает в классе первый год, то проводит специальное обучение рациональным приемам конспектирования. Качество конспектов проверяется непосредственно на уроке, на котором он составляется, отмечаются лучшие конспекты учащихся, показывается конспект, который составил учитель.

На лекции предусматривается обратная связь, в ходе лекции привлекаются все учащиеся. Формы такого привлечения могут быть самыми различными. Например, приведя доказательство какой-либо теоремы для одного случая, учитель дает возможность заметить, обладает ли доказательство полнотой. На нужную мысль наталкивает вопрос, который не содержит прямой подсказки. Например: «Теперь я жду от вас очень важного вопроса». Учитель высоко ценит хорошие вопросы, охотно отвечает на все вопросы учащихся. В каждой лекции присутствует такие элементы: мотивация изучения темы урока, проблемные ситуации и их разрешение, обсуждение вопросов, выносимых на самостоятельную работу, на урок-зачет. Особо следует отметить, что в данном опыте лекция связывается не только с информационно-рецептивным и репродуктивным методами обучения, но и с проблемным изложением. Это крайне важно для достижения развивающих целей.

В духе крупноблочного изложения ведется обучение учащихся решению задач. Вначале учителем выделяются ключевые задачи по

изучаемой теме. Ключевые задачи своего рода базовые задачи, которые дают возможность решать любую задачу по данной теме, находящуюся на уровне обязательного минимума сложности. Решение ключевых задач демонстрируется учащимся с помощью дополнительной лекции, в ходе которой актуализируется теоретический материал, необходимый для решения данных задач, подчеркиваются особенности письменного оформления решения, сообщаются приемы самоконтроля и т. д.

Более подробно опыт Р.Г. Хазанкина изложен в работах: Н.И. Зильбергер и др. *Формы работы Р.Г. Хазанкина // Математика в школе.* – 1986. – № 2; Халамайзер А.В. *Из опыта работы Хазанкина Р.Г. // Математика в школе.* – 1987. – № 4.

Сделаем некоторые выводы. Обратим внимание на тесную связь данной технологии с традиционной. Эта связь прослеживается, прежде всего, по применяемым формам обучения (урок-лекция, урок-консультация, зачетный урок, внеклассные формы работы по математике). В отличие от традиционной технологии, этим формам отводится ведущая роль. Относительно новым уроком является урок решения ключевых задач. Оговорку «относительно» мы употребляем, имея в виду, что понятие ключевых задач сильно пересекается с понятием типовых задач, которым большое внимание уделялось в традиционной методике. Тезис «обучение математике есть обучение решению задач» также имеет большое признание в традиционной методике (метод целесообразно подобранных задач С.И. Шохор-Троцкого, метод подготовительных задач, обучение через решение задач). Отметим еще, что технология Р.Г. Хазанкина является достаточно сбалансированной по достижению воспитательных, образовательных и развивающих целей. В целом идея крупноблочного изложения учебного материала достаточно эффективна, она может помочь избежать излишнего дробления учебного материала, затрудняющего формирование системы знаний. Отметим еще, что укрупнение учебного материала в опыте Р.Г. Хазанкина не связывалось с его перестройкой, изменением последовательности изложения, существующий учебник использовался как данный.

2.2. Крупноблочное изложение в опыте В.Ф. Шаталова. Данный учитель приводит следующие доводы в пользу крупноблочного изложения материала: создаются условия для ускоренного изучения, за счет этого высвобождается время для многократного и вариативного повторения с целью улучшения качества усвоения.

К инвариантной части технологии В.Ф. Шаталова можно отнести его подход к решению задач. Решение задач организовывается

без привязки к небольшому фрагменту темы или к определенной узкой теме, что заставляет мысль ученика неоднократно «пробегать» по всему освоенному информационному пространству, избирательно относиться к знаниям, переключаться с одних знаний на другие. Учебный материал воспринимается целостно с более глубоким выявлением связей между его элементами; создаются дополнительные условия для индивидуализации обучения.

В.Ф. Шаталов объединяет в один блок от 5 до 20 традиционных уроков. Объяснению нового материала отводится обычно вторая часть урока. Используется при этом рассказ. Особое внимание уделяется обеспечению его лаконичности и выразительности. Учитель стремиться не допускать ни одного лишнего слова. Каждое слово несет большую смысловую нагрузку. Это позволяет за небольшое время сообщать крупную порцию учебного материала.

К вариативной части относим приемы использования конспекта, в таком объеме и в таких видах, которые присутствуют в данной технологии. Существенное значение имеют записи, выполняемые учителем на доске. Эти записи переносятся учащимися в тетради и представляют (по терминологии В.Ф. Шаталова) лист опорных сигналов (ЛОС). Назначение ЛОС – помочь учащимся воспринимать и осознать крупную порцию учебного материала. ЛОС представляет собой средство наглядности в виде специально выполненных записей и рисунков. Обычно ЛОС не сводится к логико-структурным схемам учебного материала, хорошо известным в методике преподавания математики, а построен на мнемоническом принципе (содержит набор ключевых слов, знаков, рисунков и других смысловых опор для мышления и памяти). Особенность ЛОС, построенного на мнемоническом принципе, состоит в том, что он с помощью средств, занимающих на листе бумаги совсем немного места, фиксирует максимально большой объем информации. Логико-структурные схемы тоже обладают способностью уплотнять информацию, но не в такой степени. На ЛОС не стремятся зафиксировать подробное изложение доказательств теорем или решений задач, отражается, прежде всего, замысел доказательства, замысел решения, краткий план, подчеркивающий узловые моменты рассуждений. С помощью ЛОС ученик учится сворачивать информацию (что облегчает осознание и запоминание) и разворачивать ее (при подробном воспроизведении, применении знаний). ЛОС содействует переводу информации в долговременную память и помогает учащимся оперировать крупной порцией учебного материала.

Первоначальный рассказ учителя сопровождается записями на доске, выполненными цветными мелками. Ученики при этом только слушают учи-

теля. После первого рассказа следует второй, отличающийся от первого большей лаконичностью. Ведется он по опорному плакату – увеличенной копии ЛОС. Учитель при этом повторяет лишь узловые моменты первоначального рассказа. Если учебный материал оказывается трудным для учащихся, то возможно и третье повторение (учителем). После второго (или третьего) рассказа ученики получают ЛОС в черно-белом варианте, который заранее подготовлен учителем, и раскрывают его. Это помогает учащимся запомнить ЛОС, лучше выделить главную нить рассуждения. Специально уделяется внимание воспроизведению ЛОС (в устной и письменной форме). Далее ЛОС используется при подготовке к следующим урокам, ответам у доски, решению задач. Для хранения ЛОС заводится специальная папка. Учитель практикует многократное воспроизведение учебного материала учащимися. Ученики «отвечают» не только учителю, но и друг другу, родителям, диктуют свой ответ на магнитофонную ленту. Для обеспечения параллельной работы в классе имеется две доски (на передней и задней стенках).

Учитель применяет своеобразную форму контроля и оценки знаний учащихся (см. Шаталов В.Ф. Куда и как исчезли тройки. – М.: Педагогика, 1979).

Некоторые стороны данного педагогического эксперимента не поддаются детальному технологическому анализу. Не ясно, например, в какой мере и как использовались проблемные методы обучения, какова технология обучения учащихся решению задач различной сложности, какое место в этой технологии занимает обучение учащихся поиску решения задач, соответствующим эвристическим приемам и т. д. Развивающий характер обучения чаще формируется путем создания психологических ситуаций, помогающих ученику поверить в свои силы, проявить свои способности, выразить лучшие качества своей личности. Создается впечатление, что универсальным средством развития служит исключительно педагогика сотрудничества (создание климата доверия, эффекта «теплых рук учителя» и т. п.), которой в эксперименте В.Ф. Шаталова действительно уделяется большое внимание. Пожалуй, именно эта сторона, в конечном итоге, оказалась определяющей. Однако педагогика сотрудничества представлена не столь солидно, больше – в виде набора разрозненных частных. Недостаточная технологичность ряда существенных сторон процесса обучения, по-видимому, явилась причиной того, что попытки некоторых искренних последователей данного эксперимента оказались неудачными: поначалу имевший место живой интерес со стороны учащихся и родителей сменялся большим разочарованием (подобный пример знаком авторам по г. Могилеву).

Отметим некоторые субъективные факторы, помешавшие реализации технологии В.Ф. Шаталова в школьную практику. Для В.Ф. Шаталова характерно резко отрицательное отношение к «традиционной» методике. Вряд ли

ито оправдано, учитывая, что, по существу, большинство приемов, используемых, в видоизмененном виде, взято именно из этой методики. Не меньший «конфликт» произошел и с математикой. Так термин «область определения функции» назван им математической (!) нелепостью и абракадаброй. Большой резонанс в педагогической и математической общественности вызвали многочисленные ошибки в его листах опорных сигналов для 4-5-х классов (см. А.А. Столяр. Тревожные сигналы // Математика в школе. — 1988. — № 1). В заключении отметим, что более подробное описание эксперимента можно найти в книге: В.Ф. Шаталов. Точка опоры. М.: Педагогика, 1987.

Сделаем некоторые выводы. Большого внимания заслуживает идея укрупнения учебного материала, опережающего изучения теоретического материала, стремление перейти к решению задач сразу по всей теме или ее крупному фрагменту. Следует также отметить, что в опыте В.Ф. Шаталова материал учебника использовался как данный и какой-либо существенной перестройке или перегруппировке не подвергался.

2.3. Укрупнение дидактических единиц (УДЕ) по П.М. Эрдниева.

По мнению П.М. Эрдниева, укрупненное введение новых знаний позволяет: применять на каждом уроке обобщения, устанавливать в учебном материале больше внутри и межпредметных связей, выделять главное в большой порции учебного материала, повысить эффективность закрепления материала, подавать материал более эмоционально.

К инвариантной части данной технологии можно отнести следующие ее составляющие. В технологии УДЕ преобладают информационно-рецептивный и репродуктивный методы. Достижение целостности математических знаний (при УДЕ) рассматривается как главное условие развития учащихся. Подчеркивается роль более совершенной последовательности учебного материала, обеспечивающей его единство и целостность. Достижение последнего связывается с созданием единого учебника математики, построенного на интегративной основе.

Укрупнение единицы усвоения (УЕУ) связывается с такими приемами обучения: совместное и одновременное изучение взаимосвязанных (в частности, взаимообратных) действий, операций, функций, теорем и т. д.; обеспечение единства решения и составления задач; рассмотрение не только определенных задач, но и задач с избыточными и недостающими данными и др.

Обучение строится по такой схеме: усвоение «недифференцированного целого» в его первом приближении; формирование более

совершенного целостного математического образа. Ключевым элементом УДЕ является упражнение-триада, рассматриваемое на одном уроке: исходная задача, обратная задача, обобщенная задача. Основной формой упражнений служит многокомпонентное задание, включающее в себя указанную триаду. Вместо повторения, отложенного на следующий урок, практикуется выполнение преобразованного упражнения непосредственно вслед за исходным на данном уроке. Эта идея является ведущей при построении каждого урока.

Более детальное описание технологии УДЕ можно найти в работе: П.М. Эрдниев. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. – М., 1992.

Если сравнить технологию УДЕ с традиционной, то можно заметить, что используемые в ней приемы являются в основном традиционными. Разница заключается в том, что эти приемы в традиционном обучении не являются ведущими, а в системе УДЕ они играют главную роль. Типичным приемом УДЕ является совместное рассмотрение взаимно обратных теорем. Этот прием давно использовался в учебной литературе и в обучении (см., например, учебники А.П. Киселева). Запись взаимно обратных теорем параллельными колонками помогает их лучшему усвоению, четче подчеркивает систему изложения. Однако необходимо иметь в виду естественные ограничения УДЕ. Совместное рассмотрение взаимно обратных теорем приводит к укрупнению учебного материала в одном отношении и к разукрупнению в другом.

Например, тема «Признаки и свойства параллельных прямых (на плоскости)» содержит два признака (Т. 1. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны; Т. 2. Если сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны) и два свойства, представляющие собой теоремы, обратные предыдущим (Т. 3. Если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны; Т. 4. Если прямые параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°). С точки зрения УДЕ (учитывая также сложность доказательства т. 1.) предпочтительна такая последовательность: 1 урок – т. 1 и 3, 2 урок – т. 2 и 4. При этом увеличивается дистанция как между признаками, так и между свойствами. В итоге получаем больший разброс в изложении учебного материала, чем при «более традиционной» последовательности: 1 урок – т. 1-2; 2 урок – т. 3-4 (вначале признаки, затем свойства).

Необходимо иметь в виду еще и такое ограничение данного приема: не всякая теорема имеет себе обратную. Самое существенное

ограничение УДЕ возникает в систематическом курсе математики. В дедуктивной системе построения родственный материал может находиться на значительном удалении друг от друга и механические перестановки и объединения окажутся невозможными. Для сближения родственного материала обычно требуется существенная перестройка всей логико-математической системы курса. Эти же вопросы в работах по УДЕ, по существу, не затрагиваются.

К вариативной части УДЕ можно отнести такие ее составляющие. В технологии УДЕ широко используются «деформированные упражнения» (термин П.М. Эрдниева), в которых вместо буквенных обозначений переменных используются «пустые окна» разнообразной формы (в виде квадрата, ромба, треугольника). Чрезмерный объем таких записей приводит к замене математического языка неким суррогатом, что не только крайне нежелательно, но и недопустимо (см., например, Эрдниев О.П., Эрдниев П.М. Математика: Учебник для 7 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1995).

В системе УДЕ (на уровне технологии) остаются мало конкретизированными ряд принципиальных вопросов: как осуществлять в рамках репродуктивного метода (при его преимущественном использовании) развитие учащихся, как осуществлять первый этап обучения (усвоение «недифференцированного целого в его первом приближении») и др. Высказанные положения свидетельствуют о наличии значительных резервов совершенствования и корректирования технологий УДЕ.

2.4. Крупноблочное изложение по А.А. Окуневу. К инвариантной части технологии А.А. Окунева можно отнести следующие ее составляющие. В своей работе А.А. Окунев придерживается следующих требований к современному уроку: мышление должно главенствовать над памятью, учебный материал целесообразно делить на крупные блоки и подаваться большими порциями; теоретический материал должен даваться на высоком уровне, а спрашиваться с учетом способностей каждого ученика; учить применять знания в нестандартных ситуациях; ученик должен иметь перспективу в изложении учебного материала (например, в начале изучения темы просматривается учебник и выясняется, что и в какой последовательности будет изучаться); установка не на запоминание, а на смысл, задача – в центре содержания; при решении задачи акцент делается на обучение учащихся поиску решения задач.

К вариативной части можно отнести различные виды уроков: уроки, на которых учащиеся учатся запоминать учебный материал;

уроки поиска рациональных решений задач;
урок одной задачи;
уроки самостоятельной работы творческого характера;
урок самостоятельной работы по материалу, который не объясняли;
урок повторения материала под новым углом зрения;
лабораторные работы по геометрии;
урок устной контрольной работы;
урок-зачет; уроки с использованием традиционных форм внеклассной работы и др.

Более детально с опытом работы А.А. Окунева можно познакомиться по следующим публикациям: Материалы Всесоюзных педагогических чтений. // Математика в школе. – 1982. – № 5; Развитие у учащихся способности наблюдать и анализировать // Математика в школе. – 1982. – № 5; Приемы воспитания навыков самообучения на уроках математики // Математика в школе. – 1984. – № 2; Подготовка к уроку // Математика в школе. – 1991. – № 1; Урок одной задачи // Математика в школе. – 1981. – № 6; Спасибо за урок, дети! – М.: Просвещение, 1988; Сменить акцент // Народное образование. – 1991. – № 1, 3, 5.

2.5. Метод срезов по Е.Н. Рогановской и Н.М. Рогановскому. Метод срезов представляет собой новый вариант крупноблочного изложения учебного материала. Этот метод предполагает нетрадиционную организацию учебного материала. *Инвариантная часть* данной технологии. Изучение крупной порции учебного материала строится в несколько последовательных этапов, каждый из которых характеризует весь фрагмент в определенном теоретико-познавательном и практическом отношении:

1) обзор фрагмента с помощью графической схемы структуры учебного материала, просмотра содержания параграфа учебника: закладывается *общее представление* о том, что будет изучаться в этом фрагменте;

2) организация учебного материала, предполагающая первую его перегруппировку, в результате которой изложение темы или крупного ее фрагмента начинается с определений понятий. В начало темы выдвигаются все (или почти все) *понятия* данной темы. Это приводит к тому, что система данного учебного материала оказывается охарактеризованной в целом с понятийной стороны;

3) вторая перегруппировка учебного материала, в результате которой изложение темы или крупного ее фрагмента связывается с сообщением фактов (теорем). После определений вторым блоком идут

теоремы. Проводимое ознакомление с блоком *фактов* данного фрагмента учебного материала; позволяет полностью охарактеризовать фрагмент учебного материала с фактологической стороны;

4) третья перегруппировка учебного материала, в результате которой изложение темы или крупного ее фрагмента связывается с изучением *доказательств* фактов. После блока теорем идет блок доказательств, теоретический материал характеризуется с позиции методов обоснования;

5) четвертая перегруппировка учебного материала, в результате которой на первый план выдвигается решение *ключевых задач* по данному фрагменту учебного материала (характеризуется система задач, выделяются типовые задачи);

Метод срезов обеспечивает более быстрое «вхождение» учащихся в систему учебного материала и активное его усвоение. Он применен в учебно-методическом комплексе по геометрии для классов с углубленным изучением математики (авторы: Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н., Тавгень О.И.).

К вариативной части относим структуру дидактического цикла. Структура дидактического цикла включает в себя блочную структуризацию учебного материала и может варьироваться с учетом особенностей учебного содержания. Количество звеньев дидактического цикла и количество блоков могут не совпадать. Основной вариант структуры дидактического цикла при организации учебного материала на основе метода срезов приведен в таблице 4.1.

Таблица 4.1

**Структура дидактического цикла,
организованного на основе метода срезов**

Звенья дидактического цикла	Блоки учебного материала
1-е звено: теоретический материал	Блоки 1-k
2-е звено: задание для самоконтроля	
3-е звено: ключевые задачи	Блок k+1
4-е звено: решение задач первого и второго уровня сложности	Блок k+2
5-е звено: текущий контроль	Блок k+3
6-е звено: решение задач третьего уровня сложности	Блок k+4
7-е звено: рубежный контроль	Блок k+5

3. Информационная технология обучения, предусматривающая использование электронного учебника

В последнем десятилетии в Республике Беларусь выполнены значительные теоретические и экспериментальные исследования по разработке концепции общего среднего образования, образовательных стандартов и программ. На очереди стоят проблемы информатизации общего среднего образования, предполагающей разработку и использование различных электронных средств обучения в массовой школьной практике. Ведущим таким средством обучения, безусловно, является школьный электронный учебник (ШЭУ). Следует признать, что становление теории и практики создания и применения ШЭУ представляет собой достаточно длительный многоэтапный процесс. Не исключено, что по мере развития теории ШЭУ может изменяться толкование самого понятия ШЭУ, его функций в обучении, структуры и содержания (см. следующую тему). На начальном этапе ШЭУ естественно выступает как компьютерное сопровождение традиционного учебника.

ШЭУ в подавляющем большинстве случаев определяется как программно-информационная система, состоящая из программ для ЭВМ, реализующих сценарии учебной деятельности и предъявления дидактически подготовленных знаний.

Общим признаком компьютерного сопровождения к традиционному учебнику (КСТУ) является то обстоятельство, что оно не претендует на роль ведущего средства обучения, оставляя эту роль за традиционным учебником. Вспомогательный дидактический характер КСТУ в реальном процессе обучения может обуславливаться различными причинами: либо неполнотой содержания учебного материала КСТУ, либо эпизодичностью его использования (зависящей от комплектования школы компьютерными классами, обеспечения соответствующими программно-методическими средствами). На наш взгляд, менее предпочтительны такие КСТУ, которые отличаются неполнотой и фрагментарностью содержания. В этом случае часто может оказаться, что учитель имеет доступ в компьютерный класс, но изучаемой в этот момент учебной темы нет в КСТУ, или, наоборот, в КСТУ есть определенная учебная тема, но компьютерный класс

может быть занят другим учителем. Такая ситуация окажется менее вероятной, если КСТУ содержит все учебные темы по данному предмету.

ШЭУ, способный выполнить весь комплекс дидактических функций, но используемый по разным причинам не в полном объеме, по существу, выступает как КСТУ. Этому виду КСТУ мы придаем большую значимость. Заметим также, что при обеспечении той или иной степени систематичности в использовании КСТУ необходимо учитывать не только классные занятия, но самостоятельную работу на домашнем компьютере.

Электронный и традиционный учебники целесообразно строить как *самостоятельные средства обучения*, каждый из которых способен полностью обеспечить процесс обучения. Вместе с этим осуществляется их максимальная координация и согласованность по содержанию и объему учебного материала, структуре и последовательности учебных тем, уровню дифференциации обучения, строго выдерживается соответствие основополагающим государственным документам: концепции средней школы, образовательному стандарту и программе.

Выбор того или иного учебника и характера их сочетания производится учителем с учетом оснащенности школы программно-методическими средствами и пожеланий учащихся.

Применение электронного и традиционных учебников необходимо строить на основании принципа дополнительности, определенной очередности их использования с целью оптимизации процесса обучения. Например, изучение информации путем предъявления ее в виде небольших доз удобнее осуществить с помощью компьютера, а повторение крупной порции материала (нескольких параграфов) – с помощью традиционного учебника.

ШЭУ может использоваться в каждом звене дидактического цикла, подкрепляться традиционными формами работы (письменной и устной работой, фронтальной работой, беседой и т.д.) Обязательными признаками ШЭУ является наличие интерактивности, высокого уровня наглядности, оперативной обратной связи, значительной помощи в самостоятельной работе. Все задачи в ШЭУ представляются, как правило, в тестовой форме.

4. Технология обучения, предполагающая организацию управляемой самостоятельной работы учащихся на основе тестовых заданий

Обучающие тестовые задания рассматриваются как средство повышения доступности обучения. Если в традиционном учебнике далеко не все задачи приводятся с ответом или указанием, то в ШЭУ или в специально созданном учебно-методическом пособии на традиционном носителе не только каждое обучающее тестовое задание имеет эталон ответа, но и большинство тестовых заданий подкрепляется помощью. Доступность обеспечивается тем, что помощь осуществляется в полной мере и носит систематический характер.

4.1. Основные понятия. По-английски слово «test» означает «проба», «испытание». Впервые тесты в обучении начал применять Дж. Фишер (1864 г.). Теоретические основы тестирования разработаны Ф. Гальтоном (1883 г.). Термин «тест» ввел в научный оборот Дж. Кеттел (1890 г.). А. Бине применил тесты к исследованию высших психических функций человека – памяти, вниманию, эстетическому и этическому чувству (1891 г.). В. Штерн предложил тест на индекс интеллектуального развития человека (1911 г.).

В начале XX в. наметились разграничения в педагогическом и психологическом тестировании.

Первый стандартизированный педагогический тест был предложен Э. Торндайком (1874 – 1949 гг.). Были разработаны и внедрены тесты О. Стоуна по арифметике, Э. Торндайка по диагностике большинства школьных предметов.

Т. Келли разработал способ измерения интересов и наклонностей обучаемых (при изучении алгебры), а Ч. Спирмен предложил общие основы использования корреляционного анализа для стандартизации тестов.

В зарубежной практике широкое распространение получили диагностические тесты школьной успеваемости, использующие форму альтернативного выбора правильного ответа, написание краткого ответа, заполнения пропусков, дописывания букв, цифр, слов и т. п.

В настоящее время теория и практика тестирования представляют собой достаточно развитую область науки – тестологию. В нее входит тестография (разработка тестов с учетом предметной области тестирования) и тестотехника (разработка системы требований к процедуре тестирования).

В разработку педагогических основ оценивания и прогнозирования учебных достижений учащихся по математике определенный вклад внесли современные белорусские ученые Г.М. Булдык, С.А. Гуцанович, Е.В. Кра-

вещ, Н.А. Масюкова, И.А. Новик, Б.В. Пальчевский, А.М. Радьков, Н.М. Рогановский, В.Г. Скатецкий, А.П. Сманцер, Н.К. Степаненков, Т.А. Столярова и др.

Наиболее краткое определение теста таково (В.П. Беспалько): *тест – это задание на выполнение деятельности и эталон ответа или решения: $T = 3 + Э$.*

Под *интерактивными тестовыми заданиями* (Е.Н. Рогановская) понимаются тестовые задания, используемые для организации активного взаимодействия преподавателя и обучаемых по достижению всего комплекса учебно-воспитательных целей обучения. Функции преподавателя может выполнять ЭУ или другое учебное пособие, выступающее в роли самоучителя, «домашнего репетитора» и обеспечивающее своими средствами диалог с обучаемым.

Если основной целью применения теста является достижение определенных образовательных или развивающих целей, то такое тестовое задание назовем соответственно *обучающим или развивающим*.

Каждое тестовое задание предполагает фиксирование и учет результата его выполнения. Поэтому тест выполняет *контролирующую функцию*.

Тестовое задание может относиться конечному или промежуточному результату решения задачи. Если при этом оно обеспечивает обучаемого определенной помощью и оставляет возможность ему самостоятельно додумать и завершить решение задачи, то такое тестовое задание назовем *эвристическим* (Е.Н.Рогановская). Эвристические тесты рассматриваются нами в качестве основного вида развивающих тестовых заданий.

Тестовое задание, одновременно выполняющее в обучении различные дидактические функции, назовем *интегративным* (Е.Н.Рогановская).

По признаку формируемого уровня знаний выделим следующие *типы обучающих тестовых заданий* (Е.Н. Рогановская): тестовые задания на первичное закрепление знаний, на применение знаний по образцу, на применение знаний в ситуациях, близких к исходной ситуации, на применение знаний в новых ситуациях.

Особенно массовым является использование учебных тестов в ШЭУ. В этой связи необходимо иметь в виду весь существующий арсенал тестовой методики и правильно использовать его с учетом технологии обучения, особенностей каждого ее дидактического звена.

Традиционно тесты рассматриваются как средство измерения учебных достижений, средство исследования и измерения психических свойств и состояний испытуемых (именно это имеют в виду, когда говорят о тестировании). В меньшей мере – как предмет и средство обучения.

Отметим, что обучающие тестовые задания и тесты для измерения знаний или психических качеств существенно отличаются друг от друга уже по цели. Различия в цели диктуют не менее серьезные различия и по другим признакам. В первую очередь отличия проявляются в отношении традиционного «измерительного» признака. В обучающих тестовых заданиях, по нашему мнению, этот признак присутствует, но не является ведущим. Если говорить о тестах на измерение, то, как и любое измерение, оно является приближенным и проводится с определенной (варьируемой) точностью, задаваемой целью измерения, контекстом изучаемой проблемы, практическими потребностями. Не всегда следует прибегать к сверхточным измерениям, если в практическом плане вполне достаточными окажутся менее точные измерения. Необходимо иметь также в виду, что любое обычное, не тестовое учебное задание в той или иной степени выполняет измерительную функцию.

Справедливо отмечается, что понятия «тест» и «математическая задача» находятся в отношении непустого пересечения (С.А.Гуцанович, А.М.-Радьков). Тем более в отношении непустого пересечения находятся понятия «обучающий тест» и «измерительный тест».

4.2. Стимулирующие тестовые задания к теоретическому параграфу. Это обучающие тестовые задания на первичное закрепление знаний, они ориентированы на формирование таких уровней знаний как узнавание и воспроизведение. Эти тестовые задания предлагаются сразу после первичного ознакомления с фрагментом теоретического материала. Особенностью данных тестовых заданий является максимальная простота и доступность. Эти тесты выполняются устно. Учитывая их психологическую нагрузку, мы называем их «тестами на воодушевление», или стимулирующими тестовыми заданиями. Основная цель этих тестов активизировать внимание ученика, стимулировать неоднократное обращение к теоретическому материалу, вдумчивое его прочтение.

Тестовое задание на первичное закрепление знаний может относиться как к единичному элементу учебного материала, так и к группе элементов (при крупноблочном изложении). В предлагаемой технологии к теоретическому параграфу предлагается один укрупненный тест

(см. пример 1). Такой тест, как минимум, приучает учащихся читать и анализировать текст, оперировать достаточно крупной порцией учебного материала, помогает избежать отвлечения их внимания на несущественные детали, обеспечивает более быстрый и своевременный переход к задачному материалу. Переход к задачному материалу осуществляется при условии правильного выполнения теста.

Пример 1. Тест к параграфу теории

Тест № 1. Восстановите текст

**§ 1. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ.
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ**

Опр. 1. Расстоянием от точки O до прямой a называется из всех расстояний от точки O до точек этой прямой.

Опр. 2. Расстоянием от точки O до луча AB называется наименьшее из всех от точки O до точек этого луча.

Если точка лежит на прямой (луче), то расстояние от точки до прямой (луча) равно нулю. Если точка не лежит на прямой (луче), то расстояние от точки до прямой (луча) больше нуля.

Опр. 3. Расстоянием от точки O до фигуры F называется наименьшее из всех расстояний до точек этой фигуры.

Опр. 4. Расстоянием между двумя прямыми называется наименьшее из всех расстояний между точками A и B , где

Если две прямые пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если две прямые параллельны и не совпадают, то расстояние между ними больше нуля.

4.3. Дидактические особенности представления задач в тестовой форме. Специфика ШЭУ стимулирует внимание к обучающей стороне тестов, которая, по нашему мнению, остается еще недостаточно изученной. В ШЭУ, предусматривающим непрерывный учет результатов учебной работы, в се задачи предъявляются в тестовой форме. Поэтому необходимо иметь в виду, что они приводятся, прежде всего, с целью обучения, а попутно проводимое фиксирование результатов выполняет диагностическую функцию — уточнить модель и профиль ученика, его траекторию обучения, повысить оперативность управления процессом обучения (меру и характер помощи). В этом случае говорят об обучающих тестах, тестах-тренажерах, те-

стах на закрепление и повторение изученного учебного материала, тестах развивающего характера и т.д.

Существенно иметь в виду, что большинство дидактических и методических особенностей математических задач остаются инвариантными относительно той или иной формы их представления: традиционной или тестовой. Поэтому существующие классификации математических задач (дидактического, предметно-содержательного плана), все, что имеется прогрессивного в методике обучения учащихся решению задач, может быть перенесено и на обучающие математические тестовые задания. Например, как и в отношении математических задач в их традиционной форме постановки, можно говорить о тестовых заданиях алгоритмического и неалгоритмического типа, об определенных, неопределенных или переопределенных тестовых заданиях, о тестовых заданиях с дидактической, познавательной, развивающей функцией, о тестовых заданиях на воспроизведение и применение знаний и т.д.

Наряду со сказанным, представление задачного материала в тестовой форме вносит существенные изменения в содержание и структуру теста.

Возникает ряд новых вопросов:

- вносить или не вносить в содержание и структуру теста саму задачу;
- следует ли включать в содержание теста определенную помощь и подсказку (относящуюся, например, к процессу поиска решения);
- должен ли проверяться только конечный результат решения задачи, или необходима проверка правильности замысла решения задачи, некоторых его узловых промежуточных шагов.

В предлагаемой технологии использование тестовых заданий строится на основе единства обучающей, диагностической и контролирующей их функций.

Классификация тестовых заданий обучающего характера связывается с формированием того или иного уровня знаний.

4.4. Основные требования к обучающим тестовым заданиям.

Обучающие тестовые задания должны удовлетворять как общим дидактическим принципам обучения (научности, доступности, наглядности и т.д.), так и специальным требованиям.

К специальным требованиям относятся, прежде всего, требования валидности и надежности теста. Под *валидностью* (адекватностью) теста

понимают точное соответствие содержания теста смыслу и содержанию выявляемого признака. Иными словами, валидность отражает тот факт, что тест действительно измеряет тот параметр, который по замыслу составителя должен измеряться. Содержательная валидность (репрезентативность) предполагает отражение в содержании теста всех существенных сторон изучаемого информационного объекта. Содержательная валидность обеспечивается полнотой, целостностью и системностью отражения в тестовых заданиях проверяемого учебного материала. Она не допускает несоответствия между целью и содержанием теста, возможную подмену наиболее важных сторон информации второстепенными сторонами и т.д.

Пример 2. Тестовое задание к задаче на построение: *помощь* + *контроль*

§ 7. Прямоугольная система координат

Чем одна система координат отличается от другой?

Задача № 50, а) 1): Постройте оси системы координат xOy и точку $A(3; 2)$. Не изменяя расположение осей системы координат, выберите новую систему так, чтобы точка A имела координаты 6 и 4.

Контроль построений. Масштаб на координатных осях необходимо:

- а) оставить без изменения; б) уменьшить в 2 раза;
- в) увеличит в 2 раза; г) увеличит на 2 единицы.

Пример 3. Тестовое задание к задаче на доказательство: *помощь* + *контроль*

§ 7. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Как воспользоваться формулой расстояния?

Задача № 53, е: Две стороны квадрата $OABC$ лежат на положительных координатных полуосях; K – середина стороны AB , P делит диагональ AC так, что $CP = \frac{1}{4}CA$. Докажите, что $\triangle OPK$ является прямоугольным и равнобедренным.

Контроль вычислений. Необходимо вычислить стороны $\triangle OPK$ и воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. Положим сторону квадрата, равной 1. Тогда:

- а) $K\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $P\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$; б) $K\left(\frac{1}{2}; 3\right)$, $P\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$; в) $K\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $P\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$; г) $K\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Известны объективные трудности в разработке тестовых заданий к доказательству теорем, решению задач на доказательство и построение. Часто приводится пошаговая запись доказательства в «перепутанной последовательности» и учащимся предлагается подобрать правильную последовательность шагов. Аналогичные тестовые задания используются и для задач на построение. При всей полезности этих тестовых заданий они лишь частично формируют (и проверяют) умение находить, умение придумывать доказательство теоремы или решение задачи.

**§ 17. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения
III уровень сложности**

Как применить формулы приведения?

Задача 135 е

Краткая запись задачи:

$ABCD$ – параллелограмм, $\cos A = 0,1$.

$\cos B = ?$ $\cos C = ?$ $\cos D = ?$

Контроль рассуждений.

1) $\cos C = \cos A = 0,1$;

а) 2) $\cos B = \cos (180^\circ - A) = \cos A = 0,1$;

3) $\cos D = \cos B = 0,1$;

б) 2) $\cos B = \cos (180^\circ - A) = -\cos A = -0,1$;

3) $\cos D = \cos B = -0,1$.

Следует признать, что умение решать задачи этими тестовыми заданиями не формируется и не проверяется. Различие между сравниваемыми умениями точно такое же как, например, умение гончара изготовить сосуд и умение другого мастера – склеить разбитый сосуд из имеющихся осколков. Излишнее акцентирование тестовых заданий на восстановление последовательности может привести к нарушению требования валидности, прежде всего, обучающих тестовых заданий к задачам на доказательство и построение.

В данной технологии обучающие тестовые задания к задачам на доказательство и построение связываются с помощью и контролем рассуждений, относящихся к наиболее важным узловым этапам решения задачи (см. примеры 2-5). На наш взгляд, это в большей мере отвечают требованию валидности обучающих тестовых заданий. Контроль по промежуточному результату может применяться и в задачах на вычисление (см. пример 5).

Надежность тестов часто связывают с точностью: чем точнее измерение, тем оно надежнее. Надежность теста – это устойчивость результатов теста к действию случайных факторов, это степень согласованности результатов теста при первом и повторном его испытании по отношению к одному и тому же испытуемому. Показателем надежности теста является коэффициент корреляции оценок одной и той же группы учащихся между результатами двух эквивалентных вариантов. Если тест валидный по отношению к данной цели, то он является и надежным.

§ 1. Расстояние от точки до прямой.

III уровень сложности

Какое дополнительное построение необходимо выполнить?

Задача № 5, в: Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой на основании AC равнобедренного $\triangle ABC$, до прямых, содержащих его боковые стороны, равна длине высоты, проведенной к боковой стороне.

Контроль рассуждений. Пусть $AB = BC$, $M \in AC$, $MM_1 \perp BC$, $MM_2 \perp AB$, AA_1 – высота $\triangle ABC$, проведенная к боковой стороне. Требуется доказать, что $MM_1 + MM_2 = AA_1$. Для доказательства проведем $AK \parallel BC$, продолжим отрезок MM_1 до пересечения с AK в точке M_3 . Завершите решение задачи:

а) $\triangle MM_2A = \triangle MM_3A$ по гипотенузе и острому углу.

Поэтому $MM_2 = MM_3$ и $MM_1 + MM_2 = MM_1 + MM_3 = M_3M_1 = AA_1$;

б) $\triangle MM_2A = \triangle MM_3A$ по гипотенузе и катету.

Поэтому $MM_2 = MM_3$ и $MM_1 + MM_2 = MM_1 + MM_3 = M_3M_1 = AA_1$;

в) $\triangle MM_2A = \triangle MM_3A$ по двум катетам.

Поэтому $MM_2 = MM_3$ и $MM_1 + MM_2 = MM_1 + MM_3 = M_3M_1 = AA_1$;

г) $\triangle MM_2A = \triangle MM_3A$ по катету и острому углу.

Поэтому $MM_2 = MM_3$ и $MM_1 + MM_2 = MM_1 + MM_3 = M_3M_1 = AA_1$.

Помощь.
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle C = \angle MAM_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle MAM_3; \quad \left. \begin{array}{l} AK \parallel BC \\ MM_3 \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow MM_3 \perp AK \dots\dots$$

Обратное неверно: тест может быть надежным, но не валидным по отношению к той или иной цели. Именно эта ситуация имеет место в тестах на восстановление последовательности, приводимых к задачам на доказательство и построение. Тест на восстановление последовательности предложенных шагов доказательства является более надежным, но менее валидным по отношению к обучающей цели.

5. Задания для практического занятия

Задание 1. Охарактеризуйте современное состояние традиционной технологии обучения.

Задание 2. Перечислите основные положения технологии крупноблочного изложения учебного материала.

Задание 3. Изложите фрагмент учебного материала с помощью метода срезов.

Задание 4. Сформулируйте основные положения теории ШЭУ.

Задание 5. Разработайте возможные примеры обучения с помощью ШЭУ.

ШКОЛЬНЫЙ УЧЕБНИК МАТЕМАТИКИ – СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

1. Учебник на традиционном носителе
2. Школьный электронный учебник (ШЭУ)
3. Интегративный учебник
4. Задания для практического занятия

1. Учебник на традиционном носителе

1.1. Функции учебника. Все тенденции школьного математического образования отражаются прежде всего в содержании школьного учебника. Учебник является основным средством обучения, во многом влияющим на все составные части процесса обучения. На основе учебника формируются другие элементы учебно-методического комплекса (дидактические материалы для учащихся, методические пособия для учителя, рабочая тетрадь, сборник задач повышенной трудности, олимпиадных задач, компьютерный вариант учебника и др.) Заметим, что овладение данной темой играет существенную роль в профессиональной подготовке учителя математики.

Правильное использование учебника в процессе обучения предполагает знакомство с важнейшими вопросами теории его построения, концепцией учебника, содержанием, функциями, выполняемыми в обучении, ориентацией на ту или иную технологию обучения и т.д. В современной педагогической науке существуют различные точки зрения на перспективы развития школьного учебника математики. Учебник является носителем предметной информации и, вместе с этим, он содержит определенный методический аппарат, помогающий ученику усваивать эту информацию.

А.Н. Колмогоров считает, что в учебнике не нужно избегать вводных объяснений, мотивирующих введение новых понятий, поясняющих значение предлагаемых далее факторов; не следует бояться «ссылок вперед», если какой-либо затронутый вопрос получит более полное освещение позднее; нежелательна экономия за счет иллюстраций, и в частности, сокращения

числа чертежей; в учебнике необходимо давать какую-то долю важнейших современных открытий; вообще учебник должен содержать по каждой теме вводную, основную и дополнительную части.

Д.Д. Зуев отмечает, что современному учебнику все больше присущи *интегративные функции*, поэтому лучшими учебниками являются те, которые органически объединяют в себе элементы соответственно учебника, рабочей книги, тетради (включающих вопросы, задания, проблемные установки), сборника (хрестоматии) учебных материалов, справочника и т.д.

Учебник, будучи включен в круг различных средств обучения, как отмечает В.В. Краевский, неминуемо должен потерять свою автономию и с ней определенную часть присущей ему сейчас специфики.

С.Г. Шаповаленко характеризует учебник как *резюме изложения научных сведений*. Примерно той же точки зрения придерживается автор учебного пособия по геометрии А.В. Погорелов.

С.Г. Шаповаленко отмечает, что учебник стимулирует возникновение других печатных средств обучения для учащихся, определяет их содержание и отчасти методику построения и способ изложения. Это происходит потому, что учебник может вместить в себя лишь небольшое количество учебного материала и инструкций для самостоятельной работы учащихся, но не может вобрать их полностью без нарушений логической и дидактической стройности. Именно поэтому, наряду с учебниками, требовательно заявляли о себе, существуют, и будут существовать сборники задач и упражнений, руководства для самостоятельной работы, практических занятий учащихся, тетради с печатной основой, словари, справочники и другие средства.

Для современных учебников математики характерно *слияние* их с задачниками. Анализ универсальных учебников убеждает в том, что их авторы (несмотря на строго ограниченный объем книги) сознательно шли на увеличение состава структурных компонентов. Это объяснялось отчасти отсутствием соответствующих задачников и стремлением авторов построить систему задач, которая бы продолжала и развивала основные идеи курса, обеспечивала формирование основных знаний, умений и навыков неразрывно с его содержанием.

Некоторые исследователи отмечают, что соединение учебника и задачника не шло на пользу ни учебнику, ни задачнику. Внешне система задач была современна, но переход на новое содержание обучения не привел к должному изменению содержания и системы задач, помещенных в учебниках. Спустя некоторое время появились дополнительные сборники задач для учителя, но они породили новую, сложную проблему – проблему отбора задач. Конечно, учитель может и

даже обязан варьировать подбор задач (считаясь с конкретными условиями учебных занятий в школе, с данным составом учащихся), но это должно делаться на основе стабильной системы задач, которая в процессе варьирования не подвергается резким изменениям. Сокращения числа часов на математику, ограниченность объема учебника заметно сказывается на полноте системы задач, на ее стабильности. Так, например, в учебнике геометрии А.В. Погорелова нет многих упражнений дидактического характера, подготавливающих учащихся к усвоению того или иного определения, теоремы или доказательства. В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна и др., напротив, много внимания уделяется разъяснению вводимых понятий.

Особенно сложной в рамках универсального учебника представляется разработка *методического аппарата* задачника. Методический аппарат задачника является частью методического аппарата учебного курса. Разработка его невозможна в отрыве от целого. Вместе с этим, для методического аппарата задачника характерны и свои специфические черты, проявление которых в рамках учебника крайне затруднено. Имеются объективные противоречия (в рамках универсального учебника) между совершенствованием методического аппарата задачника и логической стройностью теоретической части курса, между увеличением общего объема учебника (в связи с включением методического аппарата задачника) и стремлением выдержать этот объем в известных границах.

Совершенствование методического аппарата предполагает включение в учебник системы указаний, сносок, справок, чертежей, таблиц и т.д., направленных на выработку у учащихся приемов и способов деятельности при решении задач. Включение такого аппарата может привести к перегрузке учебника, затруднениям в самостоятельной работе учащихся с книгой.

Слияние учебника и задачника (даже с минимальным, возможно неполным набором задач) увеличивает объем учебника, что стесняет авторов в совершенствовании методического аппарата теоретической части курса, не говоря уже о таком аппарате к задачнику. В итоге учебник либо слишком сух, неудобен в практической работе, но выдержан в объеме, либо оснащен методическим аппаратом (зачастую несовершенным, недостаточным), но перегружен. Такой учебник не может удовлетворить запросы массового общего среднего образования.

1.2. Основные подходы к систематизации содержания учебника.
Построение содержания учебника осуществляется с помощью трех ос-

новых видов систематизации: *целевой, логико-математической и психолого-дидактической*. Каким образом проводятся указанные систематизации, какое построение получается в итоге, зависит от общей научно-методической концепции учебника, различных условий обучения.

Процесс построения учебника можно представить следующими этапами.

I этап: выделение содержательных линий учебного курса, оценка их дидактического потенциала (возможность реализации дидактических принципов, развития учащихся, анализ интегративных качеств учебного материала и т.д.);

II этап: систематизация учебного материала внутри содержательных линий, планирование внутрипредметных интеграционных связей;

III этап: интеграция внутрипредметных содержательных линий друг с другом;

IV этап: межпредметная интеграция;

V этап: конструирование общей логической структуры учебного курса с учетом технологии обучения;

VI этап: конструирование всех фрагментов учебного курса с конкретизацией основных целей обучения;

VII этап: анализ возможностей психолого-дидактической систематизации учебного материала;

VIII этап: подбор и применение приемов психолого-дидактической систематизации с учетом специфики учебного материала.

1.3. Требования к построению задачника. При выделении задачника в качестве самостоятельной части должны соблюдаться следующие требования:

1. Тематические рубрики, представленные в задачнике, должны совпадать с рубриками теоретической части учебника.

2. Должна обеспечиваться неразрывная связь содержания теоретического материала и содержания задач.

3. В учебнике необходимо оставить лишь минимальное количество задач и примеров, иллюстрирующих изложение теории, вопросов для самоконтроля.

4. В задачнике (особенно для базового уровня) необходимы упражнения, подготавливающие восприятие нового теоретического материала, задачи на формирование понятий.

5. В задачнике необходимы образцы решения типовых задач (для облегчения самостоятельной работы учащихся в период подготовки к экзаменам).

6. Целесообразно представление системы задач в виде последовательных групп по нарастанию их сложности.

7. Систематизацию задач целесообразно вести не только по тематическому признаку и уровню сложности, но и по наиболее значимым учебным проблемам.

При разработке методического аппарата задачника необходим учет целей общего образования, закономерностей и принципов обучения, специфики учебного предмета «математика», конкретных условий практики обучения. Разработка методического аппарата задачника должна быть направлена на устранение перегрузки учащихся, ориентирована на педагогическую действительность, педагогическую практику. Вопросы о том, как должны в задачнике задаваться уровни познавательной деятельности, методы познания, методы и формы обучения, могут быть решены на основе четкой психологической и методической систематизации задач.

2. Школьный электронный учебник (ШЭУ)

2.1. Что такое ШЭУ? Часто авторы при определении понятия ЭУ идут по пути перечисления максимального количества признаков. Неудобство таких определений состоит в том, что если не выполняется хотя бы один из таких признаков, пусть даже далеко не первостепенный, то электронное средство никак не может претендовать на роль учебника. Особо подчеркнем, что в данном учебном пособии, говоря об учебнике, мы имеем в виду учебник, предназначенный для первоначального изучения. Обобщая существующие предложения, примем следующее определение ШЭУ.

ШЭУ – это обучающая программная система, обеспечивающая выполнение всего комплекса дидактических функций: 1) содержащая в полном объеме теоретический и задачный материал в форме, доступной для первоначального изучения; 2) снабженная системой поиска учебной информации; 3) имеющая необходимые интерактивные свойства; 4) дающая возможность осуществлять математическое и имитационное моделирование с компьютерной визуализацией; 5) реализующая основные звенья технологии обучения (изучение нового материала, учебно-тренировочную деятельность, контроль и самоконтроль уровня знаний).

ШЭУ решает следующие педагогические задачи:

- первоначальное изучение учебного курса;
- изучение учебного курса на разных уровнях глубины и детализации;

- повторение, закрепление и актуализацию знаний, умений и навыков;
- контроль и оценивание уровней знаний и умений;
- формирование интереса к математике и развитие математических способностей.

Отличие ШЭУ от традиционного учебника выражается следующими признаками:

1) наличием специфической системы управления процессом обучения, заложенной в структуру ЭУ, включающей средства линейного и нелинейного структурирования и оптимизации учебного материала, средства диагностики и коррекции знаний, разветвленную сеть систематической обратной связи и т.п.;

2) возможностью применения словесных методов, позволяющих значительно поднять продуктивность познавательных процессов;

3) применением графических средств, показывающих процесс построений и рассуждений, обеспечивающих высокий уровень наглядности и доступности;

4) систематическое использование средств мультимедиа, позволяющих организовать виртуальный эксперимент, лабораторный практикум, исследование решения математических задач.

2.2. Достоинства и недостатки электронного учебника. Достоинства:

- возможность интерактивного взаимодействия между учеником и компонентами учебника. Уровень интерактивности может изменяться от низкого и среднего (перемещение по ссылкам, вызов порции информации того или иного размера) до высокого (использование когнитивной компьютерной графики, самостоятельное тестирование, непосредственное участие ученика в моделировании процессов и т.д.);

- новые по сравнению с традиционным учебником мультимедийные средства воздействия на ученика (мультимедийный ШЭУ), что помогает быстрее осваивать и лучше запоминать учебный материал. По мнению большинства исследователей особенно важным представляется включение в ЭУ анимационных моделей. Положительный эффект дает звуковое сопровождение, воспроизводящее или дополняющее текст учебника;

- адаптация учебного материала к уровню знаний ученика, что также способствует лучшему восприятию и запоминанию учебной информации. Адаптация основана на возможности выбора траектории обучения (в соответствии с результатами тестирования ученику

предоставляется слой учебной информации, соответствующий уровню его знаний);

- автоматизированный контроль уровня знаний ученика и автоматический выбор в соответствии с уровнем знаний траектории обучения, как указано в предыдущем пункте;

- адаптация и оптимизация пользовательского интерфейса с учетом возможностей ученика. Использование текстовой, гипертекстовой, фреймовой структуры учебника, причем количество фреймов, их размеры и содержание могут изменяться. Вместо некоторых фреймов могут использоваться всплывающие окна;

- построение простого и удобного механизма навигации в пределах ШЭУ. В ШЭУ используются гиперссылки и фреймовая структура или карты-изображения, что позволяет легко и быстро перейти к нужному фрагменту учебного материала. При этом не требуется запоминать страницы, на которых были расположены те или иные фрагменты;

- удобный поисковый механизм не только в пределах ШЭУ, но и вне его (возможность обращения к внешним источникам информации).

Недостатки ЭУ: требуется специальное дополнительное оборудование для работы с ним (компьютер с соответствующим программным обеспечением и качественным монитором, иногда дисковод для компакт-дисков и/или сетевой карты или модем для работы в локальной сети или Internet); непривычность электронной формы представления информации; возможность повышенной утомляемости при работе с монитором.

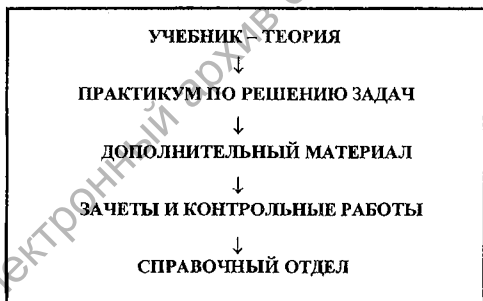


Рис. 5.1

2.3. Структура ШЭУ.

Большинство исследователей в общей структуре ШЭУ предусматривают наличие обучающей компоненты, тренинга и средств контроля. В авторском электронном учебнике геометрии [98] (программная реализация осуществлена в Информационном центре Мозырского государственного педагогического универси-

тета) применяется четырехкомпонентная *общая структура ШЭУ* (рис. 5.1). В соответствии с этой структурой определяется *архитектура ШЭУ*:

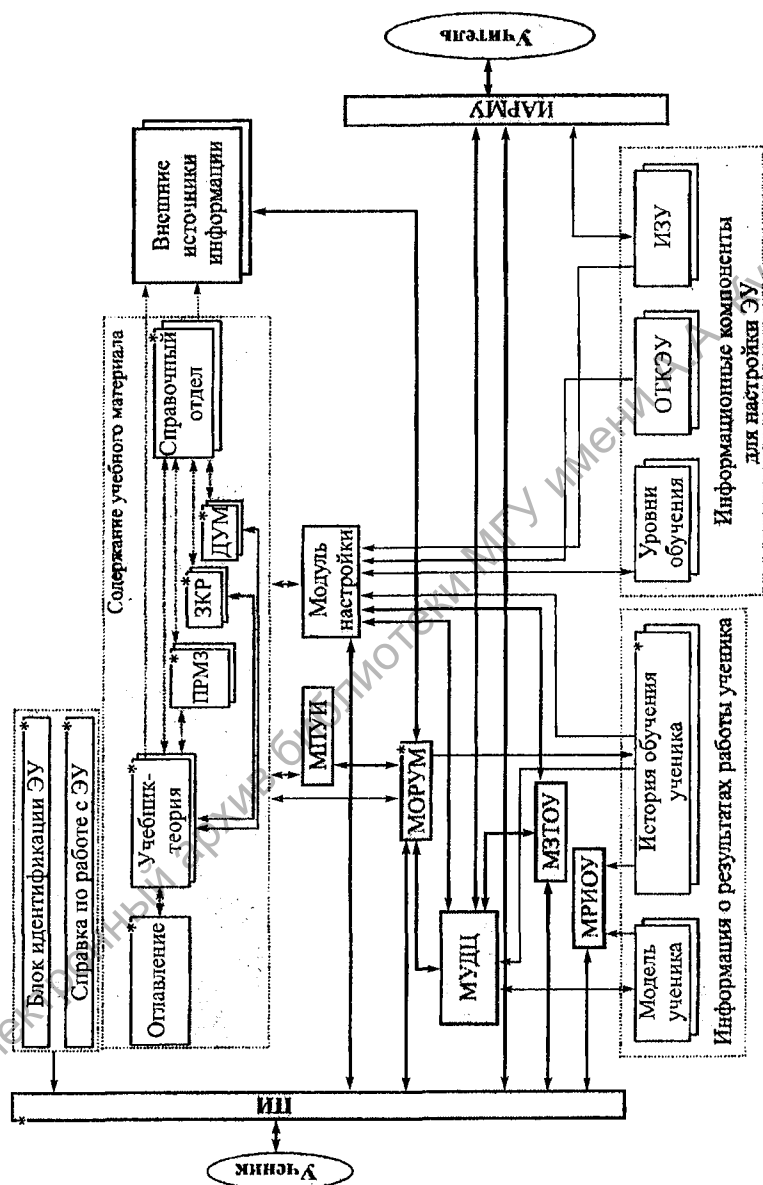


Рис. 5.2

а) состав основных информационных модулей (учебный теоретический материал, практикум по решению задач, дополнительный материал, материал для зачетов и контрольных работ, справочный отдел);

б) состав программных модулей ШЭУ (модуль обеспечения работы с учебником-теорией, модуль обеспечения работы с практикумом по решению задач, модуль поиска учебной информации и др.);

в) а также их связи друг с другом, пользователями и внешними программными системами.

Предлагается следующая *конфигурация ШЭУ* (рис. 5.2). В конкретных реализациях эта конфигурация может быть дополнена некоторыми другими модулями. Информационные компоненты (массивы, блоки, файлы, фрагменты базы данных и т.д.) выделяются на основании их назначения, использования, форматов представления данных, способов доступа и других признаков. Выделение программных модулей производится по функциональному признаку.

Обозначения, принятые на этой схеме:

ПИ – пользовательский интерфейс;

ИАРМУ – интерфейс с автоматизированным рабочим местом учителя;

МОМУ – модуль обеспечения работы с учебным материалом;

МПУИ – модуль поиска учебной информации;

МУДЦ – модуль управления дидактическим циклом;

МРИОУ – модуль регистрации истории обучения ученика;

МЗТОУ – модуль задания траектории обучения ученика;

ОТКЭУ – описание текущей конфигурации ЭУ;

ПРМЗ – практикум по решению задач;

ЗКР – зачеты и контрольные работы;

ДУМ – дополнительный учебный материал;

ИЗУ – индивидуальное задание ученика.

Основной структурной единицей ШЭУ мы считаем электронную (экрannую) страницу, организованную специальным образом на экране дисплея, определяющими признаками которой являются:

1) целостность – наличие логически целостного фрагмента содержания учебного материала, представляющего отдельный вопрос учебной программы (часть теоретического параграфа, или отдельную задачу из Практикума по решению задач);

2) обеспечение определенных звеньев дидактического цикла – как правило, одна страница не рассчитана на весь дидактический цикл, а только на часть его звеньев;

3) учет специфики содержания учебного материала при разработке: а) дидактических средств управления процессом познания, б) дидактических средств контроля и стимулирования познавательной деятельности, в) мультимедийных средств представления информации;

4) фиксированное время работы ученика с ШЭУ (в пределах 15–45 минут).

Таким образом, под электронной страницей следует понимать, с одной стороны, форму организации обучения в рамках информационной технологии обучения, которая обеспечивает активную и планомерную познавательную деятельность учащихся, направленную на решение поставленных перед ним учебных задач, а с другой – основную структурную единицу ШЭУ.

Структурными элементами электронной страницы являются текстовые, графические и анимационные окна.

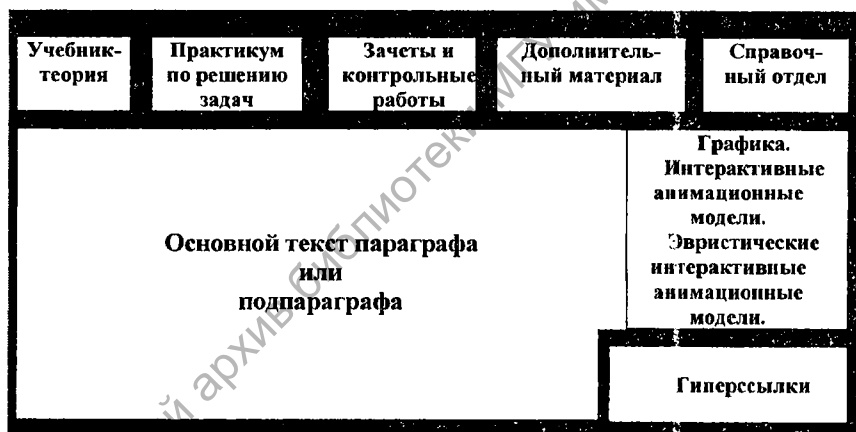


Рис. 5.3

Для ШЭУ оптимальной мы считаем трехоконную структуру электронной страницы (рис. 5.3):

первое окно содержит текст основного учебного материала, второе окно – графику, соответствующую данному тексту и третье окно – вспомогательный учебный материал в виде гиперссылок.

Большее увеличение числа окон при ограниченной площади экрана затрудняет размещение информации, приводит к ее чрезмерному дроблению.

По возможности электронная страница организуется без привлечения линеек прокрутки.

2.4. *Приемы построения текстового фрейма.* Предлагается новая адаптированная к возможностям учащихся средней школы технология конструирования ШЭУ, основанная на применении двух методов:

1) *метода срезов* (новый вариант крупноблочного изложения учебного материала, предполагающий рациональную организацию дидактического цикла) и

2) *метода системной интерактивной структуризации учебного материала* (новый метод, основанный на синхронной структуризации текста и графических образов).

Метод срезов описан выше. Под *структуризацией учебного материала* мы понимаем применение методов и приемов систематизации, позволяющих в явном, непосредственном виде представить структуру учебного материала, излагаемого в любой его форме (текст, графика, цвет, звук). В каждом учебном материале содержатся две главные его компоненты: текст и графика. Под *системной структуризацией учебного материала* мы понимаем структуризацию текста (посредством нумерации его частей, разграничения этих частей с помощью цвета, голоса, музыкального сопровождения, электронных кнопок перехода от одной части учебного материала к другой и т.д.) и синхронно проводимую структуризацию графического материала, соответствующего этому тексту.

Структуризация графического материала отражает последовательность проводимых рассуждений. Эта последовательность может быть отражена на рисунке (чертеже) также нумерацией и одновременно другими средствами, например, определенной последовательностью цветов линий. Такая «двойная» или «тройная» структуризация учебного материала позволяет более наглядно и рельефно обнажить структуру учебного материала, благодаря этому, она оптимальным образом содействует его целостному восприятию.

Под *системной интерактивной структуризацией учебного материала* мы понимаем комплексную структуризацию учебного материала, предоставляющую учащимся возможность самим участво-

вать в структуризации учебного материала: структурированный текст дополнить структурированным рисунком, по структурированному рисунку воспроизвести текст, при помощи частично структурированного рисунка догадаться, как провести полное рассуждение и т.д. Важным приемом интерактивной структуризации является предоставление учащимся возможности по своему усмотрению вызывать учебный материал дробными или укрупненными порциями.

Структуризация может отличаться масштабами применения и в зависимости от этого относится либо к небольшому фрагменту учебного материала, либо к крупной теме. Для каждого вида структуризации существуют свои, наиболее эффективные приемы реализации. Приемы структуризации, относящиеся ко всей теме, носят более обобщенный, схематичный характер. Приемы структуризации отдельного, небольшого фрагмента отличаются конкретностью, четкостью и максимально возможной выразительностью.

Приведем пример системной интерактивной структуризацией учебного материала при изучении второго признака равенства треугольников (7 класс).

Пример. Системная интерактивная структуризация учебного материала

Теорема (2-й признак равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Замысел доказательства. Достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$ (приводится рисунок). (Почему достаточно?)

Доказательство. Выполним следующие рассуждения.

1. Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2. Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\triangle A_1B_2C_1$.

3. На основании 1-го признака (основного свойства) $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$.

4. Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$.

5. $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.

6. Углы $A_1C_1B_2$ и $A_1C_1B_1$ равны между собой и не совпадают (!), что противоречит основному свойству откладывания угла.

7. Следовательно, допущение неверно, и поэтому $AB = A_1B_1$.

8. Тогда по 1-му признаку $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

При этом предполагается использование кнопок перехода внутри одной электронной страницы (в приводимом тексте эти кнопки закрашены серым фоном):

- кнопкой **«Теорема»** вызывается текст теоремы;
- кнопкой **«Замысел доказательства»** – краткая формулировка идеи доказательства;
- если нажать два раза кнопку **«Доказательство»** – вызовом текст доказательства целиком, при этом рисунок к доказательству теоремы выполняется в режиме автоматической анимации;
- если кнопка **«Доказательство»** нажата один раз, то доказательство вызывается по шагам (для этого используются кнопки с номерами 1 – 8). В этом случае каждый шаг синхронно иллюстрируется на рисунке (графическая анимация осуществляется в ручном режиме).

Необходимо иметь в виду, что как бы хорошо не был изложен и иллюстрирован текст однократного прочтения его недостаточно. Поэтому каждая электронная страница снабжена кнопкой **«Повторить»**. Чтобы заинтересовать ученика в повторном прочтении учебного текста используются приемы анимации текста.

Примером анимации текста является предъявление фрагментов текста электронной страницы в трех последовательных стадиях: вначале в статичной (основной, исходной) форме; затем размеры букв увеличиваются, создавая при этом эффект «наезда» на читателя, эта стадия некоторое время фиксируется, давая возможность еще раз прочитать текст; заключительная стадия анимации – возвращение текста к исходной форме. Выделение фрагмента текста из общей массы помогает сфокусировать внимание учащихся именно на выделенном фрагменте. Этот прием используется для выделения текста определений, аксиом и теорем.

Желательным приемом анимации текста является демонстрация последовательного закрашивания (нанесения фона) на различные его части. Например, на первоначальной стадии анимации текст определения представляется в обычном статичном виде, на второй стадии осуществляется последовательное нанесение цветового фона: под определяемый термин подкладывается более насыщенный фон, под родовое понятие – менее насыщенный фон, под видовой признак – еще менее насыщенный фон. Заключительная стадия анимации возвращает текст к исходной форме. Положительно, что этот прием стимулирует двух- трехкратное чтение текста (вначале в статичной, затем в анимированной, снова в статичной форме). Особенно ценно то, что он обращает внимание ученика на структуру определения.

Аналогичный прием анимации очень удобен для выделения в тексте теоремы ее условия и заключения.

Интересный прием анимации текста возможен и при изложении текста доказательства теоремы. На первой стадии анимации доказательство предъясняется в статичной форме с пошаговой нумерованной записью, в такой форме проводится первоначальное ознакомление с доказательством. На этапе закрепления приводится тестовое задание, в котором воспроизводится исходный текст доказательства, затем текст 2-3-х шагов доказательства отделяется (вторая стадия анимации), целостность остальных строк не нарушается, отделенные строки перемешиваются и размещаются столбцом. Задание состоит в том, чтобы восстановить доказательство: требуется каждый шаг доказательства поставить на свое место (тест на соответствие) – третья стадия анимации.

Анимация текста может имитировать ручную запись ученика в обычной тетради. С помощью виртуальной ручки проводятся записи. Это не только разнообразит форму предъяснения текста, но и показывает естественный процесс его последовательного наращивания.

2.5. Приемы построения компьютерной графики. При разработке анимированной графики учитывались ее дидактические функции в каждом конкретном случае. Опыт показывает, что недостаточное внимание к анимационной графике приводит к тому, что электронные страницы выглядят довольно однообразно, а хорошо подобранная и умело представленная графика делает их, как минимум, более привлекательными.

Основной прием: сочетание статичных изображений с анимационными изображениями. Для исходного изображения чаще всего целесообразно использовать черный цвет. Суть этого приема поясним на примере доказательства признака параллельности двух прямых (рис. 5.4).

Демонстрация 1. Ознакомление учащихся с доказательством признака начинается со статичной демонстрации: прямые AC и BD и секущая AB изображаются черным цветом, данные накрест лежащие углы выделяются белым цветом (этот цвет периодически появляется и медленно затухает).

Демонстрация 2 иллюстрирует первый шаг доказательства (допустим, что прямые AC и BD пересекаются в точке E): в анимационном режиме строится изгиб прямой AC , изгиб окрашивается коричневым цветом, точка E – белым.

Демонстрация 9. Иллюстрируется окончательный вывод: $AC \parallel BD$. Соответствующая запись появляется на фоне изображения солнца.

Заметим, что для реализации планиметрических демонстраций большими возможностями обладает программа «Flash».

Использование трехмерных изображений при изучении вопросов планиметрии.

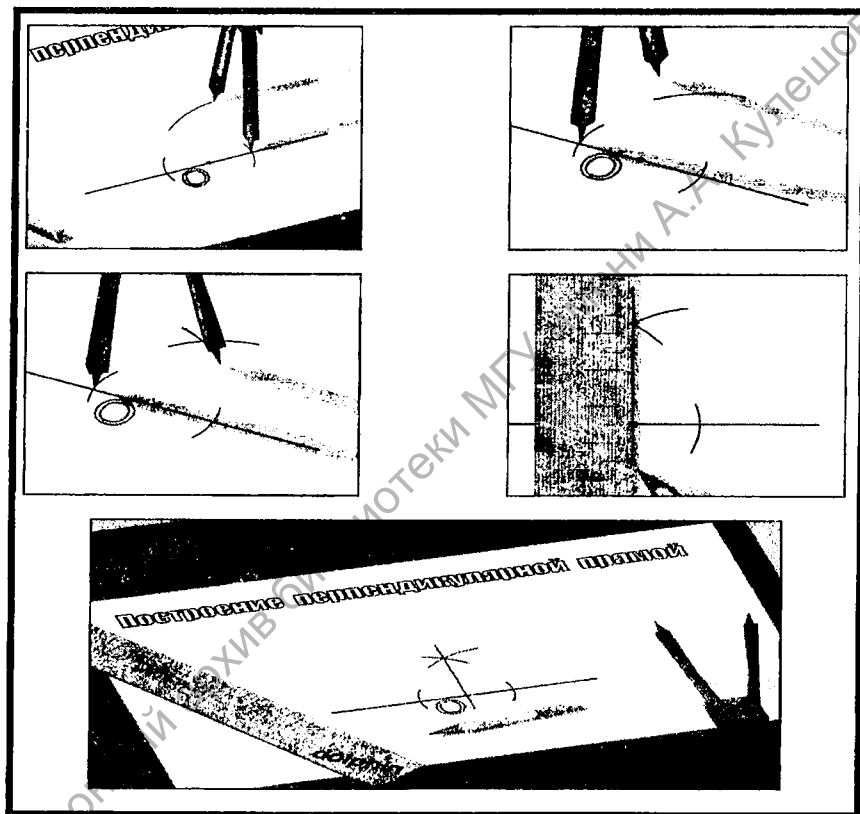


Рис. 5.5

Суть этого приема иллюстрируется на примере задачи о построении прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой (рис. 5.5). Построения выполнены при помощи программного средства «3 ds max».

2.6. *Моделирование интерактивных ситуаций.* Моделирование геометрических ситуаций проводится при введении понятий (отрезка, равных углов, смежных и вертикальных углов, равных треугольников), теорем (признаков равенства треугольников, признаков параллельности прямых и т.д.), доказательств теорем.

Основная цель использования интерактивных моделей состоит в том, чтобы помочь учащимся догадаться до определения понятия, формулировки теоремы, доказательства теоремы, решения задачи.

Например, для подведения учащихся к теореме Пифагора используется следующая интерактивная анимационная модель (рис. 5.6).

Теорема Пифагора

$\triangle ABC$ – прямоугольный



Значения сторон и их квадратов:

$AC = \square \quad AC^2 = \square$

$BC = \square \quad BC^2 = \square$

$AB = \square \quad AB^2 = \square$

Заметьте закономерность!

$AC \cdot BC \square AB^2$

$AC^2 - BC^2 \square AB^2$

$AC^2 + BC^2 \square AB^2$

Введите правильный ответ:

Рис. 5.6

В автоматическом или ручном анимационном режиме изменяются размеры и форма треугольника ABC , программа выполняет из-

мерения сторон треугольника, вычисляет их квадраты (соответствующие числовые значения показываются в окошечках, одновременно с этим сравниваются значения указанных выражений ($=$, $\neq$), учащимся замечается, что для прямоугольного треугольника только в последнем окне появляется знак « $=$ ». После чего они вводят правильный ответ, формулируя тем самым теорему Пифагора.

Заметим, что интерактивная модель, подводящая к формулировке теоремы, размещается на всей площади экрана, при этом формулировка теоремы не видна, соответствующий учебный текст предъявляется после рассмотрения данной модели.

2.7. Роль тестовых заданий. Весь задачный материал в ШЭУ представляется в виде тестовых заданий обучающего, развивающего и контролирующего характера. Систематическое применение тестовых заданий в целях обучения и развития позволяет сформировать самостоятельную технологию обучения (см. об этом выше).

3. Интегративный учебник

3.1. Необходимость интегративного учебника. Его теоретическая основа.

Выше была обоснована необходимость включения в систему дидактических принципов обучения принципа интеграции. Из этого принципа вытекает необходимость интегративного учебника. Отметим также, что принцип интеграции служит одной из главных составляющих теоретической основы интегративного учебника.

Интегративные процессы составляют неотъемлемую черту развития математики (надо думать, что попытка Бурбаки изложить современную математику с общих позиций не является последней). Поэтому естественно, что интегративные процессы в науке вызывают необходимость их отражения в школьном обучении. Теоретической основой интегративного учебника являются и такие достаточно традиционные принципы как принципы связи обучения с жизнью, прикладной направленности обучения, преемственности, реализации межпредметных связей. Это говорит о том, что истоки интегративного учебника заложены еще в традиционном обучении, а сам интегративный учебник тесно связан с традиционным учебником.

В Республике Беларусь, как отмечалось выше, активизируются исследования по проблеме интегративных подходов в обучении математике. Изданы первые интегративные учебники Г.Н. Солтана, Л.А. Латотина и Б.Д. Чеботаревского.

Интегративный учебник может оказаться неэффективным, если он сводится к механическому чередованию геометрического и алгебраического материала. Геометрия и алгебра, как уже говорилось выше, должны максимально содействовать в изложении друг друга. Это содействие проявляется в достижении более простой общей структуризации, рационализации теоретического материала, повышению доступности.

Школьный курс математики, построенный на интегративном принципе, должен обеспечить определенную самостоятельность развития геометрии и алгебры, представляя их как наиболее крупные содержательные линии интегративного курса. Эти содержательные линии должны подчиняться как общей логике развития интегративного курса, так и своей внутренней логике.

На первый план должны выдвигаться не внешние атрибуты интеграции (изложение геометрии и алгебры в одной книжной обложке, формальное чередование геометрического и алгебраического материала и т.д.), а содержательная интеграция, основывающаяся на оптимальном подборе геометрического и алгебраического материала, излагаемого в непосредственной близости, параллельно, или в форме взаимного проникновения.

Критерием оптимальности должно служить достижение большей систематичности и рациональности изложения учебного материала (принцип оптимальности по Парето), а также рациональное распределение учебного времени между интегрируемыми учебными предметами.

Типичным интеграционным признаком традиционного учебника математики является использование различных геометрических средств в алгебре – геометрических интерпретаций основных формул тождественных преобразований, графическое решение уравнений, неравенств, их систем, текстовых задач, рассмотрение графика функции, геометрических истолкований производной и интеграла, использование чертежей, рисунков, графических схем в качестве средств наглядности. В геометрии, например, доказывается, что графиком линейной функции является прямая.

Не менее значителен вклад алгебры в геометрию: в геометрии при решении задач широко используются уравнения; характерным признаком симбиоза геометрии и алгебры являются элементы аналитической геометрии, изучаемые в средней школе; не в меньшей мере таким признаком обладает тема «Векторы», которая сейчас рассматривается на факультативных занятиях; в геометрии площади поверхностей и объемы тел часто излагаются с привлечением производной и определенного интеграла. Все это указывает на тесные традиционные связи различных математических курсов. **На наш взгляд, дальнейшее развитие и совершенствование именно этих связей должно составлять основу современного интегративного школьного учебника математики.**

Сказанное подтверждает вывод о том, что основу интегративного учебника должна составлять, прежде всего, интеграция математического содержания (арифметического, геометрического, алгебраического, начал математического анализа, комбинаторики, элементов теории вероятностей и т.д.). Положительный опыт интегративного предсистематического курса математики свидетельствует в пользу дальнейшего развития интегративного принципа. Однако этот опыт не означает, что подходы интеграции, применяемые в предсистематическом курсе, должны автоматически переноситься на систематические курсы. В систематических курсах должна быть обеспечена определенная самостоятельность алгебры и геометрии, исключена возможность поглощения одного курса другим. Важной теоретической и практической проблемой является четкое планирование степени самостоятельности алгебры и геометрии в интегративном учебнике, степень их взаимного проникновения. Интуитивный подход к решению этой проблемы на практике может привести к нежелательным последствиям.

Интеграция геометрии и алгебры, как отмечалось выше, предполагает усиление *внутрипредметной интеграции*, которую мы рассматриваем как необходимую предпосылку межпредметной интеграции. В противном случае объединение двух курсов со слабыми системными качествами приводит к еще более бессистемному курсу.

Усилению внутрипредметной интеграции способствует *крупноблочное изложение учебного материала в учебнике*. Особенно полезно если крупноблочное изложение в учебнике сочетается с крупноблочным изложением как методом обучения, более того – как технологией обучения.

Интегрирование обеспечивает не только согласованное изложение геометрии и алгебры, единую последовательность изложения, но и взаимное проникновение их друг в друга. Это положение относится и к теории, и к системе задач. Разумеется, это согласование и взаимное проникновение должны строиться по разному: при изложении теоретического материала ведущую роль должны играть одни формы взаимодействия, при построении системы задач – другие.

Степень самостоятельности курсов алгебры и геометрии в большей мере определяется степенью самостоятельности в изложении теоретического материала. Приведенные выше традиционные интегративные связи курсов геометрии и алгебры обладают одним весьма существенным качеством – они не приводят к потере «лица» того или иного учебного курса: геометрия остается геометрией, алгебра – алгеброй.

Степень взаимного проникновения курсов алгебры и геометрии – в построении системы задач. При этом изучение теоретического материала сопровождается решением задач, отличающихся большим разнообразием (добавляются межпредметные задачи). Активный перенос знаний на различные ситуации, более частое переключение с одних знаний на другие, избирательное применение знаний, привычка совместного применения геометрии и алгебры, сближение знаний с применениями – все это в совокупности создает качественно новые условия для создания интегративного учебника.

3.2. Интегративные задачи. В геометрии стержневой содержательной линией является линия треугольников. Она пронизывает весь геометрический материал.

В алгебре такой линией является линия тождественных преобразований. Основанием интеграции здесь служит вид выражения. Для целых алгебраических выражений последовательно рассматриваются тождественные преобразования, уравнения, неравенства и функции.

Аналогичным образом систематизация может быть выдержана для других алгебраических и трансцендентных выражений.

Наложение содержательных линий друг на друга означает, что тождественные преобразования получают широкое применение внутри остальных содержательных линий. Например, при изучении линейной функции изучаются как канонические линейные функции, так и функции, сводимые к ним при помощи тождественных преоб-

разований. Формирование навыков выполнения тождественных преобразований происходит не только в темах, непосредственно посвященных им, но и в остальных темах. Причем углубление навыков планируется именно в процессе применений.

Примером наложения линии тождественных преобразований на линию уравнений и неравенств могут служить такие упражнения:

Решите следующие уравнения и неравенства

$$(x-2)^2 - (x+1)^2 = 4, \quad \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} = 5,$$

$$(x+2)^3 - x^2(x+3) > 7, \quad \frac{x^3 + 27}{x^2 + 3x + 9} < 4 \text{ и др.}$$

Эффективным средством интеграции служат задачи комплексного характера. Они могут быть внутри- и межпредметными. Пример комплексной задачи внутрипредметного характера:

Катер с туристами отправился от пристани вниз по течению реки.

Скорость течения реки 3 км/ч, скорость катера в стоячей воде 21 км/ч.

Запланировано, что перед возвращением туристы пробудут на берегу 0,5 ч.

На какое расстояние: а) отплывут туристы от пристани, если они должны вернуться обратно через 4, 5 ч;

б) могут отплыть туристы от пристани, если они должны вернуться обратно не позднее 4,5 ч?

Примеры комплексных задач межпредметного характера:

1. Найдите площадь треугольника, основание которого равно 3, а высота, проведенная к основанию, равна наибольшему значению выражения $\sin x + \sqrt{2} \cos x$.

2. Три целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа. Могут ли эти числа служить сторонами треугольника?

3. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

4. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

Могут ли ее решения служить соответственно основанием, высотой, проведенной к этому основанию, и боковой стороной треугольника? Найдите периметр этого треугольника.

В задачах межпредметного характера может преобладать алгебраическая составляющая (как в приведенных выше задачах), геометрическая, или обе эти части являются равноценными. С учетом этого определяется целесообразность их помещения в том или ином учебнике.

4. Задания для практического занятия

Задание 1. Охарактеризуйте функции, выполняемые учебником в процессе обучения.

Задание 2. Установите, к какому виду интеграции относятся следующие упражнения:

1. Разложите на множители выражение $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$.

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов, затем приведением подобных членов: $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = (a + b + c - a + b + c) \times (a + b + c + a - b - c) = (2b + 2c)2a = 4a(b + c)$.

2. Докажите, что четырехугольник, стороны которого принадлежат прямым $x = 3$, $x - 2y - 4 = 0$, $x = -3$, $2y - x - 2 = 0$, является параллелограммом.

Решение. Прямые $x = 3$ и $x = -3$ параллельны, так как обе они перпендикулярны к оси абсцисс. Уравнение двух других прямых можно записать таким образом:

$$y = \frac{1}{2}x - 2, \quad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Так как угловые коэффициенты этих прямых равны, то эти прямые наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом. Поэтому эти прямые также параллельны.

Следовательно, данный четырехугольник является параллелограммом.

Задание 3. Используя школьные учебники математики, подберите упражнения, относящиеся к различным видам интеграции учебного материала.

Задание 4. Оцените развивающую функцию следующего упражнения.

Какую закономерность можно заметить:

а)

n	n^2
12	144
102	10404
1002	1004004
10002	?

б)

n	n^2
13	169
103	10609
1003	1006009
10003	?

в)

n	n^2
15	225
105	?
1005	?
10005	?

Тема 6

МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. Состав мировоззренческих и методологических знаний
2. Ознакомление учащихся с мировоззренческими знаниями
3. Ознакомление учащихся с методологическими знаниями (с методами научного познания)
4. Математические методы познания
5. Задания для практических и лабораторных работ

1. Состав мировоззренческих и методологических знаний

Выше мы отмечали, что мировоззренческие и методологические знания относятся к знаниям наиболее высокого уровня. К мировоззренческим знаниям относятся такие вопросы как предмет математики, роль практики в возникновении и развитии математики, представление об этапах развития математики и их особенностях, специфика математических абстракций, сущность математической деятельности, практические применения математики, связь математики с другими учебными дисциплинами и др.

К методологическим знаниям относятся знания о методах, используемых в математике и в школьном курсе. Разнообразие методов в математике велико. Метод математической индукции, методы решения уравнений и неравенств, исследования функций, методы традиционно-синтетической геометрии, аналитические методы, ме-

тод геометрических преобразований, векторный метод, тригонометрический метод – вот далеко неполный перечень математических методов.

Кроме математических методов широко используются в школьном курсе логические методы, такие как анализ, синтез, сравнение, аналогия, индукция, дедукция, конкретизация, обобщение и др.

Особое значение для математики и школьного курса имеют такие общие методы проведения доказательств как синтетическое доказательство, аналитическое доказательство (анализы Паппа и Евклида).

Мировоззренческие и методологические знания – довольно специфические виды знаний, требующие специальной методики их изучения.

2. Ознакомление учащихся с мировоззренческими знаниями

2.1. Знакомство учащихся с предметом математики. Обучение математике преследует различные воспитательные цели (см. тему 2). Одна из главных среди них – *воспитание мировоззренческих взглядов учащихся, относящихся к математике, изучаемой в средней школе.* Особенностью математики является высокая абстрактность ее понятий и фактов. Эта особенность служит поводом для идеалистических извращений предмета математики, источника ее происхождения и развития, поводом для утверждений типа «математика является продуктом «чистого разума», «математика есть игра с аксиомами» и т.п.

В процессе обучения математике учащихся необходимо ознакомить с высказыванием Ф. Энгельса, характеризующим *предмет математики* и связь ее с действительным миром: «*Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, – весьма реальный материал*» (Маркс К., Энгельс Ф., Анти-Дюринг. – Соч., 2-е изд., т. 20, с. 37). Предмет современной математики значительно шире предмета классической математики, однако высказывание Ф. Энгельса сохраняет свою силу и актуальность. Оно и в настоящее время используется для определения предмета математики: «*Математика –*

наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира» (Математическая энциклопедия. — М., 1982, т. 3, с. 559). В связи с потребностями техники и естествознания непрерывно развивается и математика. Обогащение ее содержания происходит за счет изучения новых количественных отношений и пространственных форм действительного мира.

Существуют различные конкретизации и дополнения определения предмета математики. Читатель, возможно, пожелает узнать, в чем они состоят. Рекомендуем обратиться к статье «Математика» из Энциклопедического словаря.

Развитие математики и отражение в ней диалектики лучше всего проследить на основе *обзора периодов развития математики*: 1) зарождение математики (до VI — V вв. до н. э.); 2) элементарная математика (VI — V вв. до н. э. — XVII в.); 3) математика переменных величин (XVII в. — XIX в.); 4) современная математика (с XIX в.). Было бы не лишним ознакомиться с характерными чертами математики на каждом этапе ее развития. Рекомендуем воспользоваться статьей «Математика» из «Математической энциклопедии».

2.2. Роль практики в возникновении и развитии математики. История развития математики дает богатый материал, подтверждающий материалистические источники происхождения математики. Знакомство с такими историческими сведениями может осуществляться на уроке, внеклассных мероприятиях. Тот факт, что математика представляет собой результат отражения и научного обобщения действительного мира, находит подтверждение даже в названиях отдельных математических дисциплин. Например, слово «геометрия» в переводе с греческого означает «землемерие». Достоверные исторические сведения подтверждают, что именно практические нужды людей, связанные с разметкой и восстановлением границ земельных участков, измерением площадей и объемов, послужили первоначальным материалом для формулирования первых геометрических фактов. Современная геометрическая наука решает обширный класс задач, который далеко выходит за рамки «землемерия», но первоначальное название этой науки сохранилось.

Основной методический прием формирования у учащихся правильных мировоззренческих представлений о предмете математики, источниках ее возникновения, движущих силах развития состоит в использовании *исторического материала*. Главным при этом явля-

ется умение сделать (на основе знакомства с историческим материалом) доступный для учащихся *мировоззренческий вывод*.

Программа по математике обычно уделяет большое внимание мировоззренческим вопросам. Предусмотрены следующие беседы с учащимися: «Вычисления в практической деятельности человека» (V класс), «Возникновение и развитие понятия числа» (VI класс), «Роль практики в возникновении геометрии» (VII класс), «Симметрия в природе, технике, искусстве» (VIII класс), «Беседа о логическом строении геометрии и аксиоматическом методе в математике» (IX класс), «Математика и естествознание» (X класс), «Математика и реальный мир. Понятие о математическом моделировании» (XI класс). Мы рекомендуем читателю составить примерный план проведения таких бесед, продумать, какое участие могут принять ученики в подготовке и проведении этих бесед, в какой форме будет сделан мировоззренческий вывод.

2.3. Математические абстракции. Остановимся на роли *операции абстрагирования* в образовании математических понятий.

Понимание роли операции абстрагирования в образовании математических понятий и фактов имеет особую значимость для формирования мировоззрения учащихся. *Абстрагирование* определяется как особый прием мышления, который заключается в отвлечении от ряда свойств и отношении изучаемого явления с одновременным выделением интересующих исследователя свойств и отношений.

Учащимся полезно предложить специальные задания на выполнение операции абстрагирования. Например: «Укажите реальные образы, абстрагирование от некоторых свойств которых (каких именно?) приводит к понятию плоскости». Рекомендуем читателю разработать беседу с учащимися VII класса, в ходе которой будет осуществлено введение понятия плоскости. Придайте этой беседе *мировоззренческую направленность*.

Роль операции абстрагирования в математике удобно проследить на примере формирования понятия функции. Рекомендуем читателю составить список литературы, в которой говорится об истории развития понятия функции, привести краткую характеристику каждого этапа развития понятия функции, проследить роль операции абстрагирования в образовании и развитии этого понятия, остановится на наиболее абстрактной формулировке определения понятия функции, использующей понятия декартового произведения двух

множеств и функционального отношения (которое в этой трактовке и называется функцией).

2.4. Математическая деятельность и ее составные части.

Нельзя иметь правильные *мировоззренческие представления* о математике, не уяснив особенности математической деятельности, результатом которой является математическая наука. Обратимся к этому вопросу.

Особенности математики наиболее полно раскрываются в единстве двух ее сторон: *математика как определенная научная деятельность* и *математика как теория, являющаяся результатом этой деятельности*. В работе [27, с. 106] выделяются следующие составные части учебной математической деятельности: математизация эмпирического материала; логическая организация математического материала; применение теории.

В более детальной расшифровке *элементы математической деятельности* можно представить таким образом:

- 1) целенаправленное накопление эмпирического материала;
- 2) выбор математического языка, описание эмпирического материала на языке математики;
- 3) первичная систематизация математического материала, группировка его по тем или иным общелогическим признакам (сходству, степени общности и т. д.);
- 4) частичная аксиоматизация математического материала, построение фрагмента математической теории;
- 5) применение математического материала;
- 6) применение частично аксиоматизированного математического материала (фрагмента теории);
- 7) применение теоретического материала нескольких математических разделов.

Эмпирический материал – это окружающие нас реальные объекты, к изучению которых стремятся применить методы математики, или объекты другой научной области (физики, химии, астрономии, биологии и т. д.), или специально приготовленный для целей обучения дидактический материал, или математический материал в случае, когда он подвергается изучению с помощью других математических средств (последняя ситуация особенно характерна для математики).

В процессе математизации эмпирического материала (см. п. 2) наглядно виден источник образования математических понятий и

фактов. Поэтому можно утверждать, что математизация эмпирического материала помогает вести целенаправленную работу по формированию правильных мировоззренческих взглядов, связанных с происхождением и развитием математики. *Методическая схема математизации эмпирического материала (построения математической модели данного эмпирического материала)* может по-разному детализироваться, но обязательными ее компонентами являются: подготовка эмпирического материала, отвечающего определенной цели; анализ этого эмпирического материала с точки зрения указанной цели, выделение на эмпирическом уровне некоторых закономерностей, описание этих закономерностей на математическом языке.

2.5. Практические приложения математики. Применение математической теории к решению *прикладных задач* – еще одно направление формирования мировоззрения учащихся о месте и роли математики в общественной практике людей. Через решение прикладных задач, в котором в обязательном порядке используется математическое моделирование, реализуется *политехническая направленность обучения математике*. Целенаправленное использование прикладных задач способствует ориентации учащихся на различные профессии, осуществлению *связи обучения математике с жизнью*. В практике работы школы используются различные педагогические приемы: составление прикладных задач на материале, собранном в процессе экскурсии на производственное предприятие; использование календаря профессиональных праздников; тематическая подборка задач в соответствии с этим календарем; краткие вступительные беседы о той или иной профессии, предваряющие решение прикладных задач, и т.д. Важно при этом стимулировать общий познавательный интерес, не склоняя учащихся к выбору какой-либо одной конкретной профессии. Целесообразнее считать, что конкретный выбор профессии – дело самого ученика и его родителей.

Методическая схема (модель) решения прикладных задач состоит в следующем: 1) выяснить смысл понятий, используемых в тексте прикладной задачи, ее условие и заключение; 2) перевести прикладную задачу на математический язык; 3) выбрать математический метод (теоретические сведения) для решения полученной математической задачи; 4) решить математическую задачу, получить результат; 5) перевести полученный математический результат на язык исходной прикладной задачи; 6) оценить прикладную, профориента-

ционную и мировоззренческую значимость данной задачи («взгляд назад»).

Рекомендуем читателю провести сравнение методических схем решения математических и прикладных задач на конкретных примерах. Прикладные задачи можно подобрать, например, из книги П.Г. Апанасова, Н.П. Апанасова «Сборник математических задач с практическим содержанием» (М.: Просвещение, 1987. – 110 с.)

2.6. Связь математики с другими учебными дисциплинами. Применение математического аппарата к решению задач других учебных дисциплин, установление *межпредметных связей* содержат в себе еще один важный мировоззренческий аспект: существование межпредметных связей является объективной закономерностью, отражающей взаимосвязь явлений действительного мира.

Наиболее тесные связи существуют между курсами математики и физики. Огромное значение для физики имеют такие математические темы, как «Уравнения», «Производная», «Применения производной» и др. С помощью методов математического анализа в значительной степени упрощаются решения многих физических задач.

В целях более явного подчеркивания роли математического аппарата при решении физических задач целесообразно придерживаться следующей *методической схемы*.

- 1) перевести физическую задачу на язык математики;
- 2) решить математическую задачу;
- 3) перевести ответ математической задачи на язык физики;
- 4) конкретизировать физический смысл ответа задачи.

(Сравните эту схему со схемой решения прикладных задач, приведенной выше.)

3. Ознакомление учащихся с методологическими знаниями (с методами научного познания)

3.1. Логические методы познания. К логическим методам познания относятся: *анализ, синтез, индукция, дедукция, сравнение, аналогия, абстрагирование, обобщение, конкретизация, моделирование, классификация* и др. (Более подробно об этом см. в книге [26].) Логические методы познания используются при изучении любого учебного материала, особенно они необходимы при отыскании решения задач.

Рассмотрим, например, следующую задачу: «Определить площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8 см».

Поиск ее решения целесообразно начать, пользуясь методами анализа и синтеза. В процессе анализа задачи выделяются все ее утверждения: 1) необходимо вычислить площадь четырехугольника; 2) четырехугольник имеет взаимно перпендикулярные диагонали; 3) диагонали четырехугольника равны 6 и 8 см. Выделение этих утверждений из «целого» (задачи) – результат проведения анализа. Анализ направляется вопросами: «Что дано в задаче?», «Что еще дано в задаче?», «О чем еще говорится в задаче?», «Что в задаче требуется найти?». Важно иметь в виду, что при решении задачи анализ проводится не один раз: возможен *повторный анализ*, *анализ с новой целью*, с иной точки зрения и т.п. Так, для выполнения чертежа необходим дополнительный анализ, устанавливающий порядок использования данных задачи для построения чертежа.

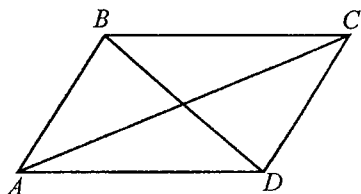


Рис. 6.1

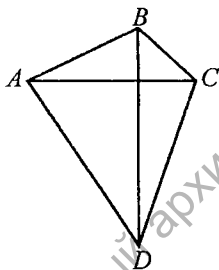


Рис. 6.2

Выполнение чертежа предполагает уже другой метод познания – метод синтеза. Ошибки в выполнении чертежа являются поводом для проведения анализа с более конкретной целью, т. е. более углубленного анализа. Например, при решении рассматриваемой задачи учащиеся иногда четырехугольник изображают в виде параллелограмма (рис. 6.1). Избегать ошибки в выполнении чертежа можно, если начать построения не с четырехугольника, а с его диагоналей, изображая их произвольными взаимно перпендикулярными отрезками (рис. 6.2). В итоге дополнительного анализа на первый план выдвигается условие перпендикулярности диагоналей, которое является основным в отыскании общей идеи решения задачи, необходимых вычислений.

Возможны различные решения задачи (в зависимости от того, в каком *направлении* будет вестись анализ, на какие треугольники будет разбит данный четырехугольник). Например, нетрудно заметить, что данный четырехугольник состоит из четырех (или двух) треугольников и задача тем самым сводится к нахождению суммы площадей этих треугольников.

Как отмечалось, при анализе происходит «расчленение целостного объекта...». В качестве «целостного объекта» в проведенном

выше анализе выступает текст задачи, условия и требование ее. Синтез же, наоборот, основан на «соединении ранее выделенных частей в единое целое». Результатом синтеза в процессе описанного выше поиска решения задачи (иначе говоря, что представляет собой то «единое целое», которое должно получиться в процессе синтеза) является чертеж к задаче – на чертеже должны быть отражены все условия и требования задачи.

Взаимное соотнесение всех частей текста задачи и чертежа также представляет собой процесс анализа. При отыскании решения задачи, на различных этапах этого поиска, один из данных методов преобладал над другим. Какой именно? Понятно, что при разборе текста задачи преобладает анализ, при выполнении чертежа – синтез. Переход к поиску решения задачи связан с анализом чертежа. На каком-то этапе решения задачи эти методы познания могут поменяться ролями (один будет играть роль ведущего, другой – вспомогательного), применяться совместно.

Отметим еще некоторые направления применения анализа при обучении математике. *Предметом анализа* может служить формулировка определения, аксиомы и теоремы. Цель анализа может состоять в выяснении логического строения этой формулировки. Такой анализ особенно помогает при изучении сложных формулировок. В целях наглядности выделенные составные части формулировки полезно пронумеровать. Например, четырехугольником называется: 1) фигура, 2) которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, 3) при этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, 4) а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Анализ определения помогает более осмысленному его восприятию, запоминанию и воспроизведению. Такой анализ должен предшествовать заучиванию формулировки.

Предметом анализа может служить доказательство теоремы. Цель анализа доказательства состоит в изучении его логического строения. Применение приемов структуризации (о которых уже говорилось выше) – выделение отдельных «шагов» доказательства, нумерация их помогают учащимся лучше осознать его.

В процессе поиска решения задачи предметом анализа служат отношения, которые существуют между искомой и данными величинами. Цель анализа – найти решение задачи. Анализ направляется

специальными вопросами учителя (или решающего самому себе), помогающими обнаружить путь от известных величин к искомой. Одной из возможных систематизации такого рода вопросов служит *таблица Поля* [40]. В кратком виде эта таблица воспроизведена ниже.

При всей полезности идей, заложенных в книге [40], следует констатировать, что в практике обучения они не получили значительного распространения. Объясняется это, на наш взгляд, тем, что указания и вопросы, этой таблицы, адресованы в большей мере не учащимся, а учителю. Для учащихся смысл указаний типа «Сформулировать отношение между неизвестным и данными. Преобразовать неизвестные элементы. Решить часть задачи. Сформулировать задачу иначе» и др. чаще всего остается непонятным в силу их общего и излишне абстрактного характера. Необходимы эвристические таблицы, ориентированные на специфику конкретной учебной темы, определенные виды задач и, главное, — на возрастные возможности учащихся.

Таблица 6.1

Таблица Поля

1. Понять предложенную задачу. 2. Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотреть промежуточные задачи («анализ»). 3. Реализовать найденную идею решения (синтез). 4. Решение проверить и оценить критически.			
1. Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти? Определено ли неизвестное данными задачи? Нельзя ли сформулировать задачу иначе? Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решаемой проще? Решаемой сразу? Все ли данные задачи были использованы?	2. Сформулировать отношение (или отношения) между неизвестными и данными. Преобразовать неизвестные элементы. Попытаться ввести новые неизвестные, более близкие к искомым неизвестным. Преобразовать данные элементы, более близкие к искомым неизвестным. Решить только часть задачи. Удовлетворить только части условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? Обобщить. Рассмотреть частные случаи. Применить аналогию. Заменить термины их определениями (Паскаль).	3. Испытывать правильность каждого шага, принимая лишь то, что «усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью» (Декарт).	4. Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Какие результаты можно получить на том же пути?

Как уже было отмечено, в процессе поиска решения задачи предметом анализа служат отношения, связывающие искомые и данные величины. При этом отношения могут группироваться не в том порядке, в каком они приводятся в задаче. Часто некоторые из них объединяются в пары. Новая группировка данных задачи — результат применения синтеза. Она осуществляется с целью обнаружения нового отношения между величинами, которое может помочь в решении задачи. Поиск решения задачи направляется в данном случае такими вопросами: «Зная то-то и то-то, что можно найти?» Нахождение новой величины или отношения предполагает применение метода анализа. Получается, что в подобных случаях в начале поиска выполняется синтез различных частей задачи, а затем проводится анализ того, что может дать такой синтез для решения задачи. Подобное применение анализа является распространенным и имеет специальное название — *анализ через синтез*. Наряду с анализом и синтезом в обучении математике часто используются аналогия, обобщение и конкретизация.

Предположим, что после решения приведенной выше геометрической задачи на вычисление учитель предлагает аналогичную задачу (для домашнего выполнения) с другими числовыми данными: диагонали равны 1 и 10 см. Ясно, что при решении этой задачи на первый план выступает аналогия.

Решение двух предыдущих вычислительных задач не всегда автоматически приводит учащихся к *обобщению* о том, что площадь такого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей. Применение метода обобщения предполагает сравнение результатов решения двух задач с целью — нельзя ли заметить общую закономерность — выявление и формулирование искомой закономерности (индуктивное обобщение).

Рассмотренные выше решения задачи на вычисление являлись результатом применения определенных методов познания.

Если, например, воспользоваться *методом конкретизации*, то можно прийти к новому решению. Было отмечено, что $S = \frac{1}{2}ab$. Поставим перед учащимися цель найти новое доказательство данной формулы. Для этого попытаемся как-то конкретизировать эту формулу. С чем можно связать произведение ab ? Естественно, возникает мысль — с площадью прямоугольника, длины сторон которого равны a см и b см. Обнаружить такой прямоу-

гольник уже нетрудно. Из рис. 6.3 видно, что его площадь равна ab , а площадь данного четырехугольника в два раза меньше; откуда искомая площадь $S = \frac{1}{2}ab$. Как видно, в описанном выше примере конкретизации подвергалась формула, которую надо было доказать. Заметим, что описанные выше рассуждения: проводились в предположительной форме, что типично для процесса поиска. Возможны и другие конкретизации данной формулы, приводящие к новым способам решения (рекомендуем поискать их).

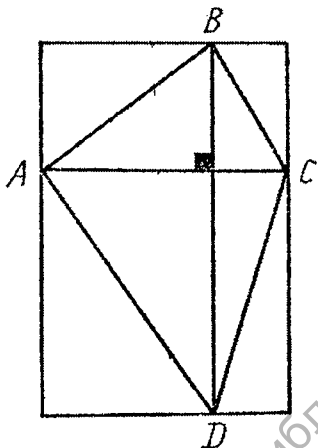


Рис. 6.3

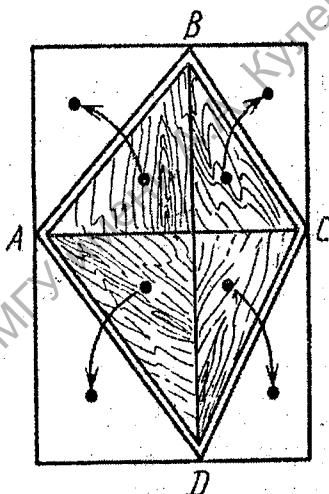


Рис. 6.4

Чтобы продемонстрировать возможности применения логических методов познания в процессе решения задач, обратимся еще раз к предыдущей задаче.

Предположим, что поиск решения данной задачи с самого начала ведется иначе и связывается с *моделью*, приведенной на рис. 6.4. На доске рисуют данный четырехугольник и его диагонали. Эти диагонали разбивают четырехугольник на четыре прямоугольных треугольника. Вырежем из картона модели этих треугольников и приложим их так, как показано на рис. 6.4. Полученная модель подсказывает идею последнего из рассмотренных выше способов решения задачи. Какой метод познания был при этом использован? В данном случае использовался метод моделирования, который совершенно иначе привел к обнаружению уже рассмотренного ранее способа решения задачи.

Принцип сознательности обучения ориентирует учащихся на осознание путей получения новых знаний (рефлексию). Это осознание формируется на основе практики целенаправленного применения методов научного познания. Полезным является также краткий методологический комментарий процесса поиска решения математических задач.

Обратимся к методу индукции. Этот метод находит систематическое применение в V — VI классах. Большинство обоснований в этих классах проводится индуктивным методом. Метод индукции способствует развитию числовой и геометрической интуиции учащихся, пространственного представления и воображения. В старших классах роль индукции снижается. Она применяется лишь в целях обнаружения математических закономерностей, обоснование же их проводится дедуктивным методом.

Различают два вида *индукции*: *неполную и полную*. Подробнее с этими видами индукции можно ознакомиться по работе [48].

Рекомендуется руководствоваться следующей *методической схемой (моделью) применения метода индукции*:

- 1) поставить цель индуктивного исследования;
- 2) выбрать конкретный материал, на основе которого будет сделано индуктивное обобщение;
- 3) отыскать общую закономерность;
- 4) сформулировать общую закономерность.

Причины неудачного применения метода неполной индукции в учебном процессе различны. Они могут проявляться в виде нечеткой постановки цели индуктивного исследования, или в неудачной попытке сделать индуктивное обобщение на основе рассмотрения только одного примера, нежелательные последствия могут быть вызваны рассмотрением излишне большого количества примеров. Чрезмерное употребление метода неполной индукции может иметь отрицательные последствия. Частое его применение, например, может задержать развитие дедуктивного мышления учащихся.

Охарактеризуйте действия учителя и учащихся в описанном применении метода индукции.

Дедукция (в сравнении с индукцией) обладает меньшей эвристической силой. Однако отождествлять дедуктивные доказательства с догматической формой изложения все же не следует. Дедуктивное доказательство объясняет изучаемый факт; в педагогических целях

оно может быть дополнено элементами разъяснений, мотивировок, указаний на общее направление рассуждения, краткой аргументацией выбора математического метода и т.д.

3.2. Эмпирические методы познания. К эмпирическим методам познания относятся *наблюдение, описание, измерение и эксперимент*. Наиболее часто эти методы применяются в естественнонаучных дисциплинах (химии, биологии, астрономии, физике, географии и т.д.). Для математики эти методы не являются характерными. История развития математики свидетельствует о том, что эмпирические методы сыграли неоценимую роль в зарождении математических знаний, становлении математики как самостоятельной теоретической дисциплины. Школьное обучение математике в определенной мере повторяет ее исторический путь развития. Использование средств наглядности и технических средств обучения, как правило, предполагает применение различных эмпирических методов. Часто имеет место одновременное использование методов наблюдения, описания, измерения и эксперимента. Это помогает избежать пассивной созерцательности, активизировать действия учащихся, вовлечь их в целенаправленную работу по использованию демонстрационных наглядных пособий, приборов, моделей и т.п.

Примеры применения эмпирических методов:

1. При введении понятия пирамиды учитель пользуется моделью, на которой показывает различные элементы пирамиды, сообщает их названия. Как лучше осуществить показ? Как сочетать его со словом? Что делают при этом учащиеся? Каким эмпирическим методом познания пользуется учитель?

В данном случае используются наблюдение и описание. Показ можно осуществить с помощью прикосновений указкой или рукой к тем или иным элементам модели пирамиды. Прикасаясь к вершине, учитель сообщает термин «Вершина, эта точка называется вершиной. Давайте сосчитаем, сколько вершин у данной пирамиды?» Обводя ребро указкой, учитель сообщает новый термин – «ребро пирамиды»; показываются другие ребра. Грань лучше показать прикосновением ладони. Дети при этом проводят наблюдение, знакомятся с новыми терминами, участвуют в математизации данного эмпирического материала (модели пирамиды)

2. Допустим, что изучение теоремы о сумме углов треугольника начинается с выполнения несложного эксперимента. Берут картонную модель треугольника (в зависимости от определения треугольник моделируется либо краями куска картона, либо самим куском картона), отрывают два угла и

складывают их с третьим углом. К какому выводу можно прийти в итоге этого эксперимента? Охарактеризуйте его цель.

Эксперимент достаточно простой, но и его надо тщательно готовить. Необходимо чтобы модель была достаточно крупной и удобной для обзора всеми учащимися класса. Для удобства демонстрации картонную модель можно прикрепить кнопками к переносной (деревянной) доске. На глазах учащихся отрываются два угла и кнопками прикрепляются к третьему углу, спрашивается «Дети, что можно сказать о сумме углов треугольника, чему она равна?» В итоге формулируется теорема о сумме углов треугольника. Цель эксперимента состоит, таким образом, в подведении учащихся к данной теореме, в развитии наблюдательности, развитии способности самостоятельно приходить к определенным выводам. Заметим, что такой эксперимент можно провести и в виртуальной форме с помощью динамичной компьютерной графики.

4. Математические методы познания

4.1. Математическое моделирование. Одним из наиболее универсальных математических методов познания является *метод математических моделей (математическое моделирование)*. Математическая модель — это описание какого-либо класса явлений реального мира на языке математики. Метод моделирования дает возможность применять математический аппарат к решению практических задач. Понятия числа, геометрической фигуры, уравнения, неравенства, функции, производной являются примерами математических моделей.

К методу математического моделирования в учебном процессе приходится прибегать при решении любой задачи с практическим содержанием. Чтобы решить такую задачу математическими средствами, ее необходимо вначале перевести на язык математики (построить математическую модель). В процессе математического моделирования широко используются абстракции отождествления (обобщения), осуществимости, идеализация.

Вы, вероятно, встречались со многими практическими задачами, математической моделью которых являлось бы уравнение (система уравнений, неравенство, система неравенств).

4.2. Аксиоматический метод. Аксиоматический метод также относится к числу наиболее характерных методов математики. Оз-

накомление учащихся с аксиоматическим методом возможно провести на любом небольшом по объему учебном материале. Рекомендуется при этом следующая *методическая схема*:

1) составить набор математических утверждений (это может быть выполнено учащимися на основе математизации эмпирического материала или предложено учителем в готовом виде); полученные таким образом математические предложения пока логически не связаны друг с другом, поэтому необходимо логически организовать имеющийся математический материал;

2) найти исходные утверждения, на основе которых могут быть доказаны остальные;

3) провести доказательства утверждений, не отнесенных к числу исходных;

4) сформулировать аксиомы, определения, теоремы.

Пример 1 (ознакомление учащихся с аксиоматическим методом). На основании рис. 6.5 можно сформулировать следующие утверждения:

1) $a \parallel b$;

2) c пересекает a ;

3) c пересекает b .

Выделите из этого перечня утверждения, на основе которых можно доказать остальные.

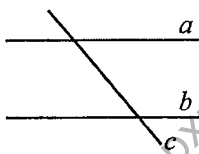


Рис. 6.5



Рис. 6.6

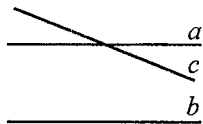


Рис. 6.7

Выполнение задания. Из рис. 6.6 видно, что возможен пример, когда утверждение 1 выполняется, а утверждение 2 не выполняется. Это означает, что из утверждения 1 не следует утверждение 2. Таким образом, на основании утверждения 1 нельзя доказать остальные утверждения.

Присоединим к утверждению 1 утверждение 2. Из рис. 6.5 видно, что если утверждения 1 и 2 выполняются, то утверждение 3 также выполняется. Естественнo сделать предположение: на основе утверждений 1 и 2 можно доказать утверждение 3. Действительно, если допустить, что прямые c и b не пересекаются (рис. 6.7), то придем к противоречию с аксиомой параллельных. Следовательно, прямые c и b пересекаются. Итак, $(1 \text{ и } 2) \Rightarrow 3$.

На основе проделанной работы можно сформулировать следующую теорему: «Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересечет и другую прямую». Полезно сделать и такой, пожалуй, более значимый вывод: для предложений 1-3 предложения 1-2 играли роль исходных предложений, на основании которых доказывалось предложение 3. Предложения 1-2 играли такую же роль, что и аксиомы геометрии. Отличие состоит в том, что предложения 1-2 являются исходными для очень маленького набора предложений (всего их три), а аксиомы являются исходными предложениями для всей геометрии!

Пример 2. В завершение курса геометрии в 7 классе возможно проведение обобщающего занятия по методологическим вопросам. Учащимся рекомендуется сообщить, что:

- аксиомы являются математической основой для построения определений понятий и доказательств теорем. Строгое построение математической теории (в средней школе оно не выполнимо полностью) осуществляется следующим образом:

- 1) *перечисляются основные (исходные) геометрические понятия, которые вводятся при помощи аксиом;*

- 2) *при их помощи даются определения остальным геометрическим понятиям;*

- 3) *на основе аксиом и определений доказываются все остальные геометрические факты.*

- систем аксиом выступает методом построения теории особенно эффективно, если она, ориентирована на более раннее введение нескольких математических методов. Такая система аксиом (за счет выборочного и совместного применения математических методов) помогла во многих случаях существенно упростить доказательства отдельных теорем, изложение всего курса планиметрии.

- основным методом построения школьной геометрии является *традиционно-синтетический метод* (использование признаков равенства треугольника, свойств и признаков параллельных и перпендикулярных прямых, построений с помощью циркуля и линейки). Используются также некоторые *аналитические методы* (метод уравнений, теорема о сумме углов треугольника, теорема Пифагора, метод площадей).

- в целях упрощения изложения обычно допускается некоторая избыточность аксиом (заметим, что это делается иногда и в вузовских учебниках). Избыточна, например, аксиома, утверждающая существование бесконечного множества точек, принадлежащих прямой. В основаниях геометрии за аксиому обычно берется утверждение о существовании на прямой, по меньшей мере, двух точек.

Утверждение о существовании бесконечного множества точек, не принадлежащих прямой, также избыточно. В основаниях геометрии в соот-

ветствующей аксиоме утверждается существование по меньшей мере трех точек, не принадлежащих одной прямой.

Доказательство бесконечности множества точек, принадлежащих и не принадлежащих прямой, довольно сложно и оно не рассматривается в школьном курсе.

Избыточность аксиом помогает избежать излишней детализации изложения, отвлекающей от главного.

Чаще аксиомы стремятся формулировать все же в минимальной форме. В качестве аксиомы обычно принимается утверждение: развернутый угол равен 180° . Обратное утверждение: если угол равен 180° , то он является развернутым — доказывается. Приведем соответствующее доказательство.

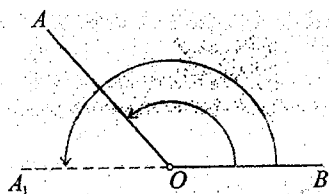


Рис. 6.8

Допустим, что $\angle AOB = 180^\circ$ (рис. 6.8) и не является развернутым.

Тогда возьмем развернутый $\angle A_1OB$. По аксиоме $\angle A_1OB = 180^\circ$. Оказалось, что в одну и ту же полуплоскость на луче OB построены два разных угла — $\angle AOB$ и $\angle A_1OB$, имеющих одну и ту же градусную меру. Это противоречит аксиоме откладывания угла. В итоге доказано, что если угол равен 180° , то он — развернутый.

В учебном пособии [102] в качестве аксиомы принят первый признак равенства треугольников. В основаниях геометрии обычно в более слабой форме формулируется аналогичная аксиома. Вместо первого признака равенства двух треугольников приводится такая аксиома: если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то имеет место также и равенство $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

В основаниях геометрии обычно в качестве одной из аксиом измерения площадей многоугольников принимается предложение о том, что площадь квадрата со стороной, равной единице, равна единице. В учебном пособии [102] принято более сильное утверждение: площадь любого квадрата равна квадрату его стороны.

• особую роль играет аксиома параллельных прямых. Чтобы подчеркнуть особую роль этой аксиомы в геометрии принято часть теории, не зависящей от этой аксиомы, называть *абсолютной геометрией*.

К абсолютной геометрии относятся:

- доказанное выше предложение о том, что угол, равный 180° , является развернутым;
- теорема о единственности прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой;

– признаки параллельности двух прямых (даваемые при помощи накрест лежащих и односторонних углов) и др.

Примерами же теорем, которые не относятся к абсолютной геометрии (их доказательства опираются на аксиому параллельных), являются следующие:

– теорема о равенстве накрест лежащих углов при параллельных прямых,

– о сумме углов треугольника,

– теорема Пифагора и др.

(Рекомендуем еще раз обратиться к доказательствам этих теорем и проанализировать, каким образом они связаны с аксиомой параллельных.)

• метод построения теории, опирающийся на систему аксиом, называется **аксиоматическим методом**.

Таблица 6.2

Примеры схем математических методов

Как решить задачу на вычисление?	Как решить задачу координатным методом?	Как решить задачу векторным методом?
1. Постройте чертеж. 2. Обозначьте искомую величину через x . 3. Выразите через x неизвестные величины. 4. Составьте и решите уравнение. 5. Запишите и проверьте ответ	1. Постройте чертеж. 2. Удобно расположите систему координат. 3. Запишите координаты точек. 4. Запишите условие и требование задачи на координатном языке. 5. Перейдите от условия задачи к ее требованию	1. Постройте чертеж. 2. Запишите условие и требование задачи на векторном языке. 3. Перейдите от условия задачи к ее требованию.

5. Задания для практических и лабораторных работ

Задание 1. Ознакомьтесь с историей происхождения геометрии (см. [10]). Составьте план рассказа для учащихся VII класса на тему «Как возникла геометрия». Какой основной мировоззренческий вывод необходимо сделать в этом рассказе?

Задание 2. Ознакомьтесь с историей возникновения и развития понятия числа (см. [10]). Приведите исторические данные о материалистических источниках возникновения этого понятия. Составьте план рассказа для учащихся VI класса на тему «Как возникла арифметика».

Задание 3. Опишите по предложенной выше схеме методику решения следующей задачи: «Маховик, задерживаемый тормозом, за t (с) поворачивается на угол $\varphi(t) = 4t - 0,3t^2$ (рад). Определите: 1) угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени $t = 2$ с; 2) в какой момент времени вращение маховика прекратится».

Предложите краткий комментарий (мировоззренческого содержания) в связи с решением данной задачи.

Задание 4. Приведите примеры применения полной индукции на арифметическом, алгебраическом и геометрическом материале. Объясните, почему вывод, сделанный на основе полной индукции, является достоверным, а на основе неполной индукции, — только правдоподобным или даже ошибочным.

Задание 5. Допустим, требуется подвести учащихся к формулированию теоремы Виета. Воспользуемся методом индукции. Предложим учащимся заполнить таблицу 6.3.

Таблица 6.3

Таблица для подведения к теореме Виета

№ п/п	Квадратные уравнения	Корень x_1	Корень x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
1-2	Приведенные				
3-4	Неприведенные				

В процессе ее заполнения учащиеся обнаруживают искомую закономерность. Каким видом индукции воспользовался учитель (полной или неполной индукцией)? Опишите беседу, подводящую учащихся к теореме Виета. Приготовьтесь к проведению деловой игры по проведению соответствующего фрагмента урока.

Тема 7

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. Многомерность метода обучения
2. Из истории развития методов обучения
3. Классификации методов обучения
4. Характеристика некоторых методов обучения
5. О сочетании методов обучения
6. Задания для практических и лабораторных занятий

1. Многомерность метода обучения

Решение одной из главных дидактических проблем «Как учить?» естественно связывается с методами обучения. *Метод обучения* (от греч. *metodos* – буквально: путь к чему-либо) – это упорядоченная деятельность педагога и учащихся, направленная на достижение заданной цели обучения. Метод обучения – это способ достижения целей образования. Метод обучения – сложное, многомерное, многоаспектное образование. Справедливо считается, что в методе обучения находят отражение объективные закономерности, цели, содержание, принципы, формы обучения. Один и тот же метод обучения может быть охарактеризован с позиции различных признаков – что является источником знаний, какой уровень познавательной деятельности задается методом, какие логические методы познания привлекаются в данном методе, используются ли в нем и какие эмпирические методы познания, эвристические схемы и признаки математических методов и т.д.

В общую структуру метода обучения входят деятельность преподавателя (*методы преподавания*) и деятельность ученика (*методы учения*). На более детальном уровне в структуре метода обучения выделяются приемы. *Прием обучения* – это элемент метода обучения, его составная часть, отдельное действие в применении метода.

В структуре методов обучения выделяются также *инвариантная* и *вариативная части*. Инвариантная часть метода обучения обусловлена теми постоянными (в содержании и структуре метода), которые обязательно присутствуют в методе, независимо от его использования различными педагогами. Вариативная часть метода обучения обусловлена профессиональными устремлениями учителя, спецификой учебной темы, особенностями учащихся данного класса.

2. Из истории развития методов обучения

Цели обучения всегда определялись в соответствии с существовавшими на том или ином этапе развития школы социальными целями и мировоззрением. При феодализме задачей школы ставилось усвоение преимущественно схоластических (формальных) знаний. С развитием буржуазного строя в школе стали изучаться знания, име-

ющие практическое значение, стало актуальным требование обучать применению знаний на практике. И только современная школа, не отрицая первые две задачи, дополняет их принципиально новой – целенаправленно и последовательно развивать самостоятельность учащихся, их умение приобретать и творчески применять новые знания. В соответствии с новыми целями развивались и новые методы обучения.

В «Педагогической энциклопедии» (1929) метод рассматривается как путь, который заранее намечается для достижения поставленной цели. В 20-е гг. в педагогике велась борьба против методов схоластического обучения и зубрежки, процветавших в старой школе, и предпринимались поиски таких методов, которые обеспечивали бы сознательное, активное и творческое овладение знаниями учащимися. Именно в это время педагог Б.В. Все-вятский развивал положение о том, что в обучении может быть только два метода: метод исследовательский и метод готовых знаний. Метод готовых знаний, естественно, подвергался критике. В качестве же важнейшего метода обучения в школе признавался исследовательский метод, суть которого сводилась к тому, что учащиеся все должны были познавать на основе наблюдения и анализа изучаемых явлений и самостоятельно подходить к необходимым выводам.

В настоящее время дидактические исследования показывают, что номенклатура (наименование) и классификация методов обучения характеризуются большим разнообразием в зависимости от того, какие признаки используются при их разработке.

Е.И. Перовский, Е.Я. Голант, Д.О. Лордкипанидзе и др. считают, что при классификации методов обучения решающую роль играют те источники, из которых черпают знания учащиеся. На этой основе они выделяли три группы методов: словесные, наглядные и практические. И действительно, слово, наглядные пособия и практические работы широко используются в учебном процессе. Хотя можно заметить и определенную условность этого деления методов. К примеру, может ли метод обучения оказаться «бессловесным» (имея в виду не только устное, но и печатное слово)?

И.Я. Лернер и М.Н. Скаткин основным признаком метода обучения считали уровень учебно-познавательной деятельности учащихся по овладению изучаемым материалом. С этой точки зрения они выделяли следующие методы:

- объяснительно-иллюстративный, или информационно-рецептивный: рассказ, лекция, объяснение, работа с учебником, демонстрация картин, кино- и диафильмов;
- репродуктивный: воспроизведение действий по применению знаний на практике, деятельность по алгоритму, программирование;

- проблемное изложение изучаемого материала;
- частично-поисковый, или эвристический, метод;
- исследовательский метод, когда учащимся дается познавательная задача, которую они решают самостоятельно, подбирая для этого необходимые методы, используя с помощью учителя.

Ю.К. Бабанский все многообразие методов обучения разделил на три основные группы:

- методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности;
- методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности;
- методы контроля и самоконтроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности.

Широкое обсуждение проблемы методов обучения было проведено на специальной конференции в Санкт-Петербурге в 1978 г. Эта конференция способствовала консолидации усилий дидактов и методистов в разработке теории методов обучения. На ней получил дальнейшее развитие деятельностный подход к характеристике методов обучения.

М.А. Данилов, положивший начало дискуссии середины 50-х гг., обратил внимание на отсутствие ясного определения метода, недостаток аргументации у авторов различных определений, немотивированность существующих классификаций методов. По его мнению, главным в методе является логическая основа обучения: «метод обучения – применяемый учителем логический способ, посредством которого учащиеся сознательно усваивают знания и овладевают умениями и навыками». М.А. Данилов поставил методы в связь не только с логикой построения, но и с самим содержанием. Этот подход был поддержан Е.П. Перовским. С его точки зрения, содержание может быть усвоено только посредством метода, который является формой движения содержания в процессе обучения. При этом решающую роль играют тип знаний и характер их усвоения.

3. Классификации методов обучения

Классификация методов обучения – это система методов, упорядоченная по определенному признаку. В настоящее время известны десятки классификаций методов обучения (таблица 7.1). В настоящее время в дидактике и методике пришли к выводу о том, что не следует стремиться установить единую и неизменную номенклатуру методов. Обучение – чрезвычайно подвижный, диалектический про-

цесс. Система методов должна быть динамичной, чтобы отражать эту подвижность, учитывать изменения, постоянно происходящие в практике применения методов.

Таблица 7.1

Классификации методов обучения

1. Классификация методов обучения по источнику знаний (с учетом современного ее состояния)					
Словесные	Наглядные	Практические	Работа с традиционной книгой или электронными материалами		
Объяснение Разъяснение Рассказ Беседа Лекция Дискуссия Диспут Инструктаж	Иллюстрация Демонстрация	Измерение Опыт Эксперимент Упражнение	Чтение Пересказ Конспектирование Цитирование Составление плана Упражнения с «электронным помощником» Контроль и самоконтроль знаний		
2. Классификация методов обучения по уровню познавательной деятельности (М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер)					
Объяснительно-иллюстративный (информационно-рецептивный)	Репродуктивный	Проблемное изложение	Частично-поисковый (эвристический)	Исследовательский	
3. Классификация методов обучения с учетом применяемых методов познания					
Логические методы	Эмпирические методы	Теоретические методы (методы математики, применение их схем и признаков)			
4. Классификация методов обучения с учетом звеньев дидактического цикла (М.А. Данилов, Б.П. Есипов)					
Приобретение знаний	Формирование умений и навыков	Применение знаний	Творческая деятельность	Закрепление	Проверка знаний, умений, навыков
5. Классификация методов обучения с учетом дидактических целей (Г.И. Шукина, И.Т. Огородникова и др.)					
Методы, способствующие первичному усвоению учебного материала: информационно-развивающие методы (устное изложение учителя, беседа, работа над книгой); эвристические (поисковые) методы (эвристическая беседа, диспут, лабораторные работы); исследовательский метод			Методы, способствующие закреплению и совершенствованию приобретенных знаний: упражнения (по образцу, комментированные упражнения, вариативные упражнения и др.); практические работы		

6. Бинарная классификация методов обучения (М.И. Махмутов)		
Метод преподавания: Информационно-сообщающий Объяснительный Инструктивно-практический Объяснительно-побуждающий Побуждающий		Метод учения: Исполнительный Репродуктивный Продуктивно-практический Частично-поисковый Поисковый
7. Тернарная классификация методов обучения (Н.М. Рогановский)		
Методы обучения, выделяемые по источнику знаний	Методы обучения, выделяемые по уровню познавательной деятельности	Методы обучения, выделяемые в соответствии с методами познания

4. Характеристика некоторых методов обучения

4.1. Методы обучения, выделяемые по источнику знаний. Наиболее важными словесными методами являются рассказ, лекция, беседа и др.

Рассказ – это словесный метод обучения, который:

- 1) предполагает устное повествовательное, целеустремленное изложение учебного материала;
- 2) применяется при изложении учебного материала, носящего ознакомительный характер;
- 3) не прерывается вопросами учащихся;
- 4) позволяет при минимальных затратах времени сообщить максимум знаний;
- 5) предполагает использование таких методических приемов, как изложение информации, активизация внимания, ускорение запоминания, а также логических приемов сравнения, сопоставления, выделения главного, резюмирования;
- 6) характеризуется недостаточной долей самостоятельного познания учащихся, ограниченностью элементов поисковой деятельности;
- 7) затрудняет обратную связь: учитель не получает достаточной информации о качестве усвоения знаний, не может учесть индивидуальных особенностей всех учащихся.

Существует несколько видов рассказа: *рассказ-вступление, рассказ-изложение, рассказ-заключение*. Условиями эффективного при-

менения рассказа являются тщательное продумывание плана, выбор наиболее рациональной последовательности раскрытия темы, удачный подбор примеров и иллюстраций, поддержание должного эмоционального тона изложения.

Беседа – диалогический метод обучения, при котором учитель путем постановки тщательно продуманной системы вопросов подводит учеников к пониманию нового материала или проверяет усвоение ими уже изученного. Беседа относится к наиболее старым методам. Ее развил и с большим мастерством использовал древнегреческий ученый Сократ, от имени которого пришло понятие «сократическая беседа», «метод Сократа». Вопросы могут быть риторическими (ставящий эти вопросы сам же на них и отвечает), чаще же они задаются одним участником диалога другому участнику (учитель – ученику, ученик – ученику, ученик – обучающей или контролирующей компьютерной программе, или наоборот).

При этом могут оказаться полезными следующие рекомендации. Эффективность беседы зависит от того, насколько умело подобраны вопросы, которыми направляется беседа. Составление вопросов облегчается, если учебный материал (например, решение задачи) разбивается вначале на отдельные смысловые части; затем подбираются вопросы таким образом, чтобы облегчить учащимся переход от одной части к другой.

Широкое распространение в практике обучения имеет *эвристическая беседа* (от слова «эврика» – нахожу, открываю). В ходе эвристической беседы учитель, опираясь на имеющиеся у учащихся знания и практический опыт, подводит их к пониманию и усвоению новых знаний, формулированию правил и выводов.

Проиллюстрируем метод беседы.

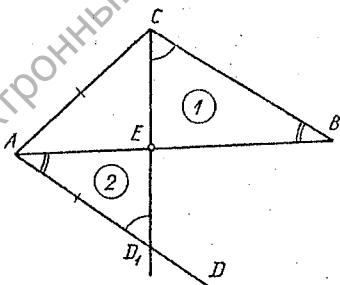


Рис. 7.1

Задача. Дан $\triangle ABC$. Требуется разделить его основание AB на части, которые бы относились друг к другу, как две другие стороны треугольника. Можно ли получить искомую точку следующими построениями (рис. 7.1):

- 1) провести $AD \parallel BC$;
- 2) на луче AD отложить отрезок $AD_1 = AC$;

3) провести прямую CD_1 ;

4) отметить точку E – точку пересечения прямой CD_1 и стороны AB ?

Точка E – искомая?

Приведем примерный перечень вопросов для эвристической беседы.

– Нас интересует отношение $\frac{BE}{EA}$. В какие треугольники удобно включить отрезки BE и EA ?

– Что можно сказать о треугольниках BCE и AD_1E ? Какие они?

– Почему эти треугольники подобны?

– Какую пропорцию можно составить на основании подобия этих треугольников?

– Итак, какой нужно дать ответ на вопрос задачи?

Читателю рекомендуется разбить решение задачи на отдельные шаги и с учетом этого разбиения установить, является ли список вопросов достаточно полным или его необходимо дополнить. Полезно также продумать возможность *переформулирования* приведенных выше вопросов, составить один–два дополнительных вопроса на тот случай, если учащиеся не сразу дадут вам нужный ответ.

Дискуссия. Этот метод обучения основан на обмене взглядами по определенной проблеме, причем эти взгляды отражают собственное мнение участников или опираются на мнения других лиц. Его целесообразно использовать в случае, когда учащиеся обладают значительной степенью самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Хорошо проведенная дискуссия имеет большую обучающую и воспитательную ценность – она учит более глубокому пониманию проблемы, умению считаться с мнением других.

Лекция. Рассказ и объяснение применяются при изучении сравнительно небольшого по объему учебного материала. При работе с учащимися старшего возраста учителям приходится по отдельным темам устно излагать значительный объем новых знаний, затрачивая на это 20–30 минут урока, а иногда и весь урок. Изложение подобного материала осуществляется с помощью лекции. Под лекцией следует понимать такой метод обучения, когда учитель в течение сравнительно продолжительного времени устно излагает значительный по объему учебный материал, используя при этом различные приемы активизации познавательной деятельности учащихся. Преимущество лекции заключается в возможности обеспечить законченность и целостность восприятия школьниками учеб-

ного материала в его логических опосредованиях и взаимосвязях по теме в целом.

Школьная лекция может применяться и при повторении пройденного материала. Такие лекции называются *обзорными*.

Наглядные методы обучения. Устное изложение нового материала учителем, как правило, сочетается с применением средств наглядности. Вот почему в практике обучения большую роль играют наглядные методы обучения.

Метод иллюстраций предполагает показ учащимся различных иллюстративных пособий: плакатов, таблиц, схем, рисунков из учебника, зарисовок и записей на доске, моделей геометрических фигур, натуральных предметов и т. д. *Метод демонстраций* обычно связан с демонстрацией приборов, опытов, показом кинофильмов, диафильмов, слайдов, кодопозитивов, использованием учебного телевидения, магнитофонных записей и т. д.

Существует несколько методических условий успешного применения наглядных средств обучения:

- 1) хорошее обозрение наглядного пособия;
- 2) постановка учебной цели, четкое выделение главного при демонстрации пособия;
- 3) умелое сочетание слова и показа средства наглядности; осуществление ориентации действий учащихся на достижение учебной цели с помощью средства наглядности;
- 4) привлечение учащихся к нахождению желаемой информации (с помощью наглядного пособия), постановка перед ними проблемных заданий.

Практические методы обучения. Они охватывают различные виды деятельности ученика: постановку практических заданий, планирование хода его выполнения, формулирование и анализ итогов практической работы. Практические работы при обучении математике обычно связываются с построениями, измерениями, вычислениями, изготовлением наглядных пособий. К практическим относятся устные и письменные упражнения (тренировочные, комментированные), лабораторные работы, самостоятельное использование компьютерных средств обучения, выполнение заданий с применением чертежных и измерительных инструментов. В связи с компьютеризацией обучения повышается роль практических навыков владения ими: умение воспользоваться справочно-информационным обслуживанием, осуществить повторение пройденного материала, самоконтроль, выбрать посильный набор учебных задач, воспользоваться результа-

тами синтаксического и семантического анализа сообщений учащихся, вызвать демонстрацию хода решения задачи, скорректировать свои действия с учетом статистической обработки данных диагностики и контроля знаний.

Устные упражнения способствуют развитию математической речи, логического мышления, памяти и внимания учащихся, они не требуют затрат времени на ведение записей. Нерационально упражнения, которые могут быть выполнены устно, выполнять письменно. К сожалению такое явление встречается в практике обучения и оно часто усугубляет проблему с дефицитом учебного времени.

Письменные упражнения используются для закрепления знаний и выработки умений в их применении. Использование их способствует развитию логического мышления, культуры письменной речи, самостоятельности в работе. Письменные упражнения могут сочетаться с устными и графическими.

К *графическим упражнениям* относятся работы учащихся по составлению схем, чертежей, графиков, технологических карт, изготовление альбомов, плакатов, стендов, выполнение зарисовок при проведении лабораторно-практических работ, экскурсий. Графические упражнения выполняются обычно одновременно с письменными и решают общие учебные задачи. Они могут быть воспроизводящими, тренировочными или творческими.

Работа с учебником. В этом случае учебник является источником знаний, причем слово здесь выступает в письменной форме. В учебнике, как правило, отражены также наглядные и практические методы обучения. Самостоятельная работа с книгой применяется при условии доступности учебного материала, в форме выборочного чтения отдельных мест. В таком случае изложение материала учителем чередуется с работой учащихся над учебником. Обычно не рекомендуется чтобы работа с книгой занимала весь урок: на уроке ее целесообразно совмещать с другими формами и методами обучения.

4.2. Методы обучения, определяемые уровнем познавательной деятельности учащихся. К методам этой группы относятся объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, проблемно-поисковый и исследовательский методы обучения.

Объяснительно-иллюстративный метод — это метод обучения, при котором образовательные цели достигаются путем предъявления учебной информации в готовом виде (без организации поиско-

вой деятельности), путем объяснения и иллюстрирования ее словом, изображением, действием. Этот метод предполагает сочетание его со словесными, наглядными, практическими методами обучения и проявляется в форме речи в слух, слушания, показа и наблюдения, предъявления учителем объекта и способа действий с ним. С помощью данного метода знания могут быть усвоены только на уровне осознанного восприятия и запоминания.

Репродуктивный метод обучения – это метод организации воспроизведения способов деятельности. Неоднократное воспроизведение способов деятельности позволяет не только применять, но и углублять лежащие в их основе знания, отчасти расширять и тем самым обеспечивать их прочное усвоение. Этот метод сочетается с практическими методами – осуществляется через систему упражнений. В теории и практике обучения хорошо известно, что, при всем значении репродукции, злоупотребление большим количеством однотипных упражнений притупляет интерес учащихся, а подчас ослабляет прочность усвоения, которая далеко не всегда пропорциональна количеству и частоте стереотипных упражнений. Гораздо эффективнее упражнения, варьирующие условия осуществления усваиваемого способа деятельности. Репродуктивный метод поднимает усвоение знаний на более высокий уровень усвоения – на уровень применения по образцу и в вариативных, но легко опознаваемых ситуациях. По мнению известного ученого И.Я.Лернера оба метода – объяснительно-иллюстративный и репродуктивный – для обеспечения усвоения готовых знаний и умений были и остаются самыми экономными и целесообразными [27, с. 99].

В практике многих учителей широко используется репродуктивная самостоятельная работа учащихся. Она проводится на уроке в пределах 7–15 мин. Первые самостоятельные работы по теме носят в основном обучающий и корректирующий характер. С их помощью осуществляется оперативная обратная связь в обучении: учитель видит все недостатки в знаниях учащихся и своевременно устраняет их. От занесения в классный журнал отрицательных оценок можно пока воздержаться (выставляя их в тетради или дневнике учащегося). Если самостоятельная работа носит контролирующий характер, то в журнал выставляются все оценки. Такая система оценивания является достаточно гуманной, хорошо мобилизует учащихся, помогает им лучше осмысливать свои затруднения и преодолевать их,

способствует повышению качества знаний. Учащиеся оказываются лучше подготовленными к контрольной работе, у них исчезает страх перед такой работой, боязнь получить неудовлетворительную оценку. Количество неудовлетворительных оценок, как правило, резко сокращается. У учащихся вырабатывается положительное отношение к деловой, ритмичной работе, рациональному использованию времени урока.

Методы проблемного обучения (эвристический, частично-носко-вый, исследовательский) характеризуются тем, что в процессе решения учащимися специально разработанной системы проблем и проблемных задач происходит овладение опытом творческой деятельности, творческое усвоение знаний и способов деятельности, формирование граждански активной, творчески относящейся к своей деятельности личности. С помощью этих методов устанавливается определенный баланс между алгоритмическими и эвристическими подходами в обучении математике. Основными понятиями проблемного обучения являются «проблемная ситуация», «проблема» и «проблемная задача». *Проблемная ситуация* представляет собой в той или иной степени осознанное субъектом затруднение, преодоление которого требует творческого поиска новых знаний, новых способов и действий. Если у субъекта нет исходных данных для поиска путей преодоления затруднения, то проблемная ситуация не принимается субъектом к решению и, следовательно, не отражается на его мышлении. Мышление начинается с момента осознания и формулировки проблемы, с момента принятия субъектом проблемной ситуации к решению на основе имеющегося фонда знаний, умений и опыта поиска. В этом случае проблемная ситуация перерастает в *проблему*. Проблема, однако, не указывает направления решения и не ограничивает его. Это свойственно проблемной задаче (см. гл. III), в условии (в сочетании с требованием) которой даны какие-то параметры решения. Проблема с указанием каких-либо параметров ее решения представляет *проблемную задачу*, осуществлять постепенно на протяжении всех лет обучения. Постепенность овладения опытом творческой деятельности и определяет различие методов, организующих и обеспечивающих его усвоение. В *эвристическом методе* учитель сам показывает примеры создания проблемных ситуаций, проблем и проблемных задач, сам показывает поиск их решения (например, это может осуществляться с помощью риторических вопросов). В час-

тично-поисковом методе учащиеся принимают частичное участие в проблемном изложении – либо в формулировании проблемы или проблемной задачи, либо в поиске ее решения. Наибольшая степень самостоятельности учащихся предусмотрена в *исследовательском методе обучения*. Сущность исследовательского метода заключается в организации поисковой, творческой деятельности учащихся по решению проблем и проблемных задач. Построение по каждому предмету системы таких проблем позволяет учителю программировать деятельность учащихся, постепенно приводящую к формированию необходимых черт творческой деятельности.

Отдельно охарактеризуем понятие «поисковая (эвристическая) деятельность ученика». *Поисковая (эвристическая) деятельность учащихся* – это учебная деятельность, направленная на усвоение новых знаний, новых способов действий с ними. Она предполагает наличие: задачи, решение которой дает ученику новое знание, новый способ действия с ним или перенос знаний и способов в другие условия; мотива, побуждающего ученика к самостоятельному поиску; общего представления о путях и средствах решения задачи; определенных знаний, умений и навыков. Развитие поисковой деятельностью учащихся связано с теоретическим и практическим решением вопроса об управляемости как учебного процесса в целом, так и деятельности каждого отдельного ученика.

Большинство исследователей, пользуясь теми или иными терминами, выделяют примерно одни и те же *этапы поисковой деятельности*. Она начинается с предварительного анализа условия и требования задачи, с создания определенного мотивационно-эмоционального состояния, изменяющегося в ходе решения задачи (*первый этап*). Исходя из условий и требований задачи, учащийся пытается установить связи, отношения и зависимости между данными, опираясь на свой опыт (*второй этап*). В случае затруднения учащийся преобразует условия, требования задачи: переформулирует, перекодирует, упрощает задачу, сводит ее к известному виду и т.д. В итоге возникает исходная идея, замысел решения (*третий этап*). Появляется необходимость в планировании последующих действий, выделяются необходимые действия, определяется их последовательность. В результате составляется план решения задачи (*четвертый этап*). План осуществляется с помощью выделяемых операций, проверяется и оценивается на основе устанавливаемых критериев (*пятый этап*).

Промежуточные и окончательные результаты действий все время сличаются с исходными условиями и требованиями. Если выполняемые операции и полученные результаты соответствуют им, то деятельность прекращается — задача решена (*шестой этап*). В противном случае *цикл* из предыдущих этапов или их части повторяется до тех пор, пока нужен ответ, согласованный с условиями и требованиями задачи, не будет найден.

Каждый из этапов поиска решения задачи имеет определенную степень управляемости. Наибольшие затруднения учителей и учащихся проявляются на третьем и четвертом этапах — отыскание замысла и плана решения задачи.

Затруднения учителя. Учитель не всегда ясно осознает, какими именно конкретными умственными действиями необходимо воспользоваться на этих этапах, какие из них являются ключевыми при решении данной задачи, каким образом организовывать свои действия и как надо обучать учащихся умственным действиям, обеспечивая их перенос на новые ситуации; не всегда сочетаются должным образом управления различной степени жесткости. Учитель не всегда обеспечивает своевременную обратную связь, позволяющую корректировать пооперационные цели. Отсутствие или задержка оперативной обратной связи приводит к сбою системы управления.

Затруднения ученика: слабое усвоение теоретического материала и вытекающие отсюда затруднения с его актуализацией, не осознание и не владение приемами умственных действий поисковой деятельности. Часто решение задачи начинается с выяснения некоторых частных и деталей, а не с выяснения общего хода решения задачи. Затруднения порождаются чрезмерным разнообразием и темпом смены учебных задач и методов их решения, нехваткой учебного времени.

Проблемный подход может быть использован в целях систематизации задач, при этом задачи группируются не только по тематическому признаку, но и по тем или иным учебным проблемам (см. [102]). В этом учебнике выделяются и неоднократно ставятся следующие проблемы.

Проблемы первой группы делают акцент на развитие геометрической, числовой, алгебраической интуиции и наблюдательности: что подсказывает рисунок? какие геометрические закономерности можно заметить? все ли правильно изображено на рисунке? правильно ли на рисунке указаны величины углов? с чего начать построение данной комбинации фигур? соответствует ли ответ условию задачи?

Проблемы второй группы связаны с составлением задач самим учеником: какие обратные задачи можно составить? сколько обрат-

ных задач можно составить для данной задачи? нельзя ли обобщить задачу? нельзя ли конкретизировать задачу? вот условие задачи – подберите для этого условия заключение задачи; нет ли в задаче противоречивых данных? сколько данных должно быть в задаче? нет ли в задаче лишних данных? и др.

Проблемы третьей группы ориентируют на овладение эвристическими приемами: что подсказывает рисунок? какие дополнительные построения необходимо выполнить? как алгебра помогает решать геометрические задачи? нельзя ли вначале наметить общий ход решения задачи? как проверить правильность решения задачи? все ли возможные случаи рассмотрены? как искать решение задачи?

Проблемы четвертой группы объединяют вокруг себя задачи с четко выраженной познавательной функцией: как построить равно- великие фигуры? что такое расстояние от точки до прямой? и т.д.

4.3. Методы обучения, ориентированные на применение методов познания. В теме «Мировоззренческие и методологические аспекты обучения математике» были рассмотрены возможности методов познания в обучении, в осуществлении проблемного обучения. В данном пункте укажем на методы, которые опираются на дедуктивный вывод следствий и потому являются наиболее характерными именно для математики. К этим методам относятся синтетический метод поиска и два аналитических метода поиска (анализ Паппа и анализ Евклида).

В *синтетическом методе поиска*, отталкиваясь от условия задачи, пытаются вывести из них следствия до тех пор, пока в качестве следствия не окажется требование задачи. Поиск при этом направляется такими вопросами: «Зная это и это, что можно найти, получить, какое следствие вывести?»

Метод поиска – анализ Паппа – отталкивается не от условия, а от требования задачи и представляет собой последовательный подбор достаточных условий: вначале для требования задачи (первичные достаточные условия), затем достаточных условий для полученных первичных достаточных условий (вторичные достаточные условия). Подбор достаточных условий продолжается до тех пор, пока ими не окажется условие задачи. Поиск направляется вопросами типа: «Нам нужно найти то-то. Что для этого достаточно знать?»

Метод поиска – анализ Евклида, – как и анализ Паппа, также начинается с требования задачи, но в отличие от анализа Паппа здесь

не подбирают достаточные условия для требования задачи, а выводят следствия из него, до тех пор, пока в качестве следствия не будет получено либо условие задачи, либо некоторое очевидное, ранее известное предложение. Поиск направляется вопросами типа: «Нам нужно найти то-то. Какие следствия можно получить из этого требования? Нельзя ли на некотором шаге вывода следствий получить в качестве следствия условие задачи?»

Пример поиска с помощью синтетического метода. Пусть требуется доказать предложение:

$$(a > 0, b > 0, a \neq b) \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Из условия данного предложения стремимся вывести ряд следствий:

$$a \neq b \quad (1) \Rightarrow (a-b)^2 > 0 \quad (2) \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab \quad (3) \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \quad (4)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 > 4ab \quad (5) \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} > ab. \quad (6)$$

Наконец,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(a+b)^2}{4} > ab, \\ ab > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Вопросы, направляющие поиск:

- Если $a \neq b$, то что можно сказать о разности $a - b$ и квадрате этой разности? (Приходим к неравенству (2).);
 - Какое следствие можно получить из неравенства (2)? (Неравенство (3).)
- Повторяя эти вопросы, находим искомое доказательство.

Пример поиска с помощью анализа Евклида. Рассмотрим применение анализа Евклида с целью нахождения доказательства приведенного выше неравенства. Начинаем с вывода следствий из того, что нам надо доказать, выводя их до тех пор, пока не придем к условию предложения или к некоторому очевидному неравенству. Имеем:

$$\begin{array}{c} \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \\ \Downarrow \\ a+b > 2\sqrt{ab}, a+b > 0 \\ \Downarrow \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\Downarrow \\
 &(a+b)^2 > 4ab \\
 &\Downarrow \\
 &a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \\
 &\Downarrow \\
 &a^2 - 2ab + b^2 > 0 \\
 &\Downarrow \\
 &(a-b)^2 > 0 \\
 &\Downarrow \\
 &a \neq b
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство дано в условии. Отсюда делается вывод о том, что доказываемое равенство справедливо. Делая этот вывод имеют в виду, что проведенные рассуждения можно обратить: из последнего неравенства следует предыдущее, из предыдущего – предпредыдущее и т.д. В итоге получим неравенство, которое и надо было доказать.

Пример поиска с помощью анализа Паппа. Обратимся опять к рассмотренному выше неравенству. Начинаем с подбора достаточных условий для неравенства $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ (1). Задаем первый вопрос: «Какое неравенство должно выполняться, чтобы неравенство (1) было справедливым?», или иначе – «Из какого неравенства следует неравенство (1)?» (Из неравенства $a+b > 2\sqrt{ab}$.) Продолжая эти рассуждения, приходим к следующей цепочки достаточных условий:

$$\begin{aligned}
 &\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \\
 &\Uparrow \\
 &a+b > 2\sqrt{ab} \\
 &\Uparrow \\
 &(a+b)^2 > 4ab, a > 0, b > 0, a \neq b \\
 &\Uparrow \\
 &a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \\
 &\Uparrow \\
 &a^2 - 2ab + b^2 > 0 \\
 &\Uparrow \\
 &(a-b)^2 > 0 \\
 &\Uparrow \\
 &a \neq b
 \end{aligned}$$

Аналитические методы являются основными эвристическими методами поиска решений учебных задач.

5. О сочетании методов обучения

Методы обучения характеризуются не только выбором источника знаний, методов познания, уровня познавательной деятельности учащихся. Они имеют многие другие существенные признаки, которые также необходимо принимать во внимание. Одни из этих признаков больше подчеркивают обучающую сторону метода, другие воспитывающую, третьи – развивающую.

Сочетание методов обучения дает такой метод, который характеризуется не одним каким-либо признаком, а целой их совокупностью. С точки зрения одного признака, данный метод обучения может быть, например, наглядным, с точки зрения другого, – индуктивным, с точки зрения третьего, – проблемным изложением и т.д. Умение охарактеризовать один и тот же метод обучения с точки зрения различных признаков является необходимым качеством учителя, но выработать его можно лишь постепенно, по мере накопления практического опыта, при целенаправленном подходе к анализу методов обучения. При этом необходимо иметь в виду, что при том или ином сочетании методов обучения, некоторые из них могут играть ведущую роль, другие – вспомогательную роль.

В воспитании интереса к учебе большую роль играют методы познавательных игр и учебных дискуссий, использование математических софизмов, исторического материала и т.д.

Выскажем некоторые соображения о построении *системы методов обучения* по курсу (разделу, теме). Обосновать выбор отдельного метода при изучении конкретного вопроса, или, наоборот, обосновать нецелесообразность его можно только с позиции системы методов обучения. Для того чтобы составить общее представление о системе методов обучения по отдельному предмету (разделу, теме), необходимо вести их учет. Учет применений каждого метода, соотнесение результатов анализа совокупности методов обучения с результатами обучения, воспитания и развития учащихся помогают корректировать совокупность методов обучения, совершенствовать ее – в этом и состоит естественный путь к созданию системы методов обучения.

Построение системы методов обучения целесообразно вести на основе *логико-дидактического анализа учебного материала*. Логико-дидактический анализ начинается с выяснения структуры учебного материала (логического анализа). Анализу подвергается определение

отдельного понятия, система понятий, отдельное предложение, система предложений и доказательств, весь учебный материал темы, различные варианты изложения темы. Результаты логического анализа учитываются в последующем дидактическом анализе учебного материала, в ходе которого определяется методика изучения выделенных элементов и блоков учебного материала. В процессе дидактического анализа изучаются особенности реализации дидактических принципов, возможности применения и целесообразного сочетания различных методов обучения, построения системы уроков.

Значительный вклад в разработку систем методов обучения вносят учителя-новаторы. Знакомство с их опытом крайне важно для практической подготовки студентов.

В следующем пункте на конкретном примере покажем, какими могут быть методы обучения, показывающие процесс построения математической теории, как можно догадаться, какие определения и теоремы формулируются в том или ином случае.

Пример сочетания методов обучения, показывающих процесс построения математической теории. Приведем конкретный вариант учебного материала, целью которого является разъяснение учащимся особенностей построения математической теории (таблица 7.2).

Таблица 7.2

Пример сочетания методов обучения

№ п/п	Изложение учебного материала	Методические особенности
1	<i>Описание наблюдений на математическом языке.</i> Начнем не с определения фигуры, а с перечисления группы ее свойств из наглядных Рис. 7.2 соображений, по рисунку (рис. 7.2). На этом рисунке изображен треугольник ABC и три его медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Свойства данной фигуры формулируются в виде ряда утверждений. Приведем список таких утверждений, составленный по предложению учащихся 7-го класса одной из школ г. Могилева: 1) $AC = BC$; 2) $\angle A = \angle B$; 3) Медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC; 4) Медиана CC_1 является высотой треугольника ABC; 5) Медианы AA_1 и BB_1, проведенные к боковым сторонам треугольника ABC, равны: $AA_1 = BB_1$.	Используются наглядный метод обучения, беседа, метод наблюдения, анализ рисунка, крупноблочный подход.

№ п/п	Изложение учебного материала	Методические особенности
2	<i>Процесс построения теории.</i> Далее выясним, можно ли на основании первого утверждения доказать остальные. Следует ли из первого утверждения второе? Так как $AC=BC$ (утверждение 1), $AC_1 = C_1B$ (так как CC_1 — медиана) и CC_1 — общая сторона треугольников ACC_1 и BCC_1, то эти треугольники равны (по трем сторонам). Из их равенства следует, что $\angle A = \angle B$. Это означает, что из первого утверждения следует второе. Из равенства этих же треугольников следует, что $\angle ACC_1 = \angle BCC_1$, т.е. медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC. Это означает, что из первого утверждения следует третье. Еще раз обратимся к равным треугольникам ACC_1 и BCC_1. Из их равенства следует, что $\angle AC_1C = \angle BC_1C = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Это означает, что CC_1 является высотой треугольника ABC и, следовательно, из первого утверждения следует четвертое. Для доказательства пятого утверждения рассмотрим, например, треугольники ACA_1 и BCB_1. Нетрудно убедиться в том, что эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Из их равенства следует, что $AA_1 = BB_1$. Поэтому из первого утверждения следует пятое.	Логическая организация математического материала связана не с одним каким-либо его одним элементом, а с целостным фрагментом. Используются при этом проблемные методы обучения (возможны эвристический, частично-поисковый, исследовательский методы). Применяется синтетический метод поиска доказательства.
3	<i>Завершение построения фрагмента теории.</i> Подведем некоторые итоги. Ввиду того, что утверждения 1 оказалось достаточно для доказательства остальных, есть смысл выделить это утверждение особо. Важность этого утверждения как исходного утверждения при построении данного фрагмента теории подчеркнем, если положим его в основу определения такого вида треугольника. Приходим к определению. Равнобедренным треугольником называется треугольник, имеющий равными хотя бы две стороны. Проведенные выше доказательства позволяют сформулировать следующие теоремы. Теорема 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Теорема 2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является его биссектрисой. Теорема 3. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является его высотой. Теорема 4. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к его боковым сторонам, равны. Все эти теоремы были выше доказаны. Построение данного фрагмента теории закончено. Проведенные рассуждения показывают процесс построения математической теории. Как видно, он не всегда начинается с "готовых" определений. Какое определение изучаемой фигуры следует сформулировать, выясняется лишь после проведенных доказательств. Отметим еще, что первое утверждение играло роль аксиомы при построении данного фрагмента теории. Это обстоятельство подчеркивает мысль о том, что аксиомы и определения играют сходную роль в построении теории — роль "отправных" предложений, на которые опирается изложение остального математического материала.	Синтез результатов исследования.

№ п/п	Изложение учебного материала	Методические особенности
4	<i>Расширение фрагмента теории.</i> Полученный фрагмент теории в дальнейшем может быть расширен. Не всегда список утверждений может быть составлен только при помощи наблюдения чертежа. Иногда он может формулироваться на основании а н а л о г и с уже известными утверждениями. Например, по аналогии с четвертым утверждением могут быть сформулированы следующие два: 5) Высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны. 6) Биссектрисы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны. Чертеж может подсказать еще и такие утверждения: 7) Медианы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке. 8) Высоты равнобедренного треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. 9) Биссектрисы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке.	Метод аналогии
5	<i>Дальнейшее расширение теории.</i> Дополнительно к рассмотренным выше могут быть сформулированы о б р а т н ы е утверждения: 10) Если в треугольнике равны два угла, то он является равнобедренным. 11) Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то он является равнобедренным. 12) Если в треугольнике медиана является высотой, то он является равнобедренным. 13) Если в треугольнике равны две высоты, то он является равнобедренным. 14) Если в треугольнике равны две медианы, то он является равнобедренным. 15) Если в треугольнике равны две биссектрисы, то он является равнобедренным. 16) Если в треугольнике медианы пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным. 17) Если в треугольнике высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным. 18) Если в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным. Предлагаем студентам завершить построение «расширенного» фрагмента теории равнобедренного треугольника. При этом предупредим, что сложность доказательства некоторых утверждений может значительно отличаться от других. Довольно простыми являются доказательства утверждений 7, 8, 10, 12 – 14. Не столь сложными, сколь непривычными, являются доказательства утверждений 7 – 9. Труднее додуматься до доказательства утверждения 15. Утверждения 16 – 18 вообще не справедливы!	Используются методологические сведения о построении теорем, о построении обратных теорем, об обосновании невозможности доказательства.

№ п/п	Изложение учебного материала	Методические особенности
	Рис. 7.3 Это означает, что утверждение 16 ложно. Аналогично устанавливается ложность утверждений 17 и 18.	Покажем, например, что утверждение 16 не является справедливым, для этого достаточно привести пример треугольника, для которого условие утверждения выполняется, а заключение – не выполняется. Пример такого треугольника приведен на рисунке 7.3. На этом рисунке медианы треугольника пересекаются в одной точке, но этот треугольник равнобедренным не является.

6. Задания для практических и лабораторных занятий

Задание 1. Какие дискуссионные вопросы о методах обучения вам известны? Оправдано ли стремление учителя пользоваться только одним-двумя методами обучения? К чему может привести такая «система» методов обучения? Нужно ли стремиться пользоваться всеми методами обучения? Нужно ли стремиться к тому, чтобы использовать различные методы обучения с одинаковой частотой? К чему может привести излишнее или недостаточное применение словесных, наглядных, практических методов, метода индукции, дедукции, репродуктивных, частично-поисковых и других методов?

Задание 2. Ознакомьтесь (по рекомендации вашего преподавателя) с опытом работы некоторых учителей-новаторов. Охарактеризуйте их системы методов обучения. Приведите конкретный пример применения той или иной системы.

Задание 3. Разработайте несколько вариантов методики изложения некоторого небольшого фрагмента учебного материала с применением различных методов обучения. Подготовьтесь и проведите деловую игру по обучению учащихся. Воспользуйтесь при этом различными школьными учебниками.

Задание 4. В период педагогической практики изучите систему методов обучения учителя математики, руководящего вашей практикой, по отдельной небольшой учебной теме. Проанализируйте эту систему. Прокомментируйте выбор методов обучения. Как эти методы согласовываются с установками используемого школьного учеб-

ника? Как мотивирует этот выбор учитель? Сравните свое объяснение с объяснением учителя.

Тема 8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДИКА ИХ ИЗУЧЕНИЯ

1. Понятие и определение (сведения из логики)
2. Методика формирования понятий
3. Задания для практических и лабораторных работ

1. Понятие и определение (сведения из логики)

1.1. Объем и содержание понятия. Каждая теория начинается с формирования научных понятий. Каждое понятие характеризуется *объемом понятия* (т. е. множеством объектов) и *содержанием понятия* (т.е. признаками, присущими всем объектам этого множества). Содержание понятия раскрывается с помощью *определения*. Понятие фиксируется в речи с помощью слова или словосочетания, называемого *именем* или *термином* понятия. В математике понятие часто обозначается не только термином, но и *символом*.

Пример 1. Содержанием понятия «четное число» является признак «число, делящееся на 2». Объем понятия «четное число» – множество всех четных чисел. Это множество бесконечное.

Пример 2. Содержанием понятия « $\sqrt{3}$ » является признак «неотрицательное число, квадрат которого равен 3». Объем этого понятия единичное множество, состоящее из одного числа.

Пример 3. Содержанием понятия «уравнение» является признак «равенство, содержащее переменную». Объем этого понятия – множество уравнений. Это множество бесконечное (даже одних только линейных уравнений – бесконечное множество).

Умение указать объем понятия, наиболее характерных его представителей формируется с помощью заданий такого типа: «Приведите примеры различных треугольников (параллелограммов, десятичных дробей и т.д.)».

Умение указать содержание понятия формируется с помощью заданий следующего вида: «Скажите, что такое треугольник (круг, рациональное число)», «Сформулируйте определение треугольника (круга, рационального числа)», «Что называется треугольником, (кругом, рациональным числом)».

1.2. Закон обратного отношения. Имеет место закон обратного отношения между объемом и содержанием понятия: если объем одного понятия включает в себя объем другого понятия, то содержание первого понятия является частью второго.

Пример 4. Сравним объемы (и содержания) понятий «равнобедренный треугольник», «равносторонний треугольник».

Объем понятия равнобедренного треугольника шире объема понятия равностороннего треугольника – множество равносторонних треугольников включается в множество равнобедренных треугольников. Содержание же понятия равнобедренного треугольника является частью содержания понятия равностороннего треугольника: в определении равностороннего треугольника указывается равенство всех трех сторон, а в определении равнобедренного хотя бы двух сторон.

1.3. Классификация. Детальное изучение объема понятия часто осуществляется с помощью классификации. *Классификация* представляет собой последовательное, многоступенчатое разбиение множества на два класса с помощью некоторого свойства (двучленное деление или «дихотомия» в терминах традиционной логики).

Пусть имеем множество A , для элементов которого требуется провести классификацию по некоторым свойствам, представляющих для исследователя определенный интерес. Пусть P_1 – первое такое свойство, причем существуют элементы из A , обладающие и не обладающие этим свойством. Обозначим множество первых элементов через A_1 , множество вторых элементов через $\bar{A}_1$:

$$A_1 = \{x | x \in A \text{ и } P_1(x)\} \text{ и } \bar{A}_1 = \{x | x \in A \text{ и } \bar{P}_1(x)\}.$$

Получаем разбиение множества A на два класса A_1 и $\bar{A}_1$: $A_1 \cup \bar{A}_1 = A$ и $A_1 \cap \bar{A}_1 = \emptyset$.

Далее аналогично разбиваем множество A_1 с помощью свойства P_2 , получаем множества A_2 и $\bar{A}_2$. Множество A_2 с помощью свойства P_3 разбиваем на множества A_3 и $\bar{A}_3$ и т.д. до получения множества разбиение которого уже не рассматривается.

Пример 5. Классификация чисел. Классификация комплексных чисел приведена в виде таблицы 8.1.

Классификация комплексных чисел

Комплексные числа				
Действительные				Мнимые
Рациональные			Иррациональные	
Целые		Дробные		
Целые неотрицательные	Целые отрицательные			
Натуральные	Нуль			

Если читать эту таблицу сверху вниз, то она показывает последовательные этапы конкретизации комплексных чисел, если снизу – вверх, то этапы обобщения понятия числа.



Рис. 8.1

Пример 6. Классификация треугольников. Схема одной из возможных классификации треугольников (по величине угла) приведена на рис. 8.1.

1.4. Система понятий. С помощью определений устанавливаются логические связи между понятиями, строится система понятий. Например, понятие параллелограмма определяется через понятия четырехугольника и параллельности отрезков. Понятие четырехугольника, в свою очередь, определяется через понятия фигуры, точки, отрезка... Продолжая этот анализ дальше, придем к исходным (неопределяемым) геометрическим понятиям. В итоге выявляется система понятий, приводящая к понятию параллелограмма.

1.5. Виды определений. Существуют различные виды определений. Часто все определения делятся на два вида: явные и неявные.

Явными называются определения, в которых смысл определяемого термина полностью передается через смысл определяющих терминов. В *неявных* определениях смысл определяемого термина не передается полностью определяющими терминами. Типичный пример неявного определения – определение исходных понятий с помощью системы аксиом. Определение параллелограмма относится к числу явных.

Наиболее распространенным видом явных определений является *определение через ближайший род и видовое отличие*. В нем содержится указание на класс объектов, среди которых содержится определяемый объект (ближайший род), и на признак, посредством которого он выделяется из этого класса (видовое отличие).

Пример определения через ближайший род и видовое отличие – определение параллелограмма. В этом определении ближайшим родом является понятие «четыреугольник», видовым отличием – признак «противоположные стороны попарно параллельны».

В формальной логике выделяется так называемое *остенсивное определение* – определение путем показа объекта. Например, маленьким детям показывается некоторый «заморский фрукт» и говорят: «Дети, это киви». Фраза «Дети, это киви» и есть остенсивное определение понятия «киви». В математике, разумеется, остенсивные определения как определения не рассматриваются. В школьном преподавании они используются довольно часто как методический прием, предваряющий введение полноценного определения. Например, на классной доске учитель рисует параллелограмм и говорит: «Дети, этот четырехугольник называется параллелограммом», после чего формулируется определение параллелограмма через ближайший род и видовое отличие.

Генетическим называется определение объекта путем указания способа его построения. Примером генетического определения является определение линейного угла двугранного угла: «Плоский угол, который получается при пересечении плоскости, перпендикулярной к ребру двугранного угла, с его гранями, называется линейным углом этого двугранного угла». Как видно, в данном определении указывается способ построения линейного угла, поэтому оно является генетическим.

В *индуктивном (рекуррентном)* определении объект задается как функция $f(n)$ от натурального числа n . Это задание обеспечивается

указанием значения $f(1)$ и некоторого равенства, связывающего значения $f(n+1)$ и $f(n)$. Индуктивным является, например, известное определение суммы натуральных чисел Грассмана, состоящее из двух равенств: $m+1=m'$, $m+n'=(m+n)'$. Индуктивными являются определения многих последовательностей, включая определения арифметической и геометрической последовательностей, изучаемых в средней школе.

Как уже было отмечено, *аксиоматические определения* относятся к числу неявных определений. Примерами аксиоматических определений являются определения группы, кольца и поля, или точки, прямой и плоскости (в гильбертовской и многих других аксиоматических теориях). Система аксиом Пеано для натуральных чисел определяет исходные понятия: «натуральное число», «единица» и «непосредственно следовать за». С помощью аксиоматики Вейля определяются такие исходные понятия как «вектор» и «точка».

1.6. Требование принципа научности. Встречаются нарушения этого принципа.

Пример 1. Обратимся, например, к понятию угла и к некоторым первым понятиям, связанным с ним. Понятие угла – простое понятие? Да, но только с первого взгляда... Поясним, что мы имеем в виду.

Традиционно угол определяется как фигура, состоящая из двух лучей, имеющих общее начало. Подчеркивается, что этот угол не может быть больше 180° . Иногда не учитывая этого факта и неоправданно «расширяют» данное понятие. Убедимся, что произвольно обращаться в математике с понятиями нельзя. В противном случае неизбежно можно прийти к противоречиям и ошибкам. Допустим, что при имеющемся определении мы бы посчитали, что угол может быть больше 180° . Тогда под определение смежных углов подходят не только углы 1 и 2 (рис. 8.2), но и углы 1 и $2'$, причем сумма таких «смежных углов» не равна 180° . Как же быть тогда с теоремой о сумме смежных углов? Аналогичная ситуация и с вертикальными углами: под определение вертикальных углов подходят не только углы 1 и 2 (рис. 8.3), но и углы 1 и $2'$, причем эти «вертикальные углы» не равны. Как видно, самые первые и самые простые теоремы могут оказаться неверными, если небрежно обращаться с математическими понятиями!

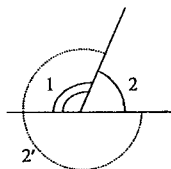


Рис. 8.2

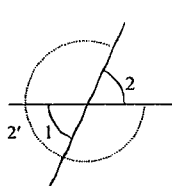


Рис. 8.3

К аналогичной коллизии приводит и определение угла как части плоскости (это определение появилось в школьных учебниках позднее). Приводя это определение, авторы не замечают, что оно предполагает другие определения смежных и вертикальных углов. Например, при определении угла как части плоскости вместо традиционного определения смежных углов требуется такое определение: смежными углами называются два угла, объединение которых есть развернутый угол, а пересечение — луч. Требуется уточнения и определение вертикальных углов — недостаточно указать, что стороны одного угла являются продолжением сторон другого угла, необходимо еще отметить, что кроме общей вершины этих углов других общих точек данные углы не имеют.

Подобная ошибка приводит к существенному нарушению принципа научности, особенно если учесть, что понятие угла лежит в основе многих других понятий: центрального угла окружности, угла многоугольника, угла между пересекающимися прямыми, между параллельными прямыми, между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями, между двумя векторами, угла поворота в теории геометрических преобразований.

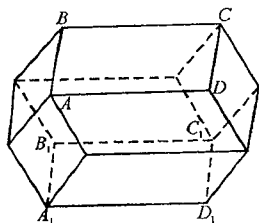


Рис. 8.4

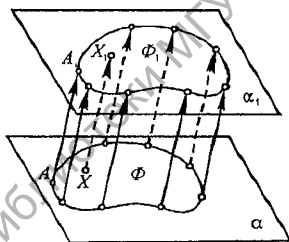


Рис. 8.5

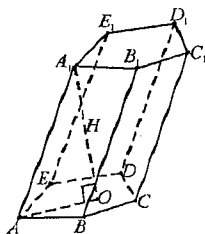


Рис. 8.6

Пример 2. Отметим, что ошибочные определения встречаются и в учебниках прошлых лет. Так, в учебнике по стереометрии А.П. Киселева дано такое определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Этому определению удовлетворяет многогранник, не являющийся призмой (рис. 8.4, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — «основания»). Это определение можно исправить, например, так: «Многогранник, у которого две грани — равные n -угольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные n граней — параллелограммы, называется призмой». Возможно генетическое определение призмы, которое получается на базе понятия параллельного переноса в пространстве: Пусть в некоторой плоскости α (рис. 8.5) задана фигура Φ , ограниченная произвольной замкнутой, не имеющей самопересечений, линией. Из

некоторой точки A плоскости α проведем отрезок AA_1 , не лежащий на этой плоскости. Подвергнем фигуру Φ параллельному переносу на вектор AA_1 . Каждая точка X фигуры Φ перейдет при этом в некоторую точку X_1 фигуры Φ_1 . Множество всех отрезков XX_1 образует тело, которое называется *цилиндром*. *Призма* – это цилиндр, основаниями которого является многоугольник (рис. 8.6).

Пример 3. Определенным нарушением требований к определениям является не использование существующего термина для родового понятия (например, понятия натурального числа), а использование его определения (как целого положительного числа). Этот недостаток можно заметить в следующем определении: «Простое число – целое положительное число, которое больше единицы и не имеет других делителей, кроме себя и единицы» (см.: Математическая энциклопедия. – С. 295).

2. Методика формирования понятий

2.1. Актуальность методики формирования понятий. Понятия и их определения служат базисом построения каждой научной теории. Не владея ими, невозможно ни восприятие теоретического материала, ни способность решать какие-либо задачи. Математические определения формируют язык математики, математическую речь, умение выражать свои мысли в математической форме. Речь (имеется в виду естественная речь) является важнейшим средством развития человека. Математическая речь в еще большей мере выступает в этом качестве. На основе математической речи формируются многие составляющие логического мышления – умение кратко и точно выражать свои мысли, умение пользоваться понятиями в рассуждениях, пользоваться точными ссылками и т.д.

Образование понятий связано с установлением общих свойств у предметов, выделением существенных признаков, соединением их в определенное единство. Поэтому в формировании понятий большую роль играют логические методы: анализ, сравнение, абстрагирование, обобщение, синтез и др. Выбор тех или иных логических методов при введении конкретного понятия приводит к различным методическим методам и приемам обучения. Будущему учителю необходимо научиться пользоваться логическими методами познания, умению комбинировать их, умению выделять в тех или иных конкретных случаях ведущий метод, вспомогательные

методы, умению оказывать помощь учащимся в осознанном применении этих методов.

Методика изучения того или иного понятия зависит от ряда факторов: насколько сложным является данное понятие, в какой мере оно подготовлено жизненным опытом учащихся, в каком классе изучается данное понятие, знакомятся ли учащиеся с данным понятием впервые или имела место пропедевтика данного понятия в предшествующих классах.

Существенно также вводится ли отдельное понятие, или сразу группа понятий (как это рекомендуется в технологии «метод срезов»).

Особенно важно с точки зрения методики, сообщается ли определение в готовом виде или учащиеся подводятся к нему. Подведение понятий, возможно, занимает больше времени, но зато здесь дети учатся обнаруживать признаки понятия, учатся умению проявить догадку, сообразительность. Это означает, что подведение к понятиям дает несравненно больше для развития детей, нежели сообщение определений в готовом виде. Разумеется, требуется определенный баланс в применении обозначенных двух подходов.

2.2. Конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный методы введения понятий. В методике преподавания математики выделяются два метода введения понятий: *конкретно-индуктивный* и *абстрактно-дедуктивный* (термины введены русским методистом К.Ф. Лебединцевым). Эти методы определяются логическими методами познания: индукцией и дедукцией. Конкретно-индуктивный метод используется при подведении учащихся к понятиям и их определениям. Если соотнести конкретно-индуктивный метод с общими дидактическими методами обучения, то его, безусловно, следует отнести к проблемным методам обучения. Особенно часто конкретно-индуктивный метод используется локально, применительно к отдельной единице учебного материала, тогда как сам фрагмент этого материала излагается объяснительно-иллюстративным и репродуктивным методами.

Схема (модель) применения конкретно-индуктивного метода такова:

- 1) анализируется эмпирический материал с точки зрения определенной цели (при этом, кроме индукции, привлекаются и другие логические методы: анализ, сравнение, абстрагирование, обобщение);
- 2) в соответствии с поставленной целью выясняются общие признаки понятия, которые его характеризуют;

3) формулируется определение — что означает достижение поставленной цели;

4) определение закрепляется путем приведения примеров и контрпримеров;

5) дальнейшее усвоение понятия и его определения происходит в процессе их применения.

Вспомните, каким образом в школьном курсе математики вводится понятие суммы двух действительных чисел. Оно вводится на конкретном примере. Для двух чисел составляются последовательности приближенных значений с недостатком и избытком. Отдельно составляется последовательности для сумм соответствующих приближенных значений данных чисел по недостатку и избытку. Выясняют, какое число заключено между соответствующими значениями сумм. Находят его приближенное значение, а само число называют суммой двух данных действительных чисел. В этом и состоит конкретно-индуктивный метод введения данного понятия. Целесообразность использования этого метода в данном случае определяется вполне однозначно и объясняется сложностью данного понятия и невозможностью его более или менее строгого введения в школьном курсе.

Конкретно-индуктивный метод особенно часто используется в младших классах. Типичный пример — введение определений (правил) арифметических действий.

Разумеется, конкретно-индуктивным методом пользоваться нецелесообразно, если данное понятие в определенной мере известно учащимся из пропедевтического курса, или хотя оно и является новым, но в силу своей простоты не вызывает затруднений учащихся и т.п.

Абстрактно-дедуктивный метод является конкретизацией объяснительно-иллюстративного и репродуктивного методов. Обычно он требует меньше времени (это его достоинство), но он не обучает поисковой деятельности (это его недостаток).

Схема (модель) применения абстрактно-дедуктивного метода такова:

1) формулируется определение понятия;

2) приводятся примеры и контрпримеры;

3) дальнейшее усвоение понятия и определения происходит в процессе их применения.

Примером применения абстрактно-дедуктивного метода является введение понятия декартовых координат на плоскости в системати-

ческом курсе геометрии. Абстрактно-дедуктивный метод применяется обычно в тех случаях, когда введение понятия хорошо подготовлено предшествующим обучением. Например, после введения понятия параллелограмма введение понятий других четырехугольников (прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции) естественнее осуществить абстрактно-дедуктивным методом.

Рекомендуем привести свои примеры абстрактно-дедуктивного введения понятий и дать объяснение, почему целесообразно использовать данный метод.

Особо обращаем внимание на роль приведения *контрпримеров* при изучении понятий. Контрпримеры являются одним из средств реализации психологического принципа противопоставления. Благодаря противопоставлению усиливается восприятие изучаемого материала, обеспечивается более осознанное его усвоение.

Методическая схема приведения контрпримеров:

- 1) формулируется определение понятия;
- 2) приводятся одновременно примеры и контрпримеры (например, рисунки параллелограмма и рисунки непараллелограммов);
- 3) выясняется, какие из них являются примерами, а какие – контрпримерами данного понятия (показывается, на каких рисунках изображен параллелограмм, приводится соответствующее объяснение), а на каких – непараллелограмм (также показывается, на каких рисунках изображен непараллелограмм, приводится соответствующее объяснение).

Конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный методы введения понятий широко применяются в школьной практике. Они лежат в основе методических схем введения многих понятий. Важно, чтобы начинающий учитель владел навыками применения этих методов.

2.3. *К методике введения аксиоматических определений.* Рассмотрим вопрос о введении аксиоматических определений в школе. Он традиционно связывается с курсом геометрии. При введении аксиом могут применяться оба указанных выше метода. Если факт, утверждаемый аксиомой, знаком учащимся, то целесообразно воспользоваться абстрактно-дедуктивным методом. Большинство геометрических аксиом выражают наиболее простые и наглядные факты, поэтому в развернутой форме конкретно-индуктивный метод при введении аксиом может применяться лишь в отдельных случаях.

Чрезвычайно полезно прибегать к таким применениям конкретно индуктивного метода, которые не требуют дополнительных (по сравнению с абстрактно-дедуктивным методом) затрат учебного времени.

Например, при ознакомлении с аксиомами расстояния можно провести такую беседу. Дети, понятие расстояния часто используется в качестве исходного для построения геометрии. Какими свойствами обладает расстояние между двумя точками? Можно ли его измерять? Назовите единицы измерения расстояний. (Дети называют: один сантиметр, один метр, один миллиметр, одна миля и т.д.) Ваши ответы правильные, но для геометрии в начале ее построения важно зафиксировать самое главное – существование единицы измерения. Поэтому в качестве первой аксиомы принимается следующая аксиома: существует расстояние между двумя точками, которое называется *единицей измерения* расстояний.

Далее спрашивается может ли расстояние между точками быть отрицательным, что можно сказать о расстояниях AB и BA . В итоге, опираясь на ответы учащихся, формулируются остальные аксиомы расстояния.

При введении аксиом, безусловно, необходимо использовать наглядный метод обучения – приводить правильные рисунки. Нельзя, например, вводя понятие расстояния между точками, иллюстрировать его с помощью рисунка, на котором изображена на местности извилистая дорога, соединяющая два некоторых пункта.

Рекомендуем студентам самостоятельно привести примеры аксиом, при изучении которых целесообразно воспользоваться каким-либо одним из указанных методов.

2.4. Ознакомление учащихся с видами определений. Нужно ли знакомить учащихся с такими общими понятиями как определение и виды определений? Безусловно, нужно. Причем необходимо иметь в виду, что формирование этих понятий не является одномоментным, а протекает длительное время, в разные периоды обучения. Особенно полезно ознакомить детей с понятием «определение через ближайший род и видовое отличие»: сообщить название этого вида определения, привести его примеры, пояснить структуру данного вида определения, полезно перед учащимися ставить такие задания: «Назовите в данном определении родовое понятие, назовите отличительные признаки этого понятия». В процессе появления нового вида определений целесообразно знакомить учащихся с логическими особенностями его, отличие от ранее известного вида.

2.5. Методика поэтапного формирования понятий. При формировании понятий целесообразно учитывать данные психологии. Об-

ратимся, например, к *теории поэтапного формирования умственных действий* (П.Я. Гальперина и др.). Эта теория применима, в частности, и к формированию понятий. Она предусматривает постепенный перевод внешних материализованных действий во внутренние, умственные, действия, протекающие в уме. Этот перевод совершается в несколько этапов.

На *первом этапе* учащиеся разъясняют цель введения нового понятия (определения), указывают, на что надо ориентироваться при формулировании данного определения. Например, при введении понятия параллелограмма такую ориентировку естественно дать с помощью рисунка параллелограмма. При этом учитель сообщает, что нарисованная фигура – параллелограмм и он будет определен как четырехугольник, который обладает некоторыми свойствами. Какими именно? В итоге формулируется определение.

На *втором этапе* учащиеся сами формулируют определение исходя из рисунка (вначале выполняется рисунок, затем проговаривается определение).

На *третьем этапе* учащиеся формулируют определение, пользуясь громкой (внешней) речью без опоры на рисунок.

На *четвертом этапе* определение проговаривается в форме внешней речи про себя, на пятом – в форме внутренней речи.

Во многих случаях эти этапы протекают почти слитно, не занимают много времени, выполняются с помощью традиционных методических приемов. Естественно, что учитель мотивирует изучение нового понятия (первый этап), приводит материальные объекты, с помощью которых формулируется определение. Полезно, когда ученик формулирует определение, одновременно показывая то, о чем он говорит, на рисунке (второй этап). Проговаривание определения вслух, без опоры на рисунок, модель и т.д. (третий этап), является важным для более быстрого формирования у учащихся навыков правильной математической речи. При подготовке учащимися домашних заданий полезно заучивать материал, если не вслух, то с помощью внешней речи про себя (четвертый этап). Этот этап важен с точки зрения более активного запоминания учебного материала. Из действий, совершаемых на третьем и четвертом этапах, не следует, что при формулировании определения параллелограмма нет никакой «опоры на наглядность». В данном случае она есть, но рисунок параллелограмма представляется учащимися мысленно. На этих этапах крайне полезно напоминать учащимся, чтобы они мысленно представляли себе тот объект, который ими определяется. В таком случае

третий и четвертый этапы окажут неоценимую услугу в развитии пространственного представления и воображения учащихся.

Проблемное задание. В соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий опишите введение понятия равных треугольников. Позаботьтесь о краткости, экономности введения этого понятия. Какие этапы будут реализованы в классе? В какой форме ученики должны выполнить домашнее задание, чтобы при этом были пройдены все остальные этапы? Нужно ли всех учащихся «пропускать» на уроке через каждый этап?

2.6. Принцип варьирования. Одна из практических рекомендаций психологии усвоения понятий состоит в необходимости варьирования несущественных признаков понятия (*принцип варьирования*). Варьирование несущественных признаков (при сохранении существенных) призвано более рельефно выделить существенные признаки и сформировать тем самым научные понятия, без каких-либо искажений. Это варьирование необходимо как при конкретно-индуктивном, так и при абстрактно-дедуктивном методе.



Рис. 8.7

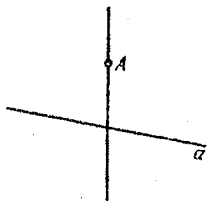


Рис. 8.8

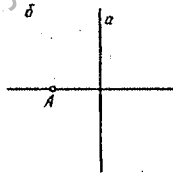
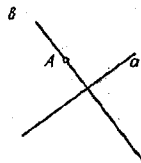


Рис. 8.9



Отсутствие необходимых вариаций часто приводит к формированию неправильных представлений о понятии. Например, если на уроках в VI классе при построении прямой, проходящей через данную точку A перпендикулярно к данной прямой a , прямая все время выбирается горизонтальной (рис. 8.7), то и в случае, когда она не является горизонтальной, ученики все равно проводят перпендикуляр как вертикальную прямую (рис. 8.8). Варьирование расположения прямой a на плоскости (рис. 8.9, а-в) способствует формированию правильных представлений о данном понятии. Приведите пример варьирования несущественных признаков при ознакомлении учащихся с понятием коллинеарных векторов.

2.7. Учет других психологических законов. При изучении понятий важно учитывать и другие психологические закономерности восприятия: закон избирательности восприятия, закон зависимости восприятия целого от характера воспринимаемых частей, закон аппер-

цепции и закон контраста ощущений и восприятий. Напомним суть каждого закона.

Закон избирательности восприятия требует, чтобы при изложении учебного материала главная часть его была фигурой восприятия, а второстепенная – фоном. *Закон зависимости восприятия целого от характера воспринимаемых частей*: необходимо следить, чтобы целевые установки, планы изложения, иллюстрации, дополнительные разъяснения и тому подобное относились только к главному. В противном случае у учащихся может возникнуть ложное впечатление о значимости вспомогательного материала, об учебном материале в целом.

Закон апперцепции (восприятия через призму собственного опыта) состоит в следующем: необходимо учитывать предварительные знания учащихся, однако не следует опускаться до уровня этих знаний, целесообразно лишь исходить из них. Согласно *закону контраста ощущений и восприятий*, усиление восприятия может быть обеспечено контрастностью в исполнении графического материала (толстые и тонкие, непрерывные и прерывистые, прямолинейные и криволинейные линии), в расположении записей (линейные записи и записи столбцом, колонками), в рассмотрении пар таких понятий, как «параллельно» – «непараллельно», «равно» – «неравно», «следует» – «не следует» и т. п.

2.8. Крупноблочное введение определений. Лучшему восприятию, запоминанию и воспроизведению группы определений (см. технологию крупноблочного изложения – метод срезов) способствует использование логико-структурных схем, иллюстрирующих связь между понятиями (эти связи устанавливаются при построении определений). Например, при изучении темы «Четырехугольники» в VIII классе полезно воспользоваться схемой, приведенной на рис. 8.10, а. Имея перед своими глазами такую схему, учащиеся видят родовое понятие и безошибочно формулируют определения всех шести понятий.

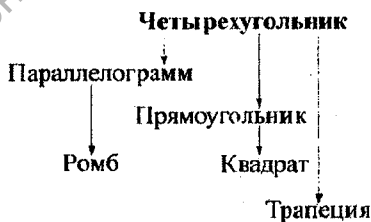


Рис. 8.10, а

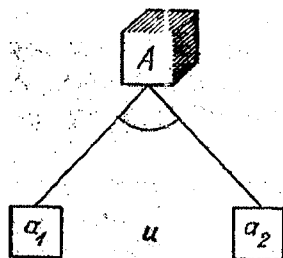


Рис. 8.10, б

2.9. Анализ логической структуры определения. Усвоению сложных в структурном отношении определений помогает анализ логической структуры определений. В некоторых случаях логическая структура определения может быть представлена схематично, в обобщенном виде.

Например, понятие геометрического места точек определяется как геометрическая фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Если данное понятие обозначить буквой A , а характеризующие его свойства – a_1 и a_2 , то логическая структура определения может быть представлена в виде схемы, приведенной на рис. 8.10, б. На схеме наглядно показано, что данное понятие характеризуется двумя свойствами и эти свойства связаны конъюнктивной связью. Пользуясь такой схемой, легче формулировать определение.

Необходимо иметь в виду, что каждое определение вводит в употребление два *взаимно обратных предложения*. Рассмотрим, например, определения прямоугольника: «Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые». Этим определением вводятся следующие два предложения: 1) если фигура является прямоугольником, то эта фигура есть параллелограмм, у которого все углы прямые; 2) если фигура является параллелограммом, у которого все углы прямые, то эта фигура есть прямоугольник. Таким образом, в данном определении подразумевается эквиваленция: фигура является прямоугольником тогда и только тогда, когда эта фигура есть параллелограмм, у которого все углы прямые.

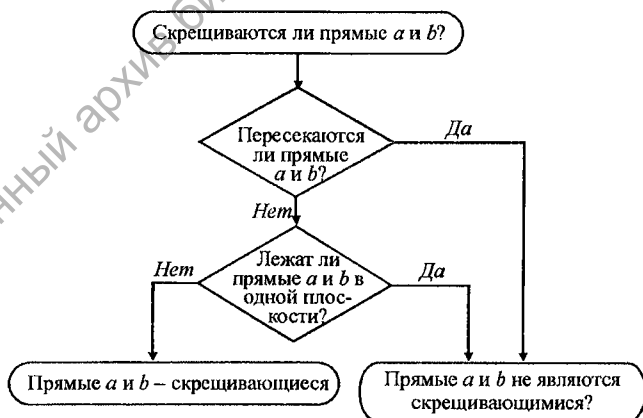


Рис. 8.11

2.10. *Алгоритмы распознавания понятий.* Выяснению структуры определений способствуют упражнения на построение схем алгоритмов распознавания понятий. Пример такой схемы приведен на рис. 8.11.

2.11. *Использование технических средств.* Оперативному введению понятий, экономии времени, затрачиваемого на изучение понятий и их определений, способствует применение технических, включая компьютерных, средств обучения.

Особенно полезно, если эти средства носят интерактивный характер. На рисунке 8.12 приводится страница электронного учебника, снабженная графической интерактивной моделью: на рисунке выделена активная точка, «цепляясь» за которую курсором, можно показать различные положения луча OC и тем самым – различные примеры смежных углов.

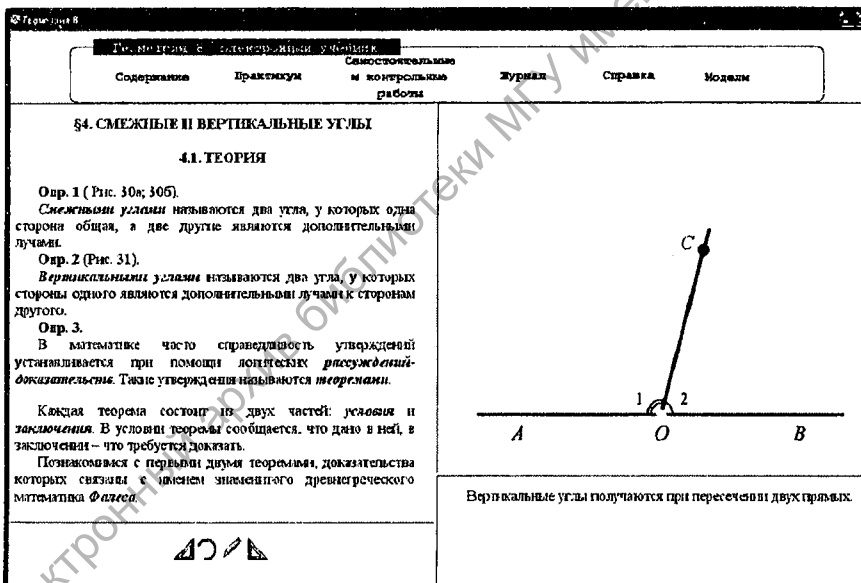


Рис. 8.12

2.12. *Математические диктанты и тесты.* В целях обучения и контроля при изучении определений применяются математические диктанты и тесты.

Приведем пример математического диктанта: «Прямоугольник — это..., у которого все углы прямые; ... — это параллелограмм, у которого все углы прямые»; прямоугольник — это параллелограмм, ...».

Тест, связанный с изучением этого понятия, может быть таким: «Обведите кружком номер предложения, которое является определением прямоугольника:

- 2) прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые;
- 3) диагонали прямоугольника равны».

Приведите свои примеры математических диктантов и тестов, которыми можно воспользоваться при изучении определений.

2.13. Применение понятий. Необходимо иметь в виду, что процесс формирования понятий не оканчивается их введением. Он продолжается при использовании этих понятий для определения других понятий, формулировании теорем, проведении доказательств, решении задач. Большую роль при этом играют *действия подведения под понятия и выведения следствий*, которые, как утверждают психологи, адекватны деятельности по усвоению понятий.

Например, решается следующая задача: «При пересечении двух прямых образовались четыре угла, каждый из которых меньше развернутого. Разность двух из них равна 20° . Найдите все четыре угла» (V класс). При решении этой задачи выполняются следующие действия: 1) приводят рисунок; 2) на рисунке пытаются обнаружить два угла, разность которых известна; 3) для дальнейшего решения задачи отмечают, что эти два угла являются смежными; 4) далее пользуются свойством смежных углов (тем, что их сумма равна 180°); 5) больший угол представляют как сумму меньшего угла и угла в 20° ; 6) после этого записывают равенство $\angle 1 + \angle + 20^\circ = 180^\circ$; 7) отсюда получают, что величина меньшего угла равна 80° ; 8) находят больший угол: он равен 180° ; 9) находят остальные два угла.

Охарактеризуем выполненные действия. Действиями 1 и 2 выполняемый рисунок подводится под условие задачи (задачу можно рассматривать как неявное определение тех величин, о которых в ней говорится). Действием 3 изображенные на рисунке углы подводятся под определение смежных углов. Действием 4 выводится следствие: «Если эти углы смежные, то их сумма...». Действие 5 — действие по выведению следствия из определения разности. Остальными действиями также выводятся следствия (укажите, из чего).

2.14. Другие методические схемы (модели) введения понятий. На основании приемов и методов, описанных в данной теме, могут быть составлены различные методические схемы (модели) изучения понятий.

Например, изучение понятия может быть проведено по такой схеме:

- 1) анализ эмпирического материала;
- 2) математизация эмпирического материала – построение определения;
- 3) составление алгоритма распознавания понятия;
- 4) включение понятия в систему понятий.

Рекомендуем читателю составить некоторые другие схемы изучения понятий.

2.15. Типичные ошибки и их предупреждение. Важным вопросом методики является изучение типичных (наиболее распространенных) ошибок учащихся при формулировании определений и путей предупреждения и исправления их.

Рассмотрим примеры таких ошибок. Поскольку определения через ближайший род и видовое отличие являются самыми распространенными в школьном курсе, то наибольшее количество ошибок связано именно с ними.

1. *Ошибка «слишком широкого определения».* Эта ошибка связана с расширением объема определяемого понятия. Такое расширение может произойти за счет нарушения требования, что род должен быть ближайшим. Использование более общего родового понятия приводит к тому, что в объем определяемого понятия попадают не только определяемые объекты, но и совсем посторонние, не относящиеся к нему.

Например: «Параллелограмм – это многоугольник, противоположные стороны которого параллельны». Для обнаружения и исправления ошибки достаточно привести один контрпример. Шестиугольник, изображенный на рис. 8.13, подходит под «определение», данное учеником, но не является параллелограммом. Вывод: определение сформулировано неправильно. Где ошибка?

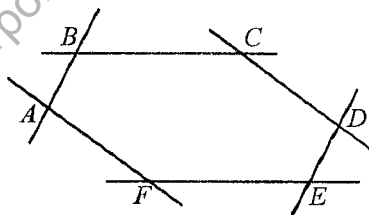


Рис. 8.13

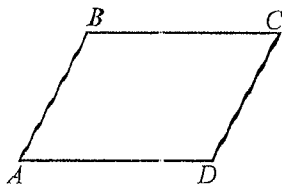


Рис. 8.14

Более широкое определение получается также за счет опускания части видовых отличий.

Приведем пример ошибки такого типа: «Диаметр окружности есть отрезок прямой, соединяющий две точки окружности». В этом «определении» понятия диаметра произошло расширение объема определяемого понятия. В него входят не только диаметры, но и любые хорды вообще, поэтому нельзя отличить диаметр от других хорд. Ошибка исправляется приведением контрпримера.

К расширению объема определяемого понятия (по аналогичной причине) приводят и такие ученические «определения»: «Угол, больший прямого, называется тупым» (по аналогии с определением острого угла); «Два уравнения называются равносильными, если все корни первого являются корнями второго уравнения», «Квадратным уравнением называется уравнение, которое содержит переменную во второй степени».

2. *Ошибка «слишком узкого определения»*, при которой в качестве видового отличия берется отличительный признак не вида, а подвида. Объем определяющего понятия оказывается уже объема определяемого.

Например: «Параллелограмм – это четырехугольник с равными сторонами». В целях исправления ошибки необходимо привести не контрпример, а, наоборот, пример параллелограмма. Полезно нарисовать «вытянутый» параллелограмм (рис. 8.14) и спросить учащихся:

- Параллелограмм это или нет?
- Параллелограмм.
- А подходит он под «определение», данное учеником?

Выясняется, что не подходит, после чего формулировка определения уточняется.

3. *Тавтология* в определении – ошибка, при которой понятие определяется через себя.

Например: «Геометрия – это наука, которая изучает геометрические фигуры». Учащимся полезно привести ленинские слова по поводу такого рода определений: «Масло масляное». В таких случаях учащимся необходимо еще раз разъяснить смысл и назначение определений.

Приведем возможные примеры других «ученических» тавтологий: «Равными треугольниками называются такие треугольники, которые равны друг другу», «Подобными называются такие фигуры, которые подобны друг другу», «Делением называется действие, при котором одно число делят на другое».

Безусловно, важно не только исправить ошибку, сделанную учеником, но и разъяснить смысл этой ошибки.

4. *Круг в определении*: при определении понятия используют другое понятие, которое, в свою очередь, определяется с помощью первого.

Например, встречаются такие «определения», сформулированные учащимися: 1) «Прямыми углами называются углы, которые получаются при пересечении перпендикулярных прямых», «Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом»; 2) «Иррациональными числами называются действительные числа, не являющиеся рациональными», «Действительные числа – это рациональные и иррациональные числа»; 3) Иногда ученик сумму чисел определяет через сложение, а сложение через сумму; 4) При введении понятия длины окружности утверждается, что «Последовательность периметров правильных вписанных в окружность многоугольников ограничена сверху длиной окружности». В подобных случаях надо сопоставить пару «определений», разъяснить суть ошибки.

5. *Избыточные определения*. Например: «Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны». Такая ошибка объясняется тем, что учащиеся (при недостаточной активизации обучения) сами не строят систему понятий. Иногда определение заучивается механически. Поэтому учащиеся могут не обратить внимание на то, какие признаки предмета положены в основу его определения, а какие – доказывались. Такого рода ошибка может служить поводом для уточнения определения. К учащимся необходимо обратиться с вопросами:

- Все ли правильно в этой формулировке?
- Нет ли здесь лишнего признака? (В данном случае избыточный признак есть, но он не приводит к искажению понятия.)

6. *Ошибка в указании родового признака, при которой объемы определяемого и родового понятий оказываются непересекающимися*.

Например, медиану треугольника определяют не через понятие «отрезок», а как «прямую, соединяющую вершину треугольника с серединой противоположной стороны». Но медиана треугольника не прямая, а отрезок. Заметим также, что распространенное выражение «прямая, соединяющая две точки» не является корректным (прямая не «соединяет» две точки, она проходит через эти точки, а две точки можно соединить отрезком, ломаной, дугой окружности, дугой какой-либо другой кривой линии).

3. Задания для практических и лабораторных работ

Задание 1. Приведите примеры совершения ошибок при формулировании определений. Разъясните суть каждой ошибки. (Ознакомьтесь с работой Брадиса В.М., Минковского В.Л., Харчевой А.К. Ошиб-

ки в математических рассуждениях. — М.: Просвещение, 1967. — 191 с). Проанализируйте причины ошибок. Какими приемами их можно предупредить и устранить?

Задание 2. Приведите примеры применения приведенных выше методических приемов и методов изучения понятий и их определений (части этого задания могут быть распределены между различными группами студентов).

Задание 3. Приготовьте деловую игру по введению некоторых понятий на уроке (понятия выберите по указанию вашего преподавателя).

Тема 9

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

1. Теорема и доказательство (сведения из логики)
2. Методика обучения теоремам и доказательствам
3. Задания для практических и лабораторных работ

1. Теорема и доказательство (сведения из логики)

Математика, в отличие от многих других научных предметных областей, характеризуется построением теории, составной частью которой являются теоремы и доказательства. В математике *аксиомы* и *теоремы* рассматриваются обычно как истинные предложения. Разъяснение понятий «аксиома», «определение», «теорема», «доказательство» проводится в начале курса геометрии. В средней школе чаще ограничиваются интуитивным описанием этих понятий. В логике уточнение понятия «теорема» достигается с помощью понятия «доказательство». *Доказательством* называют конечную последовательность предложений данной теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или нескольких предыдущих предложений этой последовательности по правилам логического вывода. (См. об этом в книге: Столла Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — С. 142).

После этого *теорема* определяется как предложение, которое является последним в каком-либо доказательстве.

Предложения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ называются *взаимно обратными*.

Предложения $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow \bar{B}$ называются *взаимно противоположными*.

Предложение $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ называется *обратным противоположному* (или *противоположным обратному*).

Пары предложений: прямое и обратное противоположному, обратное и противоположное одновременно истинны или ложны. Поэтому, если прямое и обратное предложения являются теоремами, то теоремами являются и два других предложения. В силу указанной эквивалентности предложений из четырех названных предложений представляет интерес рассматривать только прямые и обратные предложения. Соответственно этому – прямые и обратные теоремы.

Пример 1. Для теоремы о смежных углах обратное предложение будет следующим: если сумма двух углов равна 180° , то эти углы являются смежными. Нетрудно видеть, что обратное предложение не справедливо и поэтому оно не является теоремой.

Пример 2. Теорему о смежных углах можно сформулировать таким образом, что условие ее окажется составным: если два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами, то сумма таких углов равна 180° . В этом случае можно сформулировать несколько обратных предложений.

Обратное предложение 1. Если сумма двух углов равна 180° , то эти два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами.

Обратное предложение 2. Если сумма двух углов равна 180° , они имеют общую сторону, то две другие являются дополнительными лучами.

Обратное предложение 3. Если сумма двух углов равна 180° , две стороны этих углов являются дополнительными лучами, то эти углы имеют общую сторону.

Убедитесь в том, что все эти обратные предложения не являются справедливыми (для этого достаточно привести соответствующий пример) и, следовательно, не являются теоремами.

Пример 3. Теорему о смежных углах можно сформулировать таким образом, что условие ее окажется еще более составным: если два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами, расположенными по разные стороны от прямой, содержащей общую сторону, то сумма таких углов равна 180° .

В этом случае количество обратных предложений увеличиться. Одно из обратных предложений можно сформулировать таким образом: если сумма

двух углов равна 180° , они имеют общую сторону, две другие стороны расположены по разные стороны от прямой, содержащей общую сторону, то эти две стороны являются дополнительными лучами.

Убедитесь в том, что это обратное предложение является справедливыми и, следовательно, является теоремой.

Если имеет место теорема « $A \Rightarrow B$ », то говорят, что B является *необходимым условием* для A , а A – *достаточным условием* для B .

Если имеют место теоремы и , то говорят, что каждое из и является необходимым и достаточным для другого.

Пример 1. Теорему Пифагора можно сформулировать в форме предложения «если..., то...»: если треугольник – прямоугольный, то квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Условие теоремы Пифагора: треугольник – прямоугольный.

Заключение теоремы Пифагора: квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Пример 2. Предложение « $AC^2 = AB^2 + BC^2$ » является необходимым для предложения « $\triangle ABC$ – прямоугольный, AC – гипотенуза, AB и BC – катеты».

Пример 3. Предложение « $\triangle ABC$ – прямоугольный, AC – гипотенуза, AB и BC – катеты» является достаточным для предложения. « $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ».

Пример 4. Предложение « $AC^2 = AB^2 + BC^2$ » является необходимым и достаточным для предложения « $\triangle ABC$ – прямоугольный».

Пример 5. Предложение « $\triangle ABC$ – прямоугольный» является необходимым и достаточным для предложения « $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ».

Логические связи между теоремами устанавливаются с помощью доказательства. С помощью доказательств строится система теорем.

Каждое доказательство можно представить в виде цепочки рассуждений или конечной последовательности предложений. Различают два вида доказательств: *прямое* и *косвенное*.

Предлагаем читателю самостоятельно охарактеризовать логические особенности прямых и косвенных доказательств (см. [34, 35]).

2. Методика обучения теоремам и доказательствам

Как знакомить учащихся с теоремами? Методика ознакомления с теоремами во многом аналогична методике ознакомления с понятиями и их определениями.

2.1. Конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный методы введения теорем. При введении теорем, как и при введении понятий, используются два метода: конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный. (Эти методы широко применяются в дальнейшем и лежат в основе методических схем изучения многих теорем.) В первом случае теорема в готовом виде не сообщается, проводится специальная работа по «подведению» учащихся к теореме, обнаружению соответствующей математической закономерности. Итогом этой работы является формулирование изучаемой теоремы.

Рекомендуем использовать три вида конкретно-индуктивного метода введения теорем.

Первый вид: теорема в готовом виде не сообщается, организуется диалог по «подведению» учащихся к теореме (с использованием средств наглядности, постановки учебной цели, проблемы-задания). Для этого вида конкретно-индуктивного метода характерно, что обнаружение соответствующей математической закономерности проводится с помощью эмпирических методов — наблюдения, электронного эксперимента и т.д. Результатом этого диалога является формулирование изучаемой теоремы.

Второй вид: теорема также в готовом виде не сообщается, также организуется диалог по «подведению» учащихся к теореме (с использованием средств наглядности, постановки учебной цели, проблемы-задания). Но обнаружение математической закономерности проводится не с помощью наблюдения и электронного эксперимента, а с помощью рассуждений, доказательного характера. Результатом этого диалога является формулирование теоремы и изложение ее доказательства (теорема формулируется после доказательства).

Третий вид: учащимся предъявляется определенная математическая ситуация, с помощью эмпирических и логических методов формулируется ряд относящихся к ней предложений. Далее выясняется, можно ли с помощью, первого предложения доказать остальные, если это оказывается невозможным, то к первому предложению присоединяют второе и выясняют, можно ли из этих двух предложений вывести остальные, доводят этот процесс до логического завершения. После этого с помощью исходных предложений формулируется определение понятия, а остальные предложения — представляются в виде теорем. Наделение того или иного предложения «статусом» теорема здесь происходит в соответствии

с определением понятия «теорема», принятым в логике (см. начало данного пункта).

Отметим, что электронные средства наглядности в силу их большей выразительности, дают возможность сократить словесную часть диалога и сделать диалог более экономным по затратам времени.

Абстрактно-дедуктивный метод введения теоремы начинается с того, что учитель сам формулирует эту теорему, а затем проводится работа по уточнению смысла данной теоремы, ее условия и заключения, построению чертежа и т.д.

Очевидно, что выбор метода введения теоремы должен быть нацелен на оптимизацию системы методов обучения. При этом надо учитывать не только временные затраты, но и получаемые результаты обучения. Необходимо иметь в виду, что применение конкретно-индуктивного метода часто не требует (или почти не требует) дополнительных затрат времени по сравнению с абстрактно-дедуктивным методом. Например, учитель нарисовал на доске параллелограмм, провел его диагонали и ставит перед учащимися вопрос: «Как делятся диагонали точкой их пересечения?» Ответ на этот вопрос приводит к формулировке соответствующей теоремы. Рекомендуем читателю подобрать свой пример применения конкретно-индуктивного метода введения теоремы, который был бы экономным по затратам времени.

2.2. Воспитание потребности в доказательствах. Общеизвестно, что учащиеся особенно в начале систематического курса геометрии затрудняются в усвоении доказательств, нередко заучивают их механически, не осознают необходимости доказательств. Эти затруднения в большей мере являются следствием сложившейся практики обучения, в которой не выдерживается постепенность в переходе от индуктивных методов обоснования предложений, используемых учащимися преимущественно в курсе математики 5-6-х классов, к дедуктивным, встречающимся им впервые при изучении геометрии. Сказывается также недостаточное внимание к доказательствам в 5-6-х классах, отсутствие в этих классах должной пропедевтики доказательств. Положение осложняется еще и тем, что в школе, как правило, недостаточно внимания уделяется выяснению сущности доказательства, его преимуществ – общности, точности и объективности. (Подробное изложение общности, точности и объективности доказательства содержится в книге Ф.Ф. Притуло

«Методика изложения геометрических доказательств в средней школе», Учпедгиз, 1958.)

Учащиеся вначале изучения геометрии вынуждены почти с первых уроков проводить доказательства, имея о них еще весьма смутное представление. Поэтому актуальной является такая организация работы с учащимися, когда они убеждаются в необходимости и ценности доказательств и тем самым создаются необходимые условия для должного отношения к доказательствам и сознательного усвоения их.

Пример 1. Игра домино, аксиомы и доказательства. Учащимся сразу сообщается, что математические предложения бывают трех видов: аксиомы, определения и теоремы. Важно подчеркнуть, что аксиомы – это исходные предложения, исходные правила рассуждений. Они используются не только в математике и не только математиками. Пользуясь рассказом и беседой, можно разобрать игру домино, ее исходные правила, составить таблицу всех 28 домино:

06 05 04 03 02 01 00

16 15 14 13 12 11

26 25 24 23 22

36 35 34 33

46 45 44

56 55

66

Далее следует сообщить учащимся, что в связи с различными играми можно рассматривать интересные математические задачи.

Задача. Предположим, что по завершению игры в домино, когда, были выложены все 28 домино, на левом конце оказалось домино 34 (начинающееся с трех очков): 34 45 53 33 31 16..... На правом конце оказалось домино, заканчивающееся также тремя очками. Случайно это или закономерно? Обоснуйте свой ответ.

При изложении соответствующих рассуждений целесообразно воспользоваться методом беседы. Вопросы, направляющие беседу: Сколько всего домино с тремя очками, сколько всего квадратиков с тремя очками? Какое число домино с квадратиком из трех очков может встретиться внутри ряда, четное или нечетное? Если общее число таких квадратиков четное и число квадратиков, расположенных внутри ряда также четное, то какой вывод можно сделать, сколькими очками будет заканчиваться домино, стоящее в правом конце ряда?

По завершению доказательства важно подчеркнуть его особенности: оно опирается на небольшое число исходных правил игры,

играющих роль аксиом этой игры, освобождает от необходимости непосредственно выкладывать все домино и смотреть какое из них окажется на правом конце.

Полезно сравнить возможности доказательства и эксперимента. Конечно, можно было бы поэкспериментировать, попытаться несколько раз выложить весь ряд из 28 домино и экспериментально убедиться в том, что если левый конец начинается с трех очков, то правый конец будет заканчиваться тремя очками. Возможно, такой эксперимент и представляет интерес. Хотя согласитесь, что он потребует немало времени. Кроме того, исчерпывающего ответа он не дает. Вдруг на некотором 25-ом эксперименте окажется не так и кажущаяся закономерность сразу разрушится. Рассуждение на основании правил игры обладает совсем другими свойствами. Такое рассуждение показывает, что подобная закономерность, без всяких сомнений, имеет место всегда. Правила игры здесь играют роль **аксиом**, а рассуждение на их основе — роль **доказательства**. В итоге беседы делается вывод о том, что аксиомы используются многими людьми и не только математиками.

Пример 2. Воспитание потребности в доказательстве на математическом материале. С помощью подобранных упражнений имеется возможность убедить учащихся в необходимости использования доказательства с целью обоснования предложений; создать условия, побуждающие учащихся самих обращаться к доказательству как к средству обоснования.

Первой серьезной беседе о доказательстве рекомендуется предпослать несколько задач, аналогичных следующим.

Задача 1. Из точки B , взятой вне круга, проведены прямая BA (рис. 9.1), проходящая через центр круга, и прямая BC , не проходящая через центр. Точки C и D — ближайшие к B точки встречи этих прямых с окружностью. Установить, что отрезок BC больше отрезка BD .

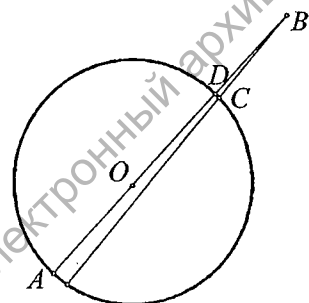


Рис. 9.1

Задача предлагалась на готовом чертеже, причем точки C и D располагали достаточно близко друг к другу. Непосредственно из рисунка 9.1 при сравнении отрезков BC и BD «на глаз» нельзя прийти к требуемому в задаче выводу.

Допустим, что учащиеся предлагают установить справедливость утверждения задачи

путем измерения отрезков BD и BC линейкой или циркулем. Производя необходимые измерения, они приходят к выводу, что в этом случае измерения точного ответа не дают. Возникает необходимость, не прибегая к измерениям, установить истинное соотношение между отрезками BC и BD .

Предлагаем учащимся выяснить этот вопрос с помощью рассуждений и приводим доказательство, воспринимаемое ими как нечто необходимое. Обращаем внимание на то, что для решения задачи оказалось достаточным знание двух предложений:

- 1) отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы, следовательно, $OC + CB > OB$;
- 2) если от неравных величин отнимем поровну, то большая величина останется большей, следовательно, $BC > BD$.

Далее учащимся разъясняется, что доказательство не связано с измерениями, при которых получают приближенные результаты, и поэтому дало точный ответ.

Говорим и о другом важном свойстве доказательства – его общности. Рассуждения, которые велись при доказательстве для отрезка BC , справедливы для всех отрезков такого вида.

После изучения свойства хорды круга, не проходящей через центр, решались задачи на доказательство и построение, аналогичные задачам 2-4.

Задача 2. На диаметре AB (рис. 9.2) от точки A отложить отрезок AF , равный половине хорды CD , проведенной вблизи центра круга. Как расположена точка F относительно центра круга (совпадает, правее центра, левее)?

Вначале, как и выше, учащиеся убеждаются в недостаточности индуктивных средств для решения данной задачи, затем, при помощи учителя, проводят необходимые рассуждения.

Доказательство велось методом исключения. Поочередно предполагая, что точка F совпадает с центром круга, расположена правее его, вступали в противоречие с тем, что CD меньше диаметра AB . Остается: точка F лежит левее центра круга.

В ряде задач построения «на глаз», подбором, к чему обычно склонны учащиеся шестых классов, явно не рациональны. Решая такие задачи, учитель старается убеждать учащихся в целесообразности предположений тем или иным построениям некоторые рассуждения. Обоснования выполняемых построений вполне сильны шестиклассникам и служат хорошими упражнениями в проведении доказательств. Остановимся подробнее на одной такой задаче.

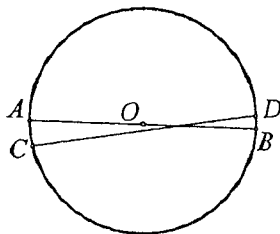


Рис. 9.2

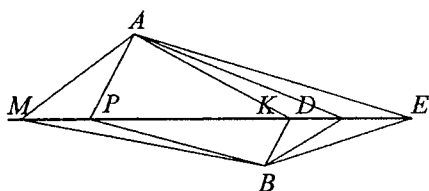


Рис. 9.3

Задача 3. Даны прямая MN и точки A и B , лежащие по разные стороны этой прямой. На прямой MN найти такую точку C , чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей.

Между учителем и учащимися может состояться беседа примерно следующего содержания.

Учитель. Пусть D – точка прямой MN (рис. 9.3). Точка D будет искомой точкой, если сумма отрезков AD и DB наименьшая. Возьмем несколько точек E, F и т. д. прямой MN правее точки D . Сравним сумму отрезков AE и BE с суммой отрезков AD и DB .

Ученик. Сумма отрезков AE и BE больше суммы отрезков AD и DB , так как видно, что AE больше, чем AD , и BE больше BD .

Учитель. Тогда может ли точка C лежать правее точки D ?

Ученик. Нет, так как тогда будут получаться суммы, большие суммы отрезков AD и DB .

Учитель. Может быть, искомая точка C совпадает с наугад выбранной точкой D ?

Ученик. Нет. Если взять точку K левее точки D , то сумма отрезков AK и KB будет меньше суммы отрезков AD и DB .

Другой ученик. Можно выбрать точку P левее точки D так, что сумма отрезков AP и PB будет больше суммы отрезков AD и DB . Для точек, расположенных левее точки P , это соотношение также будет справедливо. Значит, точка C не может быть левее точки P .

Учитель. Итак, искомая точка C должна лежать между точками P и D . Где именно? (Сужая отрезок PD , учащиеся подбором определяют положение точки C .)

Учитель. Оставим задачу прежней. Изменим лишь положение точек A и B . Нельзя ли, не проделывая работу по подбору точки C снова, указать более рациональный, более точный способ нахождения ее?

Нам надо найти точку C на прямой MN такую, чтобы ломаная линия ACB была кратчайшей. Вспомните, отрезок какой линии самый короткий из всех линий, соединяющих точки A и B .

Ученик. Отрезок прямой AB .

Учитель. Какое построение нужно выполнить, чтобы получить искомую точку C ? Свою догадку постарайтесь обосновать.

Ученик. Надо соединить точки A и B отрезком. Точка пересечения отрезка AB и прямой MN есть искомая точка C . Сумма отрезков AC и CB – наименьшая. Задача решена.

Учитель. Мы рассмотрели два способа нахождения точки C . Первый заключается в том, что точка C находилась подбором. Второй был основан на использовании свойства отрезка быть короче всякой линии, соединяющей его концы. Какой из этих способов кажется вам более рациональным?

Ученик. Второй способ лучше, так как он указывает построение, с помощью которого точка C находится сразу, независимо от расположения точек A и B .

Учитель. Правильно. Но второй способ обладает еще одним преимуществом: положение точки C с его помощью определяется точно.

Задача 4. Отрезок AB пересекает окружность в двух точках. Найти на окружности точку C такую, чтобы отрезок, равный сумме отрезков AC и CB , был наименьшим. Сколько таких точек существует?

Задача имеет два решения: искомыми точками являются точки пересечения окружности и отрезка AB . От учащихся требуется «замечить» эти точки и доказать, что только они удовлетворяют условию задачи.

Приводя примеры, иллюстрирующие достоинства доказательства и недостаточность индуктивных средств в целях обоснования, необходимо следить за тем, чтобы у учащихся не сложилось чрезмерное недоверие к индуктивным средствам. Необходимо разъяснить им: почему измерения на данных чертежах не позволяли получить точного ответа, показать, что, варьируя чертеж, можно привести его к такому, на котором даже глазомер подсказывает верный вывод.

2.3. Разъяснение учащимся сущности доказательства. Как объяснить учащимся сущность доказательства? Доказательство теоремы представляет собой *цепочку рассуждений*. Обратимся, например, к доказательству следующей теоремы:

«Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм» (рис. 9.4).

Доказательство

И рассуждение

Вертикальные углы равны (ранее доказанная теорема).

Углы AOD и COB при вершине O – вертикальные (по определению).

Следовательно, $\angle AOD = \angle COB$.

И рассуждение

Два треугольника равны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника (первый признак равенства треугольников).

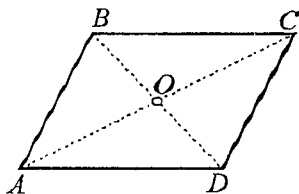


Рис. 9.4

В $\triangle AOD$ и $\triangle COB$ $OD=OB$, $OA=OC$ (по условию), $\angle AOD = \angle COB$ (заключение рассуждения I).

Следовательно, $\triangle AOD = \triangle COB$.

III рассуждение

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы (ранее доказанный факт).

$\triangle AOD = \triangle COB$ (заключение рассуждения II), $\angle OBC$ и $\angle ODA$ лежат в равных треугольниках против равных сторон.

Следовательно, $\angle OBC = \angle ODA$.

IV рассуждение

Если внутренние накрест лежащие углы при прямых AD , BC и секущей BD равны, то прямые AD и BC параллельны (ранее известный факт).

$\angle OBC$ и $\angle ODA$ – внутренние накрест лежащие углы при прямых AD , BC и секущей BD ; $\angle OBC = \angle ODA$ (заключение рассуждения III).

Следовательно, $AD \parallel BC$.

С помощью рассуждений V – VIII аналогичным образом получаем, что $AB \parallel DC$.

IX рассуждение

Если в четырехугольнике противолежащие стороны параллельны, то такой четырехугольник – параллелограмм (на основании определения параллелограмма).

В четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$.

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство завершено.

Несмотря на то что запись доказательства в виде цепочки рассуждений в учебниках не практикуется, тем не менее полезно, чтобы за весь период обучения в школе учащиеся знакомились хотя бы с 3–4 примерами такого представления доказательства. Эти примеры помогут уточнить понятие доказательства, его сущность. Доказательство при этом можно охарактеризовать как цепочку последовательных рассуждений, которая позволяет сделать логический переход от условия к заключению теоремы.

Таблица 9.1

**Представление доказательства
в виде конечной последовательности предложений**

№ п/п	Предложения	На основании
1	$\angle AOD = \angle COB$	Свойства вертикальных углов
2	$OD = OB, OA = OC$	Условия
3	$\triangle AOD = \triangle COB$	Пп. 1, 2 и первого признака равенства треугольников

№ п/п	Предложения	На основании
4	$\angle OBC = \angle ODA$	П. 3 и определения равных треугольников
5	$AD \parallel BC$	П. 4 и признака параллельности прямых
6	$AB \parallel DC$	Аналогичных рассуждений
7	$ABCD$ – параллелограмм	Пп. 5, 6 и определения параллелограмма

Рекомендуем читателю взять доказательство какой-нибудь теоремы и представить его в виде цепочки рассуждений.

Как было отмечено выше, запись доказательства в виде цепочки рассуждений не практикуется. В учебниках форма изложения доказательств ближе к представлению доказательства в виде *конечной последовательности предложений*. Например, предыдущее доказательство можно представить в виде таблицы 9.1.

Представление доказательства в виде конечной последовательности предложений является сравнительно кратким, при этом хорошо выделяется структура доказательства. Такая форма изложения доказательства также может быть использована для разъяснения учащимися его сути.

Рекомендуем читателю взять доказательство какой-нибудь теоремы и представить его в виде конечной последовательности предложений.

2.4. Структуризация доказательств как методический прием. Обычно в учебниках доказательства приводятся в более краткой, свернутой форме, без детализации некоторых шагов. Выделение шагов доказательства возможно на основе специального его анализа.

Приведем анализ доказательства признака параллелограмма: «Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник является параллелограммом».

1. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник и O – точка пересечения его диагоналей. Треугольники AOD и COB равны. (У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OD = OB$, $OA = OC$ по условию теоремы.)

2. Значит, углы OBC и ODA равны.

3. А они являются внутренними накрест лежащими углами при прямых AD , BC и секущей BD . Согласно признаку параллельности прямых, прямые AD и BC параллельны.

4. Параллельность прямых AB и CD доказывается с помощью равенства треугольников AOB и COD .

5. Теорема доказана.

Как видно, доказательство в учебнике также представляет собой конечную последовательность предложений, только эта последовательность менее детализирована. Разбиение доказательства на отдельные предложения – полезный прием не только разъяснения учащимся сути доказательств, но и прием, помогающий усвоению изучаемого в данный момент доказательства.

Рекомендуем читателю проделать аналогичную работу с 2–3 доказательствами из учебника геометрии.

2.5. Синтетический метод доказательства и синтетический метод поиска доказательства. Выше отмечалось, что доказательства бывают прямые и косвенные. Прямые доказательства, в свою очередь, делятся на синтетические и аналитические. Методические особенности этих доказательств различны. В чем они состоят? Исходным моментом синтетического доказательства является условие теоремы. На основе ранее известных предложений и законов логики условие теоремы постепенно преобразуется до тех пор, пока не приходят к заключению.

К достоинствам синтетического метода доказательства относятся: исчерпывающая полнота, сжатостью краткость (обычно он применяется при изложении уже разработанных математических теорий, известных доказательств или доказательств, отыскание которых не вызывает у учащихся затруднения).

Синтетический метод в методическом отношении имеет и свои *недостатки*. Остается неясным, как можно обнаружить такое доказательство, почему в рассуждениях поступают так, а не иначе; дополнительные построения никак не аргументируются; учащиеся, слушая или читая доказательство, воспринимают его пассивно, соглашаются с истинностью каждого умозаключения и не представляют, в каком направлении должны протекать дальнейшие рассуждения. Этот способ мало способствует самостоятельному открытию доказательства; идея, план рассуждений остаются скрытыми от учащихся.

Пример. Доказать, что если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник – параллелограмм.

Приведем краткую запись теоремы:

$$AB = DC, AD = BC \text{ (рис. 9.5).}$$

$ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство. Выполним дополнительное построение: проведем диагональ AC . Тогда:

1) ($AB = DC$, $BC = AD$, AC – общая)
 $\Rightarrow (\triangle ABC = \triangle CDA)$ – на основании третьего признака равенства треугольников;

2) ($\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = DC$) $\Rightarrow$
 $(\angle ACB = \angle CAD)$;

3) ($\triangle ABC = \triangle CDA$, $BC = AD$)
 $\Rightarrow \angle BAC = \angle ACD$ – на основании определения равенства двух треугольников;

4) п. 2 $\Rightarrow (BC \parallel AD)$;

5) п. 3 $\Rightarrow (AB \parallel DC)$ – на основании признака параллельности двух прямых;

6) (п. 4 и 5) $\Rightarrow (ABCD$ – параллелограмм) – на основании определения параллелограмма.

Обратите внимание на то, что здесь приводится еще одна форма представления доказательства в виде конечной последовательности предложений.

Компенсировать отмеченные дидактические недостатки синтетического метода доказательства помогают следующие методические приемы.

1. *Прием формулирования общего замысла (идеи) доказательства.* Замысел доказательства признака параллелограмма (по равенству его противоположных сторон) может быть высказан таким образом: для доказательства теоремы достаточно установить, что $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$, параллельность этих прямых может быть доказана с помощью одного из признаков параллельности прямых.

2. *Прием мотивировки дополнительных построений.* Для доказательства указанной теоремы мотивация может быть обеспечена так: чтобы получить накрест лежащие углы при прямых BC и AD , достаточно в качестве секущей взять диагональ AC .

3. *Прием приведения плана доказательства.* В рассмотренном выше примере доказательства он может состоять из следующих пунктов:

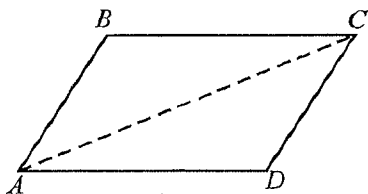


Рис. 9.5

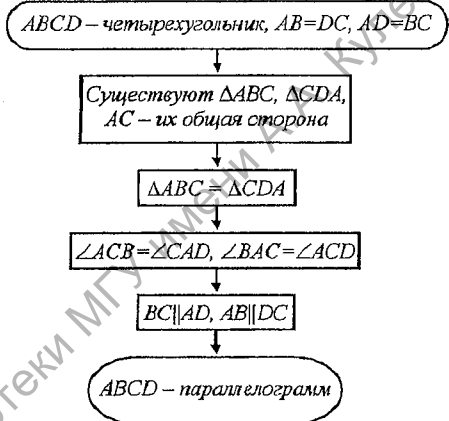


Рис. 9.6

1) доказать равенство треугольников ABC и CDA ;
2) доказать равенство накрест лежащих углов (на основании равенства треугольников);

3) доказать параллельность противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ (на основании равенства накрест лежащих углов).

4. Прием проведения доказательства с опорой на краткую его запись. Примерный вариант краткой записи доказательства приведен выше. Ценность краткой записи состоит в том, что она помогает «охватить» доказательство в целом, сделать более наглядной структуру рассуждений.

5. Прием составления блок-схемы доказательства.

По ходу изложения доказательства можно составить его блок-схему. На рис. 9.6 приведена блок-схема доказательства рассмотренного признака параллелограмма. Как и предыдущий прием, блок-схема доказательства помогает «охватить» доказательство в целом, сделать более наглядной структуру рассуждений.

6. Прием составления таблицы с двумя параллельными колонками: «Утверждение» и «На основании». Рекомендуем оформить доказательство теоремы о сумме углов треугольника в виде такой таблицы. (см. таблицу 9.1.)

Рекомендуем читателю разработать методику изучения синтетического доказательства какой-либо теоремы с использованием изложенных выше приемов.

7. Синтетический метод поиска доказательства. Эвристический процесс строится следующим образом. Обращаемся к условию теоремы и задаемся вопросом: «Зная то-то и то-то, какое следствие можно получить?» Этот вопрос повторяем до тех пор пока в качестве следствия не будет получено заключение теоремы.

2.6. Аналитические методы поиска доказательства. К ним относятся анализ Паппа и анализ Евклида.

Восходящий анализ (анализ Паппа). При поиске доказательства методом восходящего анализа отталкиваются от заключения теоремы и подбирают для него достаточные условия. В символической записи эвристический процесс методом восходящего анализа можно представить следующим образом. Пусть « $A \Rightarrow B$ » – данная теорема. Для заключения B подбираем достаточное условие A_1 , т.е. такое условие, что $A_1 \Rightarrow B$. Для A_1 , в свою очередь, находим достаточное условие A_2 : $A_2 \Rightarrow A_1$ и т.д. Подбор достаточных условий продолжается

до тех пор, пока для какого-либо A_i достаточным условием окажется условие теоремы, т.е. условие $A: A \Rightarrow A_1$. В итоге, доказательство теоремы завершается: $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_{i-1}, \dots, A_2 \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow B$. Следовательно, $A \Rightarrow B$.

Приведем поиск доказательства теоремы: «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник — параллелограмм» методом восходящего анализа.

1. Для доказательства того, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, достаточно доказать, что $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$. (A_1)

2. Для доказательства параллельности сторон четырехугольника достаточно доказать равенство накрест лежащих углов, образуемых при пересечении двух прямых третьей. (A_2)

3. Такие накрест лежащие углы можно получить, если провести диагональ AC : $\angle ACB$ и $\angle CAD$; $\angle BAC$ и $\angle ACD$. (A_3)

4. Для доказательства равенств $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle BAC = \angle ACD$ достаточно доказать равенство треугольников ABC и CDA . (A_4)

5. Для доказательства равенства треугольников ABC и CDA достаточно установить справедливость равенств: $AD = BC$, $AB = DC$, $AC = AC$, а эти равенства выполняются. (A)

Доказательство теоремы найдено.

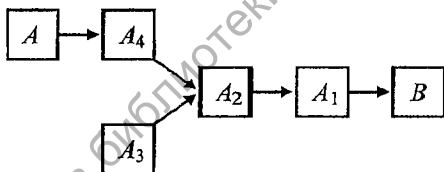


Рис. 9.7

Схематично поиск доказательства данной теоремы представлен на рис. 9.7.

Поиск доказательства методом восходящего анализа направляется, таким образом, двумя вопросами: «Что требуется доказать?» и «Что для этого достаточно знать?». Ход рассуждений, общая их направленность становятся более мотивированными, естественными.

Нисходящий анализ (анализ Евклида). При нисходящем анализе рассуждения также начинают с заключения теоремы, однако подбирают уже не достаточные, а необходимые условия. Выведение необходимых условий продолжают до тех пор, пока не придут к очевидному следствию, представляющему собой или условие теоремы, или

ранее изученное предложение. Если окажется возможным провести рассуждения в обратном порядке, при котором условие теоремы или очевидное предложение выступают отправной посылкой, то получим искомое доказательство.

Итак, пусть $A \Rightarrow B$ – данная теорема. Допустим, что из заключения теоремы B выводится следствие $B_1: B \Rightarrow B_1$, из B_1 , в свою очередь, – следствие B_2 и т.д.:

$$B \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots, B_{i-1} \Rightarrow B_i, B_i \Rightarrow A. \quad (1)$$

Цепочка рассуждений (1) представляет собой поиск доказательства – поиск с помощью анализа Евклида. Доказательство можно считать найденным, если эти рассуждения можно провести в обратном порядке:

$$A \Rightarrow B_i, B_i \Rightarrow B_{i-1}, \dots, B_2 \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B. \quad (2)$$

Цепочка рассуждений (2) является доказательством теоремы.

Еще раз подчеркнем смысл цепочки рассуждений (1): она не является доказательством теоремы, цель ее – чисто методическая – найти доказательство (2).

Если обратиться к рассмотренной выше теореме, то нисходящий анализ может быть проведен следующим образом:

1. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. (B)
 2. Тогда $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$. (B_1)
 3. Тогда $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей). (B_2)
 4. Из равенства этих углов с учетом того, что AC – общая сторона $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$, следует: $\triangle ABC = \triangle CDA$. (B_3)
 5. Тогда $AD = BC$, $AB = DC$, $AC = AC$. (A)
- Итак, $B \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, B_2 \Rightarrow B_3, B_3 \Rightarrow A$.

Нетрудно теперь эти рассуждения провести в обратном порядке. В итоге получим синтетическое доказательство.

Нисходящий анализ требует от учащихся значительной логической подготовки. Если не понимать недостаточность цепочки рассуждений (1) и обязательность перехода к цепочке рассуждений (2), то смысл применения данного метода утрачивается.

2.7. Система доказательств. Остановимся на вопросе о построении системы доказательств. Это построение может осуществляться двумя путями:

- 1) индуктивно устанавливаемый вначале факт подвергается затем доказательству, т.е. происходит поочередное «присоединение»

каждого отдельно взятого факта к уже имеющемуся «дедуктивному массиву» или «дедуктивному островку»;

2) индуктивно устанавливается сразу целая совокупность фактов, осуществляется их логическая организация и вся эта совокупность присоединяется к ранее построенному «дедуктивному массиву».

Первый из указанных путей является традиционным, второй – еще не нашел в школьной практике широкого применения. Заметим, что второй путь в большей мере придает обучению доказательствам черты исследовательского процесса и полнее соответствует требованиям современной дидактики.

2.8. Метод от противного. Обратимся к косвенному доказательству, который в школьной практике обычно оно называется методом от противного.

Доказательство теоремы $A \Rightarrow B$ методом от противного начинают с допущения, что из A не следует B : $A \Rightarrow B$. Тогда имеет место истинность предложения A и ложность предложения B (Пользуемся логической эквивалентностью: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.) Из предложения $(A \wedge \neg B)$ выводят следствие B_1 , из предложения B_1 – следствие B_2 и так далее, пока не получится следствие B , находящееся в противоречии либо с условием теоремы, либо с одним из ранее изученных предложений. Полученное противоречие означает, что допущение $A \Rightarrow B$ неверно, а, значит, верно предложение $A \Rightarrow B$. Следовательно, теорема $A \Rightarrow B$ доказана.

В своем формализованном виде схема доказательства методом от противного довольно непривычна для учащихся. С целью повышения доступности в учебнике могут использоваться различные приемы.

Прием 1. Использование игр, в которых требуется заменить некоторое понятие противоположным ему понятием. Например, один из играющих произносит предложения, содержащие слова «вверх», «вниз». Другой играющий должен пальцем указать противоположное направление.

Прием 2. Можно снять прямолинейность и категоричность первой фразы в доказательстве методом от противного. Обычно говорится: «Нам надо доказать, что прямые параллельны. Допустим, что эти прямые не параллельны». Более мягкая в психологическом отношении формулировка: «Нам надо доказать, что прямые параллельны. Посмотрим, что получится, к каким выводам можно придти, если хотя бы на время допустить, что эти прямые не параллельны».

Прием 3. Начав пользоваться методом от противного, мы выводим следствия из предложения (A и B). В этом предложении A – условие теоремы сохраняется без изменения. На чертеже же оно, неизбежно нарушается. Ученик, не искушенный в логических тонкостях, видит то, что видит: отрицается не только заключение теоремы, но и ее условие. Самостоятельно объяснить возникшую коллизию он вряд ли сможет, особенно если учесть, что эта ситуация традиционно со стороны учебника и учителя никак не комментируется. Данный прием состоит в том, что ученику дается поясняющий комментарий: привести рисунок, на котором бы одновременно выполнялось отрицание заключения теоремы и в неизменном виде условие теоремы невозможно. Поэтому необходимо отвлечься от нарушения на рисунке условия теоремы, и в рассуждениях строго придерживаться условия в его неизменном виде.

Прием 4 (развивающий предыдущий). Дополнительный комментарий: коллизия на рисунке, иллюстрирующем предложение (A и $\bar{B}$), на самом деле более чем естественная. Она моментально, графическими средствами показывает, что при отрицании заключения теоремы, мы сразу приходим к (визуальному) противоречию с условием теоремы. Но рисунок не служит доказательством, поэтому необходимы логические рассуждения, в которых, как указывалось выше, надо строго придерживаться условия теоремы. Учитывая сказанное, психологически более убедительными (особенно при первоначальном знакомстве) являются доказательства методом от противного, в которых *противоречие получается именно с условием теоремы*.

Многие доказательства методом от противного можно свести к указанному виду. Покажем этот технологический прием на примере доказательства признака параллельности прямых: если при пересечении двух прямых секущей окажется, что накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (таблица 9.2, рис. 9.8).

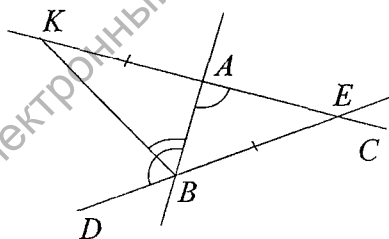


Рис. 9.8

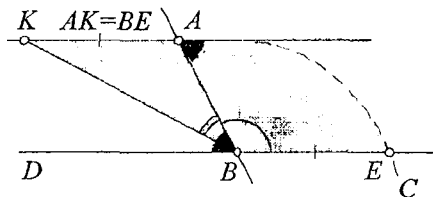


Рис. 9.9

Способы доказательства методом от противного

1-й способ: противоречие с аксиомой откладывания угла (не с условием теоремы)	2-й способ: противоречие с условием теоремы
Пусть при пересечении прямых AC и BD секущей AB образовались равные накрест лежащие углы: $\angle BAC = \angle ABD$ и $\angle MAB = \angle NBA$. Докажем, что $AC \parallel DB$. Доказательство проведем методом от противного. 1. Могут ли прямые AC и DB пересекаться? Допустим, что $AC \nparallel DB$. Пусть E — точка пересечения этих прямых. Какие следствия можно получить из этого допущения? 2. Отложим отрезок AK, равный BE, и соединим точки B и K отрезком. 3. $\triangle BAK = \triangle ABE$ — по двум сторонам и углу между ними. 4. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABK = \angle BAE$. 5. Но углу BAE (углу BAC) равен также $\angle ABD$ (по условию). 6. В результате от луча BA в одну полуплоскость от прямой BA оказались отложенными два разных угла (!) ($\angle ABK$ и $\angle ABD$) с одной и той же градусной мерой. 7. Этого быть не может (см. основное свойство откладывания угла). 8. Полученное противоречие означает, что допущение о пересечении прямых AC и DB неверно. 9. Следовательно, $AC \parallel DB$.	Пусть при пересечении прямых AC и BD секущей AB образовались равные накрест лежащие углы: $\angle BAC = \angle ABD$ и $\angle MAB = \angle NBA$. Докажем, что $AC \parallel DB$. Доказательство проведем методом от противного. 1. Могут ли прямые AC и DB пересекаться? Допустим, что $AC \nparallel DB$. Пусть E — точка пересечения этих прямых. Какие следствия можно получить из этого допущения? 2. Отложим отрезок AK, равный BE, и соединим точки B и K отрезком. 3. $\triangle BAK = \triangle ABE$ — по двум сторонам и углу между ними. 4. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABK = \angle BAE$. 5. Итак, $\angle BAE$ ($\angle BAC$) равен $\angle ABK$, который является частью $\angle ABD$. Поэтому $\angle BAC \neq \angle ABD$, что противоречит условию. 6. Следовательно, $AC \parallel DB$. <i>Замечание.</i> Доказательство короче и психологически более убедительно, нежели предыдущее. Однако оно несколько уступает в строгости: утверждение о том, что $\angle ABK$ является частью $\angle ABD$ сделано на наглядной основе, без логического обоснования. Такого рода обоснование относится к геометрии порядка и традиционно в школьных учебниках опускается.

Прием 5 (развивающий приемы 2 и 3). Рисунок, иллюстрирующий предложение (A и B), можно постараться сделать с «меньшими» искажениями условия A . Например, рисунок для доказательства признака параллельности двух прямых можно сделать таким образом, чтобы на нем не так резко бросалось в глаза нарушение условия A (рис. 9.9). На этом рисунке накрест лежащие углы «как бы остались равными». Во всяком случае такой рисунок

лучше помогает ученику понимать и помнить, что условие теоремы остается без изменения.

3. Задания для практических и лабораторных работ

Задание 1. Охарактеризуйте различные методы и приемы введения теорем. Конкретизируйте их на материале различных школьных учебников.

Задание 2. Охарактеризуйте синтетический метод поиска доказательства теорем. Конкретизируйте его примером.

Задание 3. Охарактеризуйте поиск доказательства теорем с помощью анализа Паппа. Конкретизируйте его примером.

Задание 4. Охарактеризуйте поиск доказательства теорем с помощью анализа Евклида. Конкретизируйте его примером.

Задание 5. Охарактеризуйте методические приемы изучения доказательства методом от противного. Конкретизируйте их примерами.

Задание 6. Подготовке деловую игру по изучению доказательства некоторых теорем в классе (теоремы выберите сами или возьмите те, которые будут предложены преподавателем).

Тема 10

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

- 1. О понятии «задача»**
- 2. Задача и проблемная ситуация**
- 3. Состав и структура задачи**
- 4. Требования к формулированию задач и проблемных ситуаций**
- 5. Информационно-эвристическая структура и типология проблемных ситуаций и задач (с учетом математических методов и эвристических средств)**
- 6. Информационно-эвристическая структура процесса решения задачи и разрешения проблемной ситуации**

7. Управление поиском решения задач

8. Задания для практических и лабораторных занятий

1. О понятии «задача»*

1.1. Различные подходы. Кратко обозначим принятую в данной работе трактовку понятия «задача», отсылая читателя к более развернутым обзорам, выполненным Л.М.Фридманом [45], Ю.М.Колягиным [47] и др.

В данной работе под задачей понимается определенная цель, заданная в совокупности с некоторыми условиями.

Многие исследователи (Э.В. Ильенков, Д.Н. Богоявленский, В.В. Репкин и др.) считают, что любое содержание становится предметом обучения лишь тогда, когда оно принимает в учебном процессе вид определенной задачи, направляющей и стимулирующей учебную деятельность. Задача является универсальной и обязательной формой изложения учебного материала, в которой он только и может быть включен в процесс обучения. Термин «задача» используется в различных областях науки и трактуется достаточно широко. Видимо по этой причине до настоящего времени нет общего определения понятия «задача». Так в логике проблема задачи почти не рассматривалась. Детально изучено лишь родственное понятие – «вопрос» (В.Ф. Берков, Ф.С. Лимантов и др.). Приведем некоторые трактовки понятия «задача».

Под задачей понимается требование выполнить некоторые действия. Вопрос рассматривается как логическая форма, являющаяся элементом каждой проблемы, но не каждой задачи (Ф.С. Лимантов).

Термин «задача» употребляется в психологической и педагогической литературе для обозначения объектов, относящихся к трем различным категориям: к категории цели действий субъекта; требования, поставленного перед субъектом; к категории ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута; к категории словесной формулировки этой ситуации (Г.А. Балл). Этот автор считает, что в психологической литературе наиболее распространено употребление термина «задача» для обозначения объектов второй категории. Объекты же первой категории можно обозначать терминами «цель действия» или «требование задачи», а объекты третьей категории – термином «формулировка задачи».

Иногда задача определяется как «состояние возмущения взаимодействующей системы (как состояние ее неуравновешенности)» (Я.А. Пономарев).

* При изложении п. 1 частично использовались материалы, представленные В.А. Антоновым.

Встречается и такое определение: «Мы порождаем задачу, когда связываем с описанием того, что мы желаем, требование, что должен быть получен, найден или создан элемент, удовлетворяющий этому описанию» (У.Р. Рейтман).

Приводится также такая дефиниция: «Задача – это более или менее определенные системы информационных процессов, несогласованное или даже противоречивое отношение между которыми вызывает потребность в их преобразовании» (А.Ф. Эсаулов).

Существует кибернетическая трактовка понятия задачи, связанную с понятием перехода (перевода) некоторой системы из одного состояния в другое (Э. Крик).

Простое определение задачи было дано известным математиком С.О. Шатуновским: «Задача есть изложение требования «найти» по «данным» вещам другие «искомые» вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях». При этом предполагается, что понятия «вещь», «найти», «данные», «искомые» в каждом отдельном случае особо определяются.

Иногда говорится, что «задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче».

В обучении математике под задачей обычно понимают любое упражнение, вопрос, теорему, любое задание, предполагающее выполнение определенного познавательного акта, учебный текст, подлежащий усвоению и т.д.

В Математической энциклопедии решение (как ответ, результат решения) определяется следующим образом: *решение* – значение x из множества истинности предиката $A(x)$ или задачи. *Решение* (как процесс) – процесс поиска решений определенного уравнения, неравенства, задачи.

1.2. Задачи на опровержение. Понятно, что при таком широком определении задачи трудно привести даже ее контрпример. Особенно если учесть, что требование или вопрос иногда явно не формулируются, а всего лишь подразумеваются (как это делается в предложениях, снабженных словом «теорема»). Например, утверждение-1 «Все животные смертны» только на первый взгляд кажется, что оно не является задачей. На самом деле это своего рода теорема из биологии, которая в ней обосновывается своими средствами. Если так, то данное утверждение является задачей – задачей на доказательство. Утверждение-2 «Все животные бессмертны» ложно и поэтому оно не является теоремой, так как теоремами считаются только истинные утверждения. С уверенностью можно сказать, что утверждение-2 не является задачей на доказательство в его обычном понимании. Но может быть оно является задачей иного вида, задачей на опровержение? Кстати сказать, методика, скорее всего, в ущерб себе прохо-

дит эти задачи стороной. Мы не исключаем этот вид задач, понимая под *задачами на опровержение* задачи с требованием опровергнуть какое-либо положение. *Опровержение* – это рассуждение, направленное против выдвинутого положения и имеющее своей целью установление его ошибочности или недоказанности. Распространенный прием опровержения – выводение из опровергаемого утверждения следствий, противоречащих истине. Если хотя бы одно логическое следствие некоторого положения неверно, ошибочным будет и само это положение. Другой прием опровержения какого-либо положения – доказательство справедливости отрицания этого положения. Если положение выдвигается с каким-либо обоснованием, операция опровержения может быть направлена против обоснования.

1.3. *Субъектно-объектный подход к понятию задачи.* В рамках этого подхода *задача* рассматривается как сложная система (S, P), состоящая из *субъекта* (человека) и объекта – некоторого множества элементов, взаимосвязанных с помощью определенных свойств и отношений, образующих *проблемную ситуацию* P (таблица 10.1). В символической записи совокупность этих компонентов Ю.М. Колягин выражает как *ACRB*.

Таблица 10.1

Компоненты задачи по Ю.М. Колягину

Компоненты задачи	Их характеристика
1. <i>Начальное состояние</i> (A)	Характеристика проблемности системы P. Для математических задач это состояние выступает в форме <i>условия</i> задачи (данные элементы и связи между ними).
2. <i>Конечное состояние</i> (B)	Характеристика стационарности системы P. Для математических задач это состояние выступает в форме <i>заключения</i> или <i>цели</i> задачи (неизвестные элементы и связи между ними).
3. <i>Решение задачи</i> (R)	Один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному. Для математических задач способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого. Решить задачу – это значит преобразовать данную проблемную ситуацию в соответствующую ей стационарную ситуацию (т.е. ситуацию, в которой человеку известны все компоненты системы P) или установить, что такое преобразование в данных условиях (которые могут быть и субъективными) невозможно.

Компоненты задачи	Их характеристика
4. <i>Базис решения задачи (С)</i>	Теоретическая или практическая основа для решения. Для математических задач базис решения выступает в форме обоснования решения.

1.4. Общий вывод. В данной работе под задачей понимается цель, заданная в конкретной ситуации, конкретных условиях. Цель выражается определенным требованием задачи. Условия задачи и требование задачи являются, таким образом, необходимыми компонентами любой задачи. Основаниями такого подхода служат положения о целесообразном характере человеческой деятельности и психического развития, о проблемном характере мышления, возникающего только при наличии рассогласования, вопроса, задачи. Наряду с объектным подходом перспективным является субъектно-объектный подход к трактовке понятия «задача», при котором это понятие существует только вместе с субъектом (нет субъекта – нет задачи). Субъектно-объектный подход позволяет более углубленно подойти к анализу состава и структуры задачи, к анализу процесса поиска решения. Возможное углубление такого подхода заключается во включении в структуру задачи и процесса ее решения математических методов и эвристик.

2. Задача и проблемная ситуация

2.1. О связи понятий «задача» и «проблемная ситуация». Обратимся к вопросу о связи понятий задачи и проблемной ситуации. Специальное внимание в педагогической литературе уделяется рассмотрению вопроса о задачах-проблемах. В. Оконь утверждает, что «проблемный характер для данного индивида имеют лишь такие задачи, в которых содержится определенная практическая или теоретическая трудность, требующая исследовательской активности, приводящей к решению. При преодолении индивидом трудности задача утрачивает свой проблемный характер. Проблемой для него является трудность, для преодоления которой он еще не готов, хотя для кого-нибудь другого она может и не быть проблемой».

А.В. Брушлинский так характеризует это различие между проблемной ситуацией и задачей: «Проблемная ситуация, как известно, возникает рань-

ше задачи и становится первым симптомом того, что в ходе своей деятельности человек натолкнулся на какую-то серьезную и пока малопонятную трудность. Затем, на следующем этапе из этой проблемной ситуации появляется более или менее четко формулируемая задача (проблема). В ее словесной формулировке в той или иной степени уже выделены условия и требования, хотя бы предварительно и очень приблизительно намечающие искомое (неизвестное)).

А.М. Матюшкин рассматривает различные модели проблемных ситуаций: поведенческая модель проблемной ситуации, гештальт-модель, вероятностная модель, информационно-семантическая модель. «Главные условия, вызывающие проблему в этих видах проблемных ситуаций, соответственно следующие: препятствие на пути к цели, деструктурированность условий и предмета мышления, «препятствие» выражено в альтернативе, несоответствие наличных и требуемых знаний».

А.М. Матюшкин также отмечает, что «Главным элементом проблемной ситуации является неизвестное, новое, то, что должно быть открыто для правильного выполнения поставленного задания, для выполнения нужного действия. Чтобы создать проблемную ситуацию в обучении, нужно поставить ребенка перед необходимостью выполнения такого задания, при котором подлежащие усвоению знания будут занимать место неизвестного. Важнейшей характеристикой неизвестного как центрального элемента проблемной ситуации, в отличие от искомого как центрального элемента задачи, является то, что неизвестное в проблемной ситуации всегда характеризуется какой-либо степенью обобщения. Искомое задачи всегда или в большинстве случаев составляет единичное отношение или единичную конкретную величину». На наш взгляд, А.М. Матюшкин при сопоставлении понятий «задача» и «проблемная ситуация» четко указывает их отличительные признаки. В методическом плане представляет интерес предложенное разграничение понятий «неизвестного» и «искомого», относя первое к проблемной ситуации, а второе – к задаче. Вместе с этим, для описания понятия «проблемная ситуация» привлекается третье понятие – понятие «задания». Последнее понятие никак не поясняется и, скорее всего, относится к числу исходных понятий. Итак, выстраивается цепочка понятий: «задание» – «проблемная ситуация» – «задача». На наш взгляд, можно не привлекать понятие «задания», обойтись без этого понятия, отнеся понятие «проблемная ситуация» к числу исходных, аксиоматически вводимых понятий. Объединяющим началом понятий «проблемная ситуация» и «задача», на наш взгляд, является наличие некоторого условия – условия проблемной ситуации, условия задачи. Все остальное относим к отличиям этих понятий. В том числе существенные отличия имеют место для условий. В задаче условие и требование, если можно так сказать, взаимно ориентированы (например, условие

задачи обладает такой степенью полноты, которая необходима и достаточна для выполнения требования задачи). В проблемной ситуации условие такой ориентации «в готовом виде» не имеет: первоначально оно может быть слишком широким, слишком узким, представляться в математизированном виде, или в виде, предполагающим последующую математизацию. Отсутствие такой ориентации объясняется тем, что заранее не сообщается неизвестное проблемной ситуации. Оно может быть различным и появляется в процессе становления проблемной ситуации в зависимости от того, как протекает этот процесс, как он организуется.

А.М. Матюшкин отмечает еще, что «Поиск неизвестного в проблемной ситуации составляет главное звено проблемного обучения. Он совпадает с процессом усвоения новых знаний. Управление усвоением в условиях проблемного обучения – это, прежде всего, управление процессом поиска неизвестного».

Ю.М. Колягин употребляет понятие «задачная система», который, как можно понять из контекста, совпадает с понятием «проблемная ситуация». Целесообразность такого «удвоения» терминологии мотивировать затруднительно.

Одной из причин разнообразия формулировок является принципиально различный подход разных авторов к вопросу об отношении между субъектом и задачей. Большинство авторов включают субъект в само понятие задачи (Г.А. Балл, А.Н. Леонтьев, Я.А. Пономарев, К.А. Славская и др.). Они рассматривают задачу как ситуацию (проблемную), в которой должен действовать субъект. Поэтому без субъекта задачи нет. И то, что составляет задачу для одного субъекта, может не быть задачей для другого. Заметим, что субъектно-объектный подход позволяет организовать всестороннее, системное исследование проблемы обучения поисковой деятельности учащихся при решении задач.

Другие авторы пытаются развести понятия задачи и проблемной ситуации в целях более глубокого анализа этих понятий (А.В. Брушлинский, А.М. Матюшкин, Л.М. Фридман и др.). При этом подходе задача рассматривается как некая реальная система, не требующая для своей характеристики субъекта действия.

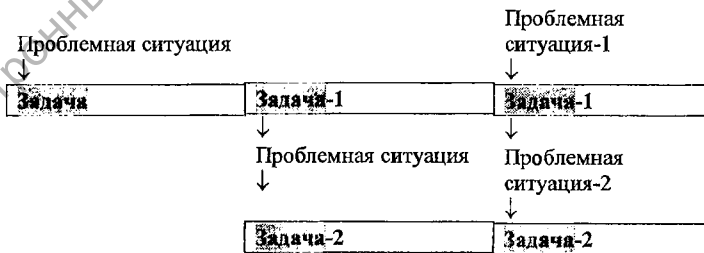


Рис. 10.1

2.2. *Три вида связей.* На наш взгляд, возможны три вида связей между проблемной ситуацией и задачей (рис. 10.1). Первая ситуация: генетически задача возникает из проблемной ситуации. В такой ситуации находится каждый субъект, который составляет некоторую задачу. Вторая ситуация: ученику дается готовая задача и организуются действия по осознанию ее проблемного характера. Этому способствует и требование задачи в форме: «Найти, доказать, построить, преобразовать и т.д.». Третья ситуация является комбинацией двух предыдущих. Отметим, что во всех случаях познавательные противоречия, получающие свое выражение в форме вопросов и задач, в генетическом плане являются источником самостоятельной мысли, пусковым механизмом мышления. Для задачи и проблемной ситуации будем использовать соответственно термины: «*решение задачи*», «*разрешение проблемной ситуации*».

2.3. *Объединяющее начало.* Объединяющим началом для проблемной ситуации и задачи выступают понятия **информационной среды и информационного сообщения**. *Информационная среда* – это система средств общения с человеческим знанием. Она служит: а) для хранения, структурирования и представления информации, составляющей содержание накопленного знания; б) для ее передачи, переработки и обогащения. *Структура* информационного сообщения – это относительно устойчивая система связей элементов, образующих целое – исходную информацию. Одной из самых важных сторон осознания структуры информационного сообщения является определение связей между его элементами. *Информационное сообщение* может иметь форму текста, формулы, графического изображения. То, что ученик видит, понимает и может перевести в рисунок, чертеж или формулу – это явная для него информация. *Информационное сообщение задано явно*, если его данные воспринимаются непосредственно. *Информационное сообщение задано неявно*, если его данные непосредственно (визуально) не воспринимаются. Такие данные носят скрытый, внутренний характер, заметить присутствие их по внешним признакам затруднительно. В этом случае сообщение предполагает расчленение информации на смысловые части, поиск следствий из определений объектов, их свойств или связей между ними. Заметим, что: а) деление информационных сообщений на явно и неявно заданные носит субъективный характер; б) различные неявные информационные сообщения могут обладать разной степенью качества «неявности».

Проблемная ситуация и задача являются определенными информационными сообщениями, оба эти сообщения задаются неявно. Различие между проблемной ситуацией и задачей заключается в наличии у них различной степени неявности. В проблемной ситуации она, как правило, больше (в ней часто даже условия и требования явно не формулируются), а в задаче она меньше. Информационный подход к проблемной ситуации и задаче позволяет подойти к ним с единых позиций (сформулировать единые требования к их постановке, выделить единые основания классификации и т.д.).

3. Состав и структура задачи

3.1. Общий подход к определению состава задачи. Субъектно-объектный подход не исключает возможность рассмотрения задачи как самостоятельного объекта (особенно на начальном этапе исследования). В рамках этого подхода выделяются такие составные части задачи [52, с. 16]: «предметная область задачи, отношения, требование задачи, оператор задачи».

Предметная область задачи есть класс фиксированных (названных, обозначенных) объектов (предметов), о которых идет речь в задаче.

Элементы предметной области связаны некоторыми *отношениями*. Элементы предметных областей и отношения в задачах можно разделить на постоянные и переменные.

Постоянными являются те элементы (предметы) и те отношения, которые вполне определены условием задачи; *переменными* являются те отношения, которые могут принимать любые значения из некоторого множества (области изменения переменной).

Элементы предметных областей и отношения, кроме того, делятся на известные (данные) и неизвестные. Элементы предметных областей и отношения считаются *известными (данными)*, если в условии задачи точно указаны их значения. В противном случае они считаются *неизвестными*.

Отметим также, что к неизвестным элементам и отношениям, конечно, относятся и *искомые*, нахождение которых составляет цель решения задачи. Однако не все неизвестные обязательно искомые. Неизвестные, не являющиеся искомыми, будем называть *вспомогательными неизвестными*.

В некоторых задачах кроме искомых и вспомогательных неизвестных встречаются еще особые неизвестные элементы предметной области. Эти последние неизвестные не являются искомыми, ибо их значения нам в соответствии с вопросом задачи не нужно находить. В то же время они не являются и вспомогательными неизвестными, ибо их значения в процессе решения мы и не сумеем найти. Такие неизвестные, значения которых не требуется и нельзя найти по условию задачи и которые служат лишь для образования отношений между данными и искомыми задачи, назовем *неопределенными неизвестными*.

Третьей составной частью задачи является требование задачи. *Требование задачи* — это указание о цели решения задачи — то, что необходимо установить в результате решения задачи. Однако не всякая задача содержит искомые неизвестные. Так, например, в задачах на доказательство нет искомых в обычном смысле этого слова.

Наконец, последней, четвертой составной частью задачи является оператор задачи. Под *оператором задачи* мы будем понимать совокупность тех действий (операций), которые надо произвести над условиями задачи, чтобы выполнить ее требование. Оператор задачи представляет собой определенный математический метод (способ), позволяющий решить задачу. В оператор задачи включаются также определенные теоретические или практические знания, в контексте которых рассматривается данная задача. Изменение этого контекста может приводить к различным способам решения задачи. Теоретические и практические знания могут ограничиваться рамками одной учебной темы, или относиться ко всему курсу, а также к смежным курсам. Заметим, что понятие оператора задачи широко используется в работах по искусственному интеллекту. Например, в работе [92, с. 14] дается такое определение: «оператор преобразует одно состояние в другое». В этой работе используются различные виды операторов: оператор ключевой, наследования, нетерминированный, построения дочерних вершин (на графе), префиксный, присваивания, сведения задачи к подзадачам и др.

Остановимся на вопросе: что понимать под условиями задачи? Иногда под *условием задачи* понимают всю формулировку задачи. Чаще под условием понимают лишь ту часть формулировки, в которой указаны элементы предметной области и связывающие их отношения, т.е. формулировку задачи без ее требования. Некоторые авто-

ры говорят не только об условии задачи, но и об *отдельных условиях*, понимая под последними отдельные данные и отношения, заданные в задаче. Мы будем термин «условие задачи» использовать главным образом во втором смысле, т. е. как часть формулировки задачи без ее требования, а иногда будем говорить и об отдельных условиях. Именно в этом смысле использовано понятие «условия задачи» в указанном выше определении оператора задачи.

Оператор, в отличие от всех трех других составных частей задачи, обычно не указывается явно в формулировке задачи, он задается косвенно – требованием задачи («найти», «доказать», «построить» и т.д.). Предполагается, что решающий знает, что означает каждое из таких требований.

Итак, всякая задача (в объектном подходе) состоит из следующих четырех частей: предметной области, отношений, требования, оператора. Элементы предметной области вместе с отношениями, которые их связывают, образуют условие (или условия) задачи. Поэтому можно говорить, что задача состоит из трех следующих частей: условия, требования и оператора задачи.

3.2. Состав задачи и актуализация знаний, необходимых для ее решения. Знание состава задачи позволяет более упорядоченно подойти к анализу задачи, позволяющему уже на начальной стадии осознания задачи максимально извлечь информацию, облегчающую поиск решения задачи. Естественно вначале выяснить, какие элементы предметной области даны в задаче, какие отношения связывают эти элементы, что является требованием задачи, имеются ли в задаче вспомогательные неизвестные элементы, возможно ли введение неопределенных неизвестных, какие предположения можно высказать в отношении оператора задачи. Такой анализ позволяет более целенаправленно и мотивированно подойти к *актуализации знаний*, необходимых для решения задачи.

3.3. Логическая модель задачи. Для того чтобы установить структуру задачи, надо ее так описать (переформулировать), чтобы выявить все ее основные части и отношения между ними и отбросить лишнее, второстепенное, не влияющее на структуру задачи. Первым шагом такого описания задачи является построение ее *логической модели*, характеризующей логическую структуру задачи.

Высказывание – любое предложение, относительно которого имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Предикат (высказывательная форма) – сказуемое суждения; то, что высказывается (утверждается или отрицается) в суждении о субъекте. В математической логике предикатом называется логическая функция, определенная для предметной области и принимающая значение либо истинности, либо ложности.

Если изложить задачу как систему высказываний, предикатов и требований, то мы и получим ее *логическую модель*. Например, логическая модель задач «Решите уравнение или неравенство» имеет вид: «Дан предикат с равенством (неравенством). Найти все такие значения переменных, при которых данный предикат переходит в истинное высказывание». Логическая модель представляет *логическую структуру задачи*.

Запись задачи на логико-математическом языке представляет собой наиболее распространенный вид ее модели (кванторы общности и существования в «школьных» записях обычно подразумеваются, но не записываются). Такие модели усиливают наглядность представления задачи, более наглядной становится именно логическая структура задачи. Пример задачи и ее логической модели (таблица 10.2).

В задачах «решить уравнение или неравенство» оператором являются такие действия (преобразования данного уравнения или неравенства в равносильные), которые дают возможность разыскать все значения переменных, удовлетворяющих требованию задачи.

Таблица 10.2

Пример построения логической модели задачи

Задача	Ее логическая модель
Если на плоскости две прямые перпендикулярны к третьей прямой, то они параллельны. Докажите это.	$(a \perp c \text{ и } b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$

4. Требования к формулированию задач и проблемных ситуаций

Как было показано выше, трактовки понятия задачи носят предельно общий характер, а многообразие задач чрезвычайно велико. Это обстоятельство затрудняет разработку четких требований к формулированию задач, а такие требования необходимы, так как они

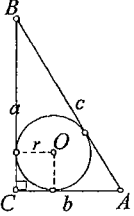
могли бы помочь предупреждению встречающиеся недостатков, а порой и грубых ошибок, при формулировании задач. Еще труднее сформулировать такие требования для проблемных ситуаций. Не претендуя на исчерпывающую полноту, выделим следующие требования (в отношении задач сравните с источником [52, с. 33]).

Таблица 10.3

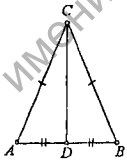
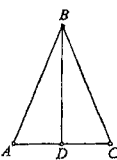
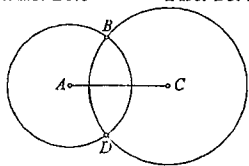
Требования к задачам и проблемным ситуациям

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
Требование 1. Необходимо четко выделять условие и требование задачи. Например, утверждение-2 «Все животные бессмертны» (см. выше) не воспринимается как задача по той причине, что не указано требование задачи. Правильная формулировка задачи: «Все животные бессмертны. Опровергните это утверждение».	Для ПС не исключаются случаи, когда условие или неизвестное проблемной ситуации не сформулированы. В этом случае возможны ПС такого типа: «Для данного условия подберите неизвестное», «Если неизвестным посчитать то-то, то каким должно быть условие», «Дана некоторая математическая ситуация. На основе этой ситуации подберите условие и неизвестное». По сравнению с задачей здесь особенно необходимо четкое выделение условия и неизвестного ПС.
Требование 2. Условия должны быть непротиворечивыми, т.е. любая пара, тройка, n-ка условий не должна образовывать противоречие. Если условия задачи состоят из одного элементарного утверждения, то условие не может быть противоречивым, даже если оно ложно. Однако такая задача должна быть сформулирована как задача на опровержение. Примером может служить задача, приведенная выше («Все животные бессмертны. Опровергните это утверждение»). Пример. Выясните, является ли корректной формулировка следующей задачи 1.1: «Рабочий кружок, состоящий из 20 человек (взрослых и подростков), устроил сбор на покупку книг для библиотеки, причем каждый взрослый внес по 3 руб., а каждый подросток по 1 руб. Сколько было в этом кружке взрослых и сколько подростков, если весь сбор составил 35 руб.?» [52, с. 32].	Этого требования целесообразно придерживаться и при постановке ПС. Свообразие этого требования для ПС состоит в том, что оно относится к заключительной стадии ее формирования. На начальной стадии, когда ПС логически еще не оформилась возможны и противоречивые условия (которые позже выявляются и устраняются, после чего фиксируется условие и неизвестное ПС).

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
Обозначим число взрослых буквой x, тогда число подростков будет $20 - x$, и сбор со взрослых окажется $3x$ руб., а с подростков $(20 - x)$ руб. Получаем уравнение: $3x + (20 - x) = 35$, откуда $x = 7\frac{1}{2}$. Найденное значение не удовлетворяет задаче, так как по смыслу задачи искомое число должно быть натуральным. Причина кроется в том, что условия этой задачи противоречивы. Действительно, так как общее количество членов кружка число четное (20), то число взрослых и число подростков или оба четны, или оба нечетны. Взносы же их есть числа нечетные (3 и 1). Поэтому в любом случае общий сбор денег есть четное число рублей, а это как раз противоречит условию, что общий сбор равен 35 руб. Вывод: задача неправильно сформулирована. На наш взгляд, именно так и нужно говорить. Выражение «задача не имеет решения» в этом случае окажется неудачным. Прежде чем говорить о наличии или отсутствии решения задача должна быть корректно поставлена.	
Требование 3. <i>Необходимо чтобы числовые данные текстовой задачи принадлежали области их допустимых значений.</i> Нарушение этого требования приводит к противоречию с самим существованием рассматриваемой в задаче ситуации. Пример неправильно сформулированной задачи (из заданий централизованного тестирования). Задача 1.2. «Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен 5 см, гипотенуза равна 10 см (Рис. 10.2). Найдите площадь треугольника». Пусть $BC = a$, $AC = b$. Тогда $S = \frac{1}{2}ab$. Решение задачи сводится к тому, чтобы найти произведение ab.	Этого требования также целесообразно придерживаться при постановке ПС. Своеобразие этого требования для ПС, как и выше, состоит в том, что оно относится к заключительной стадии ее формирования. На начальной стадии, когда ПС логически еще не оформилась возможно и временное нарушение этого требования (которое позже выявляется и устраняется, после чего окончательно фиксируется условие и неизвестное ПС).

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
1-й способ. Для этого воспользуемся формулой радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \frac{1}{2}(a + b - c).$ Выполнив несложные вычисления, получаем, что $a + b = 20$,  Рис. 10.2 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 400, c^2 + 2ab = 400,$ $2ab = 300, ab = 150, S = 75.$ 2-й способ. Как и выше получаем, что $a + b = 20$. Кроме того, $a^2 + b^2 = 100$. Для нахождения a и b решим систему уравнений: $\begin{cases} a + b = 20, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$ Ее решение сводится к квадратному уравнению $a^2 - 20a + 150 = 0$ с отрицательным дискриминантом, что свидетельствует о том, что треугольника с такими данными не существует. Следовательно, задача сформулирована неправильно. Примечательно то, что ни сама задача, ни ее решение первым способом к такому выводу совершенно не подводят. Неправильно сформулированные задачи не такая уж редкость как это может показаться. Некоторые авторы, анализируя различные учебники и задачки, находят не один десяток таких задач. В таких случаях возможны два выхода из положения: 1) Найти допустимые значения указанных в задаче величин и правильно сформулировать задачу. Это, прежде всего, должны делать авторы задач, допустившие подобную ошибку. Если автор сознательно формулирует задачу в таком виде, то требование задачи должно быть дополнено вопросом и заданием «Правильно ли сформулирована задача? Если задача сформулирована неправильно, то исправьте сделанную ошибку».	

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
2) Если ошибка все же произошла, и ее заметил учитель со своими учениками, то она также должна быть исправлена. Для этого необходимо найти допустимые значения величины. В данном случае можно поступить следующим образом. Введем параметр p, рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + (p - a)^2 = 100, \end{cases}$ как следствие получаем уравнение относительно a: $2a^2 - 2pa + p^2 - 100 = 0.$ Накладываем на его дискриминант ограничение, получаем $p \leq 10\sqrt{2} \approx 14,1$. Тогда $a + b = 2r + c \leq 10\sqrt{2} \Rightarrow r \leq 5(\sqrt{2} - 1) \approx 2,1$. В неправильно составленной задаче $p = 20$, $r = 5$. Эти значения не входят в найденную область допустимых значений. Зная область допустимых значений, нетрудно правильно сформулировать задачу. Правильное формулирование задачи и решение ее могут превратить решение обычной на первый взгляд задачи в настоящее исследование.	
Требование 4. Условия должны быть достаточными для выполнения требования задачи.	В ПС условия на начальной стадии их формирования могут быть недостаточными для некоторого неизвестного. Для выяснения этого вопроса необходимо ставить задания типа: «Выясните, достаточно ли условий для нахождения такого-то неизвестного. Подберите (дополните) условия таким образом, чтобы их было достаточно для нахождения такого-то неизвестного». Примеры [102, с. 142]. Задача 1.3. а) На рисунке 10.3 отмечены равные элементы треугольников ADC и BDC. Достаточно ли этих данных для доказательства следующих равенств: 1) $\angle ADC = \angle BDC$; 2) $\angle ACD = \angle BCD$; 3) $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$?

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
Требование 4. Условия должны быть достаточными для выполнения требования задачи.	б) Укажите на рисунке 10.4 минимальное количество данных (о равенстве сторон и углов), достаточных для доказательства утверждений: 1) $AB = BC$; 2) $\angle A = \angle C$. в) Точки B и D – точки пересечения двух окружностей произвольного радиуса с центрами A и C. Достаточно ли этих данных для доказательства следующих равенств (рис. 10.5): 1) $\triangle ABC = \triangle ADC$; 2) $\angle BAC = \angle DAC$; 3) $\angle B = \angle D$; 4) $\angle BCA = \angle DCA$.  Рис. 10.3  Рис. 10.4  Рис. 10.5
Требование 5. Условия должны быть независимыми. В отдельных случаях допустимо включение избыточного условия, но при этом в состав требований задачи должно входить требование «найдите лишнее условие».	В ПС это требование не является обязательным. Установление зависимости (независимости) условий может рассматриваться как неизвестное ПС, подлежащее разрешению. Примеры [102, с. 138]. Задача 1.4. а) Один из смежных углов больше другого на 60°. Известно еще, что он в 2 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишних данных? Если есть, то составьте и решите задачу без лишних данных.

Требования к формулированию задач	Требования к формулированию проблемных ситуаций (ПС)
Требование 5. Условия должны быть независимыми. В отдельных случаях допустимо включение избыточного условия, но при этом в состав требований задачи должно входить требование «найдите лишнее условие».	б) Один из смежных углов больше другого на 60°. Известно еще, что он в 3 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишних данных? Не противоречат ли данные друг другу? Составьте и решите задачу, не имеющую указанных недостатков. в) Один из смежных углов больше другого. Найдите эти углы. Хватает ли данных для решения задачи? Дополните условие задачи каким-либо данным и решите ее.
Требование 6. В задачах с требованиями «найти значение некоторой величины», «доказать такое-то утверждение», «построить фигуру» условия должны быть истинными утверждениями. Если условия содержат ложное утверждение и потому они оказываются противоречивыми, то требованием должно служить не «решить задачу», а «найти ошибку в формулировке задачи».	На начальной стадии формирования ПС не исключается нарушение требования 6. Это требование относится к окончательной постановке ПС.
Требование 7. Условия и требования должны быть связаны по содержанию, т.е. если требование представляет собой некоторое высказывание, то в условиях должен иметься соответствующий предикат.	Безусловно, это требование в полной мере, без каких-либо оговорок относится и к ПС.

Если хотя бы одно из предыдущих требований нарушено, то задача или проблемная ситуация считаются сформулированными неправильно. Что касается терминов «задача сформулирована правильно», «задача сформулирована неправильно», то мы их считаем более корректными, чем термины «правильная задача», «неправильная задача», которые иногда встречаются в литературе.

Пример 1. Выясните, правильно ли сформулирована задача «Исследуйте функцию $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-7}$ ».

1-й ответ. Особенность функции состоит в том, что областью ее определения является пустое множество. Обратимся к определению функции как функционального отношения, т.е. определенного подмножества декартового произведения двух множеств X и Y (множества пар). Если $X = \emptyset$, то $X \times Y = \emptyset$, подмножество пустого множества есть пустое множество. Поэтому функциональное отношение является пустым множеством. Об этом говорится, напри-

мер, в работе [51, с. 51]: «Множество всех функций, определенных на X со значениями в Y , есть подмножество множества $P(X \times Y)$; обозначим это подмножество через Y^X . Если X пусто, то Y^X состоит всего лишь из одного элемента, а именно из пустого подмножества множества $X \times Y$. Это единственное подмножество множества $X \times Y$, так как последнее само пусто, если пусто X ».

Сказанное означает, что $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-7}$ – есть функция со следующими свойствами: область определения этой функции – пустое множество, множество значений – пустое множество, график функции – пустое множество. Поэтому с точки зрения современной (теоретико-множественной) математики, учитывая, что пустое множество в ней рассматривается на равных основаниях с другими множествами, нет оснований для того, чтобы говорить, что в данном случае нет функции, как таковой, и потому постановка задачи является корректной. Другое дело, насколько целесообразно поднимать такие вопросы в школьном курсе, но этот вопрос уже не относится к корректности постановки данного задания.

2-й ответ. Говорить о функции вне области определения бессмысленно. Поэтому формула $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-7}$ не задает никакой функции. В данном случае формула есть, а функции нет. Следует признать, что формулировка задачи является неправильной. Правильная постановка задачи: «Выясните, задает ли формула $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-7}$ некоторую функцию?».

Какой же из этих двух взаимно исключающих друг друга ответов выбрать? Выбор одного из них дело «коллективного соглашения», которое явно или неявно принято сообществом математиков. В вопросе о корректности постановки задачи мы рекомендуем придерживаться первого ответа.

Пример 2. Выясните, правильно ли сформулирована задача «Освободитесь от иррациональности в знаменателе выражения $\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-7}}$ ».

1-й ответ. Областью допустимых значений данного выражения (в множестве $\mathbf{R}$) является пустое множество, т.е. ни при каких значениях x значения этого выражения не существуют. Поэтому бессмысленно говорить о каком-либо тождественном преобразовании данного выражения. Вывод: задача сформулирована неправильно. Единственно правильная формулировка: «Найдите область допустимых значений записанного выражения». Ответ может показаться убедительным, но он неправильный.

2-й ответ. Не надо смешивать такие понятия, как существование выражения и существование значений выражения. В данном случае выполнены необходимые формальные правила записи выражений и, значит, выра-

жение существует. А тогда указанная выше формулировка задачи допустима. В дидактическом же плане она вряд ли целесообразна.

Пример 3. Выясните, правильно ли сформулирована задача: «Решите уравнение $\sqrt{5-x} = 2 - \sqrt{x-7}$ ».

Ответ. В этом случае переменная x задана на множестве всех действительных чисел. Область определения уравнения – пустое множество.

Поэтому обычно делается вывод о том, что уравнение не имеет корней, или множество корней уравнения есть пустое множество. Нет каких-либо препятствий для вывода: задача сформулирована правильно.

Пример 4. В работе [52, с. 33] говорится следующее: Задача «Решить уравнение $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-7} = 2$ » – неправильно поставлена, ибо область изменения переменной пуста ($x \geq 7$ и $x \leq 5$). Можно предположить, что автор, делая этот вывод, рассуждал примерно так: ни при каком значении x уравнение не существует, а раз так, то бессмысленно ставить вопрос о нахождении корней уравнения. Отсюда вывод – задача сформулирована неправильно.

Проанализируем данную ситуацию. В этом случае переменная x задана не на пустом множестве, а на множестве всех действительных чисел. Область определения уравнения действительно – пустое множество. Но можно ли делать вывод о том, что задача сформулирована некорректно? Обратимся к определению уравнения из Математичной энциклопедии (с. 305): «уравнение – это аналитическая запись задачи отыскания аргументов функций, при которых значения этих функций равны». Поэтому если: 1) есть запись уравнения и 2) функции, стоящие в обеих частях равенства, существуют, то уравнение существует.

В данном случае: 1) аналитическая запись существует; 2) с точки зрения современной математики функция, стоящая в левой части равенства, также существует (ее область определения, множество значений и график есть пустое множество). Поэтому ставит такую задачу с требованием – найти значение x , при котором значения функций, стоящих в обеих частях равенства, равны – вполне корректно и следует давать ответ: уравнение корней не имеет.

Этот ответ, возможно, не всем покажется безупречным, но именно он принят в математике. На школьном уровне это объясняется стремлением обеспечить единообразный подход к примерам 3 и 4. В самом деле: уравнения, приведенные в данных примерах, равносильны ($\sqrt{5-x} = 2 - \sqrt{x-7} \Leftrightarrow \sqrt{5-x} + \sqrt{x-7} = 2$) и было бы странным для одного из них давать один ответ, а для другого – совсем другой.

5. Информационно-эвристическая структура и типология проблемных ситуаций и задач (с учетом математических методов и эвристических средств)

5.1. Компоненты структуры. Если математические методы и эвристические средства включить в структуру задачи и проблемной ситуации, то их можно рассмотреть как систему (А, В, R, С, М, Э). В этой системе слово АВRCMЭ будет представлять собой *информационно-эвристическую структуру задачи и проблемной ситуации*, где

А – условие, т.е. данные и отношения между ними;

В – требование, т.е. искомые (искомое) и отношения между ними;

R – основное отношение в системе отношений между данными к искомым;

С – базис решения, т.е. теоретическая и практическая основа, необходимая для решения;

М – математический метод (способ), определяющий процесс решения, т.е. способ действия по преобразованию условий (условия) для нахождения искомого;

Э – эвристические средства решения.

С учетом информационно-эвристической структуры в зависимости от числа неизвестных ученику ее компонентов можно построить более широкую типологию задач и проблемных ситуаций школьного курса математики. Для этого введем неизвестные: X, Y, Z, U, V, W. При наличии неизвестных компонентов информационно-эвристической структуры получаем различные типы проблемных ситуаций и задач.

В информационной структуре задачи или проблемной ситуации все ее компоненты взаимосвязаны и дополняют друг друга. В зависимости от числа неизвестных ученику компонентов в этой структуре, можно построить качественную единую типологию задач и проблемных ситуаций школьного курса математики. Разумеется, необходимо уточнить, что значит «неизвестный компонент», так как представляется, что на этот счет возможны разночтения этого понятия. В работе [25, с. 34] это понятие уточняется следующим образом. Приводятся две задачи:

«Задача 1. Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны.

Задача 2. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два угла равны 50° и 30° .

В первой задаче искомое известно (доказать, что указанные биссектрисы равны), во второй – неизвестно (найти неизвестный угол); проведенный анализ позволяет утверждать, что информационная структура: в данных задачах соответственна будет: ACRB и ACRX». Безусловно, отмеченный нюанс имеет определенное значение, но с точки зрения оценки степени проблемности ситуации различие между ними не является слишком значительным: в обоих этих случаях требование задачи известно. В данной работе мы вкладываем в понятия «неизвестно условие задачи», «неизвестно требование задачи» другой смысл – «неизвестно условие» или «неизвестно требование» означает, что они не сформулированы, т.е. условие или требование задачи в готовом виде не приводятся. В этом случае дается некоторая математическая ситуация и требуется на ее основе вначале составить некоторую задачу (если не давалось условие задачи, то требуется для данного требования подобрать некоторое условие; если не давалось требование задачи, то необходимо вначале для данного условия подобрать требование задачи; возможен и случай, когда математическая ситуация приводится с еще большей степенью проблемности – нет условия и нет заключения, а требуется на основе данной математической ситуации подобрать то и другое, т.е. составить и затем решить составленную задачу). Для ученика важен именно этот признак «дается в готовом виде или не дается». Аналогичный смысл мы вкладываем в понятия «известно/неизвестно» и в отношении других компонент задачи. Если сообщается в готовом виде, какие теоретические сведения, какой метод или способ решения, какое соотношение в задаче является основным, какие эвристические правила надо использовать при решении задачи, то соответствующие компоненты задачи будем считать известными. Если эти компоненты в готовом виде не сообщаются и ученику самому необходимо до всего этого додуматься – выбрать теоретические сведения, метод или способ решения задачи, основное отношение, те или иные эвристические правила, то такие компоненты задачи будем считать неизвестными.

5.2. Типология задач и проблемных ситуаций. Приходим к следующей информационно-эвристической типологии проблемных ситуаций и задач (таблица 10.4-5). Такой подход можно назвать субъектно-объектным, в отношении задач он близок к предложениям на этот счет Ю.М. Колягина и В.И. Крупича. В отличие от этих авторов в

структуру задачи и проблемной ситуации мы включаем математический метод и эвристические средства ее решения.

Таблица 10.4

Информационно-эвристическая типология задач

Типы задач	Виды задач
1 тип – все компоненты информационно-эвристической структуры задачи известны	1.1. ABRCMЭ – в этом случае задача носит характер тренировочного упражнения. Например, требуется сформулировать известное определение какого-либо понятия.
2 тип – неизвестен один компонент	2.1. ABXCMЭ; 2.2. ABRXMЭ; 2.3. ABRCXЭ; 2.4. ABRCMX.
3 тип – неизвестны два компонента	3.1. ABXYMЭ; 3.2. ABRXYЭ; 3.3. ABRCXY; 3.4. ABXCYЭ; 3.5. ABXCMY; 3.6. ABRXMY.
4 тип – неизвестны три компонента	4.1. ABXYZЭ; 4.2. ABRXYZ; 4.3. ABXYMZ; 4.4. ABXCYZ.
5 тип – неизвестны четыре компонента	5.1. ABXYZU.

Таблица 10.5

Информационно-эвристическая типология проблемных ситуаций

Типы проблемных ситуаций	Виды проблемных ситуаций
1 тип – неизвестен один компонент	1.1. XBRCMЭ; 1.2. AXRCMЭ;
2 тип – неизвестны два компонента	2.1. XYRCMЭ; 2.2. AXYCMЭ; 2.3. XBYCMЭ; 2.4. XBYRMЭ; 2.5. XBRCYЭ; 2.6. XBRCMY; 2.7. AXRYMЭ; 2.8. AXRCYЭ; 2.9. AXRCMY.
3 тип – неизвестны три компонента	3.1. XYZCMЭ; 3.2. AXYZMЭ; 3.3. XYRZMЭ; 3.4. XYRCZЭ; 3.5. XYRCMZ; 3.6. AXYZЭ; 3.7. AXRYMZ; 3.8. XBYZMЭ; 3.9. XBRYZЭ; 3.10. XBRCYZ; 3.11. AXRYZЭ; 3.12. AXRCYZ; 3.13. XBYCZЭ; 3.14. XBYCMZ; 3.15. XBYRMZ; 3.16. AXRYMZ.
4 тип – неизвестны четыре компонента	4.1. XYZUMЭ; 4.2. AXYZUЭ; 4.3. XYZCUЭ; 4.4. XYZCMU; 4.5. AXYZMU; 4.6. XYRZUЭ; 4.7. XYRCZU; 4.8. AXYCZU; 4.9. XYRZMU; 5.10. XBYZUЭ; 4.11. XBRYZU; 4.12. AXRYZU; 4.13. XBYZMU; 4.14. XBYCZU.
5 тип – неизвестны пять компонентов	5.1. XYZUVЭ; 5.2. AXYZUV; 5.3. XYZUMV; 5.4. XYZCUV; 5.5. XYRZUV; 5.6. XBYZUV.
6 тип – неизвестны все шесть компонентов	6.1. XYZUVW – этот вид проблемных ситуаций предполагает творческую деятельность наивысшего уровня.

5.3. К понятию «нестандартная задача». Если в задаче неизвестным является один из компонентов R, C, M, Э, то задачу назовем *нестандартной задачей 1-го уровня*.

Если в задаче неизвестным является каких-либо два из компонентов R, C, M, Э, то задачу назовем *нестандартной задачей 2-го уровня*.

Если в задаче неизвестным является какие-либо три из компонентов R, C, M, Э, то задачу назовем *нестандартной задачей 3-го уровня*.

Если в задаче неизвестным является все четыре компонента R, C, M и Э, то задачу назовем *нестандартной задачей 4-го уровня*.

Несмотря на то, что ПС в информационно-эвристической типологии составляют подавляющее большинство, они, как правило, остаются за рамками школьных учебников. Между тем именно они обладают значительным творческим потенциалом. ПС предполагают вначале составление задачи (в традиционном смысле), затем ее решение.

6. Информационно-эвристическая структура процесса решения задачи и разрешения проблемной ситуации

6.1. *Процесс решения задачи и его этапы*. Обучение и развитие поисковой деятельности учащихся связано с теоретическим и практическим решением вопроса об управляемости этого вида деятельности. Как правило, исследователи, анализируя процесс решения задачи, неизменно указывают на поиск как одну из главных составляющих этого процесса.

Решение задачи рассматривается как поиск в огромном лабиринте возможностей, лабиринте, который описывает внешнюю среду. Успешное решение задачи предполагает **селективный поиск** и сокращение исходного многообразия возможностей до обозримого множества (Т. Саймон).

Процесс решения задачи человеком представляется в виде следующей последовательности действий:

- 1) расчленение задачи на комплекс подзадач;
- 2) **поиск** необходимой информации в сложной системе памяти;

- 3) выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода (известных);
- 4) выбор стратегии решения;
- 5) разработка подробного плана решения;
- 6) постоянная корректировка структуры подцелей (М.Л. Минский).

Если задача встречается ученику впервые (даже если ее решение сводится к выполнению несложного алгоритма), его деятельность приобретает поисковый (эвристический) характер. Разумеется, процесс решения задачи шире понятия эвристической деятельности и включает последнюю в качестве своего важного компонента. Представителями различных психологических направлений выдвинуты различные гипотезы о тех механизмах мышления в процессе решения задач. Ассоциативисты считали, что таким механизмом является совокупность определенных ассоциаций; гештальт-психологи представляли себе внутреннюю структуру мышления как процесс видоизменений особого целостного состояния мышления, названного ими гештальтом, доведенного до его кульминации – инсайта (внезапного озарения); представители Вюрцбургской школы роль основного механизма мышления приписывали так называемой детерминирующей тенденции или некоторой функциональной системе умственных операций; представители школы Ж. Пиаже считали основой мышления формирование особых психологических структур, аналогичных математическим структурам.

Исследованиями психологов было показано, что формирование психологической структуры процесса решения задачи является управляемым компонентом этого процесса. В роли **регулирующего поиска решения задачи** выступает ее цель, ее искомые элементы, под углом зрения которых происходит формирование структуры процесса решения задачи. Это положение дает возможность управлять процессом решения задачи: путем переформулировок условия задачи, разбиения задачи на подзадачи, с помощью продуманной системы эвристик. В результате открываются возможности обучения школьников общим приемам решения задач, а не разучиванию решений типовых задач.

Большинство исследователей, обращаясь к структуре процесса решения задачи, выделяют примерно одни и те же этапы решения задач со стандартной формулировкой. Д.Поля [40, с. 204], например,

выделяет следующие этапы: 1) понять предложенную задачу; 2) найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотреть промежуточные задачи («анализ»); 3) реализовать найденную идею решения (синтез); 4) решение проверить и оценить критически.

Более детально структура процесса решения задачи представлена в таблице 10.6.

Таблица 10.6

Этапы процесса решения задачи

Этапы	Их характеристика
1	Предварительный анализ условия и требования задачи, создание определенного мотивационно-эмоционального состояния.
2	Исходя из условий и требований задачи, учащийся пытается установить связи, отношения и зависимости между данными, опираясь на свой опыт.
3	В случае затруднения учащийся преобразует условия, требования задачи: переформулирует, перекодирует, упрощает задачу, сводит ее к известному виду и т.д. В итоге возникает исходная идея, замысел решения.
4	Появляется необходимость в планировании последующих действий, выделяются необходимые действия, определяется их последовательность. В результате составляется план решения задачи.
5	План осуществляется с помощью выделяемых операций, проверяется и оценивается на основе устанавливаемых критериев.
6	Промежуточные и окончательные результаты действий все время сличаются с исходными условиями и требованиями. Если выполняемые операции и полученные результаты соответствуют им, то деятельность прекращается – задача решена.

6.2. Ориентация процесса решения задачи на поиск. Каждый из этапов поиска решения задачи имеет определенную степень управляемости. Наибольшие затруднения учителей и учащихся проявляются на третьем и четвертом этапах – отыскание замысла и плана решения задачи. На наш взгляд, эти затруднения частично объясняются недостаточностью приведенной выше шестиступенчатой схемы решения задачи, которая часто носит общий организационный характер и мало помогает в осуществлении тех этапов, которые наиболее тесно связаны с поиском решения.

Мы исходим из того, что: 1) вся структура процесса решения задачи, начиная с ее первого этапа, должна быть нацелена на поиск решения; 2) в общей структуре решения более полно и развернуто должны быть представлены этапы непосредствен-

ного поиска решения задачи; 3) поиск решения носит полициклический характер. По этой причине рекомендуется при построении модели поиска предусмотреть многократные обращения к одним и тем же поисковым действиям (первоначальный анализ текста, вторичный анализ текста, основной анализ текста, обращение к схематичной модели задачи, к графической модели задачи, обращение к синтетическому методу поиска, к аналитическому методу поиска и т.д.). Последняя рекомендация находит определенное психологическое обоснование. Так при выделении среди основных компонент процесса решения ориентировку в условиях задачи, отмечается, что такая ориентировка имеет различные фазы: первоначальное ознакомление с условием, его целостное схватывание, исследование функциональных возможностей его элементов (и соотношений между ними) и «переобследование» ситуации (выделено нами) (О.К.Тихомиров).

Направление такой разработки структуры решения задачи поддается предложенной нами информационно-эвристической структурой задачи: (А, В, R, С, М, Э) (таблица 10.7).

Таблица 10.7

**Соответствие между структурой задачи
и структурой процесса ее решения**

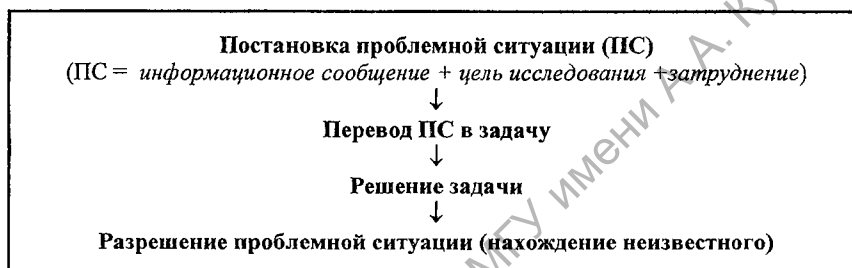
Информационно-эвристическая структура задачи	Структура процесса решения задачи
А – условие задачи, т.е. данные и отношения между ними.	1. <i>Чтение задачи и первоначальный анализ ее текста.</i> Выделение условий задачи: элементов предметной области и отношений.
В – требование задачи, т.е. искомые (искомое) и отношения между ними.	2. <i>Чтение задачи и продолжение первоначального анализа ее текста.</i> Выделение требования задачи: элементов предметной области и отношений, входящих в требование задачи. Какие величины являются искомыми? какие неизвестными? какие неопределенными? 3. <i>Выполнение графической иллюстрации (если необходимо), краткой записи задачи.</i>

Информационно-эвристическая структура задачи	Структура процесса решения задачи
R – основное отношение в системе отношений между данными к искомым.	4. <i>Вторичный анализ текста задачи – анализ отношений.</i> Анализируются все отношения, высказывается предположения о том, какое отношение является основным (отношением R). Ключом к высказыванию правильного предположения может быть как условие, так и требование задачи.
C – базис решения задачи, т.е. теоретическая и практическая основа, необходимая для решения.	5. <i>Актуализация теоретических знаний с учетом признаков задачи.</i> Выбор ключевых теоретических знаний. Первичная актуализация, вторичная и т.д. (по потребности, анализ соответствующих признаков задачи).
M – математический метод (способ), определяющий процесс решения задачи, т.е. способ действия по преобразованию условий (условия) задачи для нахождения искомого.	6. <i>Основной анализ: анализ текста задачи, графической иллюстрации, краткой записи, основного отношения с учетом признаков математического метода.</i> Какой математический метод (способ решения) подсказывает задача или графическая иллюстрация? Нельзя ли в задаче увидеть признаки определенного математического метода решения?
Э – эвристические средства решения задачи.	7. <i>Формулирование общей идеи (замысла) решения задачи.</i> При этом рекомендуется применение в первую очередь специальных методов поиска, ориентированных на специфику математики: синтетического метода, анализов Паппа и Евклида.
	8. <i>Составление плана реализации этой идеи.</i> Намечается ход решения задачи, каких-либо вычислений или обоснований отдельных шагов решения задачи здесь не производится.
	9. <i>Реализация плана.</i> Пошаговое изложение решения задачи (с обоснованиями каждого шага).
	10. <i>Рефлексия.</i> <i>Первичная рефлексия:</i> проверка решения. <i>Вторичная рефлексия.</i> Как мы догадались до решения? Нельзя ли задачу решить проще?

Дальнейшее развитие процесса решения задач (на микроуровне) будет связано с построением моделей поиска решения задач различных видов.

Структура разрешения проблемных ситуаций предполагает необходимость некоторых предварительных этапов (по сравнению со структурой решения задач). Эти этапы предназначены для сведения проблемной ситуации к задаче.

6.3. *Структура разрешения проблемных ситуаций*: формируется некоторая проблемная математическая ситуация (приводится определенное информационное сообщение, выбирается цель, направление его исследования), для этой проблемной ситуации составляется определенная задача (рис. 10.6). Далее приводится решение этой задачи.



6.4. Примеры постановки и разрешения проблемной ситуации.

Пример 1 (обучение через задачи при изучении равнобедренного треугольника, 7 класс).

1. Постановка проблемной ситуации.

1.1. *Представление информационного сообщения* [102, с. 201]. Начнем не с определения фигуры (определение равнобедренного треугольника пока не известно), а с перечисления ее свойств из наших соображений, по рисунку (рис. 10.7). На этом рисунке изображен треугольник ABC и три его медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Свойства данной фигуры формулируются в виде ряда утверждений. Приведем список таких утверждений:

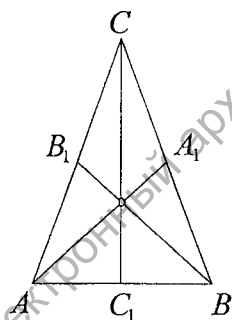


Рис. 10.7

1) $AC = BC$;

2) $\angle A = \angle B$;

3) Медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC ;

4) Медиана CC_1 является высотой треугольника ABC ;

5) Медианы AA_1 и BB_1 , проведенные к боковым сторонам треугольника ABC , равны: $AA_1 = BB_1$.

1.2. *Формулировка цели исследования.* Выяснить, какие из этих утверждений можно взять за исходные, с тем расчетом, чтобы на их основе можно было бы доказать остальные.

2. *Разрешение проблемной ситуации (исследование ПС).*

1-й этап исследования. Выясним, можно ли на основании первого утверждения доказать остальные. Следует ли из первого утверждения второе? Так как $AC=BC$ (утверждение 1), $AC_1 = C_1B$ (так как CC_1 — медиана) и CC_1 — общая сторона треугольников ACC_1 и BCC_1 , то эти треугольники равны (по трем сторонам). Из их равенства следует, что $\angle A = \angle B$. Это означает, что из первого утверждения следует второе.

2-й этап исследования. Из равенства этих же треугольников следует, что $\angle ACC_1 = \angle BCC_1$, т.е. медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC . Это означает, что из первого утверждения следует третье.

3-й этап исследования. Еще раз обратимся к равным треугольникам ACC_1 и BCC_1 . Из их равенства следует, что $\angle AC_1C = \angle BC_1C = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Это означает, что CC_1 является высотой треугольника ABC и, следовательно, из первого утверждения следует четвертое.

4-й этап исследования. Для доказательства пятого утверждения рассмотрим, например, треугольники ACA_1 и BCB_1 . Нетрудно убедиться в том, что эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Из их равенства следует, что $AA_1 = BB_1$. Поэтому из первого утверждения следует пятое.

5-й этап исследования. Подведем некоторые итоги. Ввиду того, что утверждения 1 оказалось достаточно для доказательства остальных, есть смысл выделить это утверждение особо. Важность этого утверждения как исходного утверждения при построении данного фрагмента теории подчеркнем, если положим его в основу определения такого вида треугольника. Приходим к ряду задач.

6-й этап исследования.

Задача 1.5. Рассмотренный выше треугольник называется равнобедренным. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. (*Равнобедренным треугольником* называется треугольник, имеющий равными хотя бы две стороны).

Проведенные выше доказательства позволяют сформулировать ряд задач на доказательство свойств равнобедренного треугольника.

Задача 1.6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) углы при основании равны; б) медиана, проведенная к основанию, является его биссектрисой; в) медиана, проведенная к основанию, является его высотой; г) медианы, проведенные к его боковым сторонам, равны.

Все эти утверждения были выше доказаны. Проведенные рассуждения показывают один из возможных процессов возникновения задач. Как вид-

но, этот процесс не всегда начинается с «готовых» задач, в которых известны условия и требования задачи.

Пример 2 (последовательность треугольников и кружочков).

1. Постановка ПС.

1.1. Представление информационного сообщения. В определенной последовательности расположены маленькие треугольники и кружочки (рис. 10.8): вначале один треугольник, затем один кружочек, потом опять один треугольник, но уже два кружочка, затем снова один треугольник и уже три кружочка и т.д. (треугольник берется каждый раз один, а количество кружочков увеличивается на единицу). Допустим, что процесс записывания треугольников и кружочков продолжается как угодно далеко.



Рис. 10.8

1.2. Формулировка цели исследования. Какие вопросы вы бы хотели поставить в отношении данной последовательности?

1.3. Формирование перечня вопросов (в процессе коллективного обсуждения одни вопросы отклоняются, другие принимаются):

– Сколько записано всего треугольников и сколько кружочков? (Вопрос отклоняется, так как конца у этой последовательности нет.);

– Что чаще повторяются в этой последовательности, треугольники или кружочки? (Вопрос правильный и дать ответ на него нетрудно: кружочки чаще);

– Какая фигура стоит на 30 месте? (Вопрос правильный. Ответить на него также нетрудно: на 30 месте стоит кружочек. Для получения ответа достаточно немного продолжить приведенную выше запись.);

– А можно узнать, какая фигура стоит на 100-м месте? (Вопрос правильный и намного интереснее предыдущего вопроса. Приписывание длинного «хвоста» фигур – довольно утомительное занятие. Естественно возникает небольшая проблема: «Нельзя ли ответить на поставленный вопрос без выписывания большого количества треугольников и кружочков?»);

– А можно узнать, какая фигура стоит на 990-м месте, на 1000-м месте? (Вопрос делается еще интереснее. Интерес состоит в том, чтобы попытаться ответить на него (как и выше) без выписывания большого количества фигур.)

2. Разрешение ПС (исследование ПС).

1-й способ. 1-й этап исследования. Замечаем, что, по-видимому, удобнее ориентироваться по треугольникам. Приходим к необходимости записать номера фигур в общей последовательности и отдельно номера треугольников. Составляем таблицу 10.8, в которой n – номер фигуры в общей

последовательности, t – номер треугольника в последовательности, составленной только из треугольников.

Таблица 10.8

Таблица первоначальных наблюдений

	Δ	О	Δ	О	О	Δ	О	О	О	Δ	О	О	О	О	Δ	О	О	О	О	О
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	1		2			3				4					5					

2-й этап исследования. Ищем закономерность, связывающую t и n . Постепенно замечаем, что удобнее начинать со значений t . Составляем таблицу 10.9.

Таблица 10.9

Индуктивный поиск закономерности

t	Индуктивный поиск закономерности	n	Выполняется ли закономерность?
1	$\frac{1(1+1)}{2} = 1$	1	+
2	$\frac{2(2+1)}{2} = 3$	3	+
3	$\frac{3(3+1)}{2} = 6$	6	+
4	$\frac{4(4+1)}{2} = 10$	10	+
.....			
t	$\frac{t(t+1)}{2} = n$	n	?

3-й этап исследования. В общем случае для t получаем равенство $\frac{t(t+1)}{2} = n$.

4-й этап исследования. Выясним, какая фигура стоит на 100-м месте. Если $n = 100$, то получаем уравнение $t^2 + t - 200 = 0$. Убеждаемся, что это уравнение натуральных корней не имеет (t должно быть натуральным). Это означает, что на 100-м месте треугольник не стоит и, значит, на этом месте стоит кружок.

5-й этап исследования. Если $n = 990$, то получаем уравнение $t^2 + t - 1980 = 0$. Это уравнение имеет натуральный корень $t = 44$. Следовательно, на 990-м месте стоит треугольник. После этого треугольника стоят 44 кружочка. Поэтому на 1000-м месте стоит кружочек.

6-й этап исследования. Приходим к следующим задачам со стандартной формулировкой.

Задача 1.7. Установите, что номера t и n из приведенной выше таблицы связаны равенством: $\frac{t(t+1)}{2} = n$, т.е. t -й треугольник в общей последовательности фигур занимает место с номером $\frac{t(t+1)}{2}$.

1-й способ. Доказательство методом математической индукции. 1. При $t = 1$ утверждение задачи справедливо. Первый треугольник занимает первое место в общей последовательности фигур:

2. Допустим, что утверждение задачи справедливо для произвольного t , т.е. $\frac{t(t+1)}{2}$ – номер t -го треугольника в общей последовательности фигур.

3. Докажем, что $(t+1)$ -й треугольник в общей последовательности фигур имеет номер $\frac{(t+1)(t+2)}{2}$. В самом деле. Искомый номер $(t+1)$ -го треугольника в общей последовательности фигур можно подсчитать следующим образом: к номеру t -го треугольника в общей последовательности фигур $\frac{t(t+1)}{2}$ надо прибавить t кружочков и 1 следующий (очередной) треугольник, т.е. надо прибавить $(t+1)$. Итак, искомый номер $(t+1)$ -го треугольника в общей последовательности фигур равен: $\frac{t(t+1)}{2} + (t+1) = \frac{t(t+1) + 2(t+1)}{2} = \frac{(t+1)(t+2)}{2}$.

Следовательно, утверждение задачи справедливо для $(t+1)$ -го треугольника.

4. На основании теоремы о методе математической индукции утверждение задачи справедливо для любого треугольника.

Задача 1.8. Установите, что на 100-м месте стоит кружок, на 990-м месте – треугольник, на 1000-м месте – кружок.

2-й способ. Если не ставить цель индуктивного обнаружения формулы $\frac{t(t+1)}{2} = n$, то рассуждения можно провести иначе. Обратим внимание, что с нумерацией членов последовательностей связан хорошо знакомый учащимся вопрос о прогрессиях (мы увидели тем самым признак математического метода). В самом деле. Попробуем найти число фигур, включая t -ый треугольник. В первой группе (1 треугольник, 1 кружок) имеются 2 фигуры, во второй группе (1 треугольник, 2 кружка) – 3 фигуры и т.д. В группе, предшествующей t -му треугольнику (1 треугольник, $t-1$ кружочков). И наконец, 1 (t -ый) треугольник. Общее количество фигур нетрудно подсчитать, пользуясь формулой суммы членов арифметической прогрессии:

$$n = (2 + 3 + 4 + \dots + t) + 1 = \\ = \frac{(2+t)(t-1)}{2} + 1 = \frac{t^2 + t - 2 + 2}{2} = \frac{t(t+1)}{2}.$$

6.5. Включение задач в структуру учебного процесса. Задачи являются и предметом, и средством обучения. Они способствуют достижению всех целей обучения: воспитательных, образовательных, развивающих. Возможны различные подходы к определению последовательности в изучении теоретического материала и решении задач: а) изучается небольшой блок теоретического материала, затем решаются задачи, связанные с ним (традиционный подход); б) ведется «опережающее» изучение теоретического материала, после изучения крупного блока теории решаются задачи сразу по всему материалу этого блока; в) ведется «опережающее» решение задач (теоретический материал темы рассматривается вначале на ознакомительном уровне, теоремы пока не доказываются; после ознакомления с формулировками определений и теорем сразу переходят к решению задач; по мере приобретения навыков решения задач обращаются к изучению доказательств теорем теоретической части курса, причем многие из этих доказательств проводятся учащимися самостоятельно). Опыт учителей-новаторов показывает, что «крупноблочное» изучение теоретического материала позволяет решить проблему дефицита учебного времени, интенсифицировать учебный процесс, не перегружая учащихся.

В методической литературе часто встречаются следующие термины: «обучение через задачи», «обучающая система задач», «обучающая цепочка (связка) задач», «метод целесообразно подобранных задач» (термин С.И. Шохор-Троцкого), «метод подготовительных задач» и др. Они употребляются применительно к изучению теории и решению задач. Так, обучение через задачи может означать метод обучения теоретическому материалу или метод обучения решению некоторых задач. Обучающая система задач может быть определена как совокупность задач, таких, что решение первой из них подготавливает решение второй, решение первых двух задач – решение третьей и т.д.

Приведем пример цепочки взаимосвязанных задач (IX класс).

В треугольнике ABC найти высоту, проведенную к стороне AC , если:

- 1) площадь $S = \frac{1}{2}$, $AC = 5$; 2) $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$,

$AB = 6$, $BC = 8$; 4) $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AB = 5$, $BC = 12$.

Убедитесь, что решение первой задачи входит как часть в решение второй задачи. Решение третьей задачи аналогично решению второй, если заметить, что условие $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ эквивалентно тому, что угол B – прямой. Решение четвертой задачи также аналогично решению второй, поскольку условие $AC^2 = AB^2 + BC^2$ означает, что угол B – прямой. Приведите другие примеры обучающей системы задач из учебников математики для V–VI классов.

6.6. Дополнительные классификации. Внутри рассмотренной выше классификации задач возможны и другие, в том числе и те, которые хорошо известны в методике преподавания математики. Различают стандартные и нестандартные задачи. К *стандартным* относятся задачи, которые имеют определенный алгоритм решения (*алгоритмически разрешимые задачи*). Задачи, не имеющие общего алгоритма решения, называются *нестандартными*. Нестандартные задачи имеют отчетливо выраженную развивающую функцию. Функции решаемой стандартной задачи зависят от того, какими теоретическими знаниями обладают учащиеся к моменту ее решения. Если учащимся известен алгоритм решения этой задачи, то ее можно считать *шаблонной*. Если к моменту решения стандартной задачи общий метод ее решения не известен, то такая задача является *нешаблонной* (при ее решении необходимо обнаружить общий метод решения или применить какой-либо искусственный прием). Нестандартные и нешаблонные задачи по существу выполняют одни и те же функции в обучении.

Пример стандартной, шаблонной и нешаблонной задачи. Примером стандартной задачи служит задача на нахождение корней квадратного уравнения. Если формула корней учащимся известна, то она является шаблонной. в противном случае – нешаблонной. Примером нестандартной задачи – любая задача на доказательство.

7. Управление поиском решения задач

7.1. Ориентировочная основа действия (ООД) как средство управления. Теория поэтапного формирования умственных действий опирается на известные положения Л.С. Выготского и А.Н. Леонтьева о своеобразии формирования умственных действий. Сущность их состоит в том, что внешние материальные действия постепенно преобразуются (интериоризируются) во внутренние, умственные действия.

Этот процесс имеет пять этапов. Исследования П.Я. Гальперина и его сотрудников показали, что решающую роль в формировании действия играет ООД. Полнота и правильность овладения ООД определяют быстроту и качество формируемого действия и характер его исполнительской части (таблица 10.10).

Таблица 10.10

Основные положения теории поэтапного формирования умственных действий по П.Я. Гальперину

Этапы	Характеристика этапа
1	Предварительное ознакомление с действием. Ученикам разъясняют цель действия, указывают, на что надо ориентироваться при выполнении действия, как его выполнять.
2	Учащиеся уже выполняют действие, но пока во внешней, материализованной, развернутой форме и усваивают содержание действия (состав всех операций, правило выполнения).
3	Внешнеречевой этап, на котором все элементы действия представлены в форме внешней речи (устной или письменной). Действие претерпевает дальнейшее обобщение и сокращение.
4	Этап «внешней речи про себя» – требует выполнения действия в форме проговаривания про себя. Происходит дальнейшее обобщение и свертывание действия.
5	Умственный этап – связан с выполнением действия во внутренней речи. Учащийся уже сам и выполняет, и контролирует действие. Действие максимально сокращается и автоматизируется.
Типы ООД	Характеристика типа ООД
1 тип	Характеризуется своей неполнотой, ориентиры представлены в конкретном виде и выделяются самим учеником путем многих проб. Само действие формируется медленно, с большим количеством ошибок.
2 тип	Включает все условия, необходимые ученику для выполнения действия. Условия задаются ученику в готовом виде, в конкретной форме, и формирование действия идет быстро и безошибочно.
3 тип	Имеет полный состав, ориентиры даны в обобщенном виде, характерном для целого класса явлений. Но при этом ориентировочная основа действия составляется самим учащимся с помощью общего метода, который ему дает учитель. Действию, сформированному на основе этого типа ориентировки, присущи быстрота и безошибочность формирования, большая устойчивость и ширина переноса.

Ориентировочная часть действия (как отдельный акт мышления) и представляет, таким образом, **аппарат управления** действием.

7.2. *Общие и специальные эвристические методы.* К методам первоочередного уровня применения мы относим анализ, синтез и их сочетание – аналитико-синтетический метод (рис. 10.9).

Если непосредственное применение анализа и синтеза не приводит к обнаружению метода решения задачи, то привлекаются эвристические методы второго уровня использования – методы моделирования и сведения задачи к подзадачам.

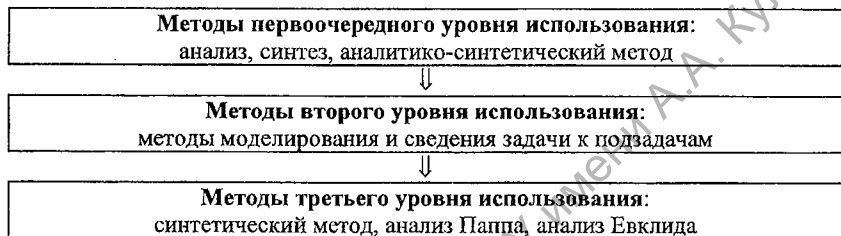


Рис. 10.9

На завершающей стадии поиска решающую роль играют специальные эвристические методы – методы третьего уровня использования: синтетический метод (дедуктивный вывод следствий из условий задачи), анализ Паппа (дедуктивный подбор условий, достаточных для требования задачи), анализ Евклида (дедуктивный вывод следствий из требования задачи).

7.3. *Моделирование процесса поиска решения задач: обобщенные и конкретные модели.* Широкое применение в процессе решения задач находит прием сравнения и, особенно, аналогия – специфический вид сравнения, позволяющий устанавливать подобие явлений. Аналогия дает основание для выводов об эквивалентности в определенных отношениях одного объекта другому. Тогда более простой по структуре и доступный изучению объект становится моделью более сложного объекта, именуемого прототипом (оригиналом). Открывается возможность переноса информации по аналогии от модели к прототипу. В этом сущность одного из специфических методов теоретического уровня – метода *моделирования*. Аналогия может принимать вид изоморфизма, гомоморфизма или изоморфизма-

лизма: *изоморфизм* – отношение между объектами, имеющими различный состав, но тождественную или подобную структуру, когда каждому элементу одного объекта соответствует один элемент другого; *гомоморфизм* – структурное сходство двух объектов, когда каждому элементу одного может соответствовать группа элементов другого; *изофункционализм* – сходство функций или действий объектов.

Модель поиска решения задачи предполагает моделирование данной задачи. Модель задачи – вспомогательный объект, выбранный или преобразованный субъектом в познавательных целях, дающий новую информацию о решаемой задаче. Моделирование в процессе поиска решения задачи служит основной задаче – найти ее решение. Субъект, изучая условия задачи, ищет на основе ключевой идеи их новые сочетания, делает их мысленную компоновку, т.е. моделирует потребное состояние изучаемой системы. Создаются *модели-гипотезы*, вскрывающие механизмы связи между условиями задачи. Проверенные модели-гипотезы превращаются в *разрешающие модели*, приводящие к решению задачи, во многом сохраняющие свой модельный характер. Безусловно, любая модель всегда беднее прототипа, она отражает лишь его отдельные стороны и связи, так как теоретическое моделирование всегда включает идеализацию. Поскольку все компоненты процесса поиска решения задачи непрерывно движутся и изменяются, условием оптимизации является непрерывная корректировка модельной формы задач, эвристических средств поиска на основе анализа промежуточных результатов этого процесса. Преодоление указанных выше противоречий делает поиск управляемым и способствует его оптимизации.

7.4. *Ряды конкретизаций моделей поиска.* Конкретизация – логическая форма, являющаяся противоположностью абстракции. Представляет собой мыслительный процесс воссоздания предмета из вычлененных ранее абстракций. При конкретизации понятий происходит обогащение их новыми признаками. Конкретизация, направленная на воспроизведение развития предмета как целостной системы, становится особым методом исследования. Конкретным здесь называется единство многообразия, сочетание многих свойств. Конкретизация моделей поиска образует своего рода *ряд моделей* с постепенным наращиванием степени конкретности. Есть смысл говорить о *полном ряде моделей конкретного уровня*, понимая под ним последовательность моделей поиска, начинающуюся моделями-гипотеза-

ми и заканчивающуюся разрешающими моделями. В реальном процессе поиска полный ряд моделей может быть использован только частично, если для ученика окажется достаточным использование (возможно избирательное) только части моделей этого ряда.

7.5. Управление поиском решения задач: от микросистемы задач с самонаведением к обобщенной (универсальной) модели, от нее к конкретным моделям, цепочка которых завершается разрешающей моделью поиска. Управление поиском решения задач остается в центре внимания теории и практики обучения. В этой связи широкой известностью пользуется книга Д.Пойа [40] и приводимая в ней таблица эвристических правил. **На наш взгляд, указания и вопросы, предложенные в данной таблице, адресованы в большей мере не учащимся, а учителю.** Для учащихся же вопросы этой таблицы чаще всего оказываются непонятными. Указания типа «Сформулировать отношение между неизвестным и данными. Преобразовать неизвестные элементы. Решить часть задачи. Сформулировать задачу иначе» и др. носят общий и излишне абстрактный характер. Анализ методической литературы показывает, что созданию цепочек моделей поиска – эвристических таблиц конкретного, «ученического» плана не уделяется должного внимания. Между тем потребность в таких таблицах существует. Необходимы эвристические таблицы, ориентированные на специфику конкретной учебной темы, определенные виды задач. Их можно рассматривать как первый этап конкретизации таблицы Пойа. Необходимы и другие, последующие этапы конкретизации, в том числе и этапы, ориентированные на определенный набор задач (таблицы 10.11-15). В методических разработках эта цепочка конкретизаций должна обладать завершенностью, в том смысле, что она позволяет вычерпать всю информацию, необходимую для нахождения решения задачи. Для части учащихся, если они уже нашли решение задачи, эта полнота может оказаться избыточной. «Преждевременное» решение учащихся задачи – хороший признак эффективности эвристической таблицы, ее приспособленности к особенностям учебной темы и возрастным возможностям учащихся. По мере наращивания навыка учащиеся, естественно, будут использовать только часть таблицы. Эта часть может быть либо начальной, либо иной – целенаправленно избирательно выбранной. Во всяком случае, оборвать цепочку конкретизаций несложно – это совершается самопроизвольно. Другое дело – обеспечить полноту

эвристической таблицы, которая помогает избежать ситуации, когда задача остается не решенной, а возможности таблицы уже закончились. Необходимые конкретизации (конкретизации по потребности) призван уметь выполнять каждый учитель. Данное умение мы рассматриваем как необходимую составляющую его методического мастерства.

Таблица 10.11

**Универсальная модель поиска –
«Эвристическая таблица-1»**

Этапы поиска	ООД обобщенного плана (ориентация на тему отсутствует)
I. Изучите задачу	1. Первое чтение и анализ задачи. Читая задачу, выделяйте (по отдельности) все условия и все требования задачи: о каких фигурах и их элементах говорится в задаче? что дано в задаче? что еще дано? что требуется найти или доказать? какое из отношений в задаче вы посчитали бы основным? 2. Повторный анализ с параллельно осуществляемым синтезом. Графическое моделирование. Читайте задачу по частям (по одному ее условию) и отразите каждое условие на чертеже: прочитали одну часть задачи, отразите ее на чертеже; прочитали другую часть задачи – отразите ее на чертеже и т.д. После выполнения чертежа к задаче: проверьте, все ли условия задачи отражены на нем. Правильно ли выполнен чертеж? Какое из отношений в задаче вы посчитали бы основным? 3. Дополнительный анализ и синтез. Моделирование задачи в виде схемы, таблицы. Запишите кратко задачу: еще раз убедитесь в том, что никакое условие и требование задачи не оказалось забытым. Запись задачи в виде схемы, таблицы часто помогает выделить основное соотношение в задаче. Какое из отношений в задаче вы посчитали бы основным?
II. Поиск решения задачи	4. Обдумайте план решения задачи. Актуализация знаний. Не торопитесь проводить сразу вычисления. Прикиньте, какие теоретические сведения окажутся полезными при решении задачи. Синтетический метод поиска. Подумайте над тем, с чего начать решение, какую величину можно найти вначале. Затем попытайтесь рассуждать таким образом: допустим, что эту величину нашли, каким образом ею можно воспользоваться дальше? Комбинируйте условия задачи в пары и

Этапы поиска	ООД обобщенного плана (ориентация на тему отсутствует)
II. Поиск решения задачи	выясняйте, что можно найти с помощью этих условий. Повторяйте этот метод как можно чаще! Ориентируйтесь при этом на основное отношение в задаче. Не заметили ли вы возможность применения некоторого математического метода (каковы его признаки, схемы и условия применения?). 5. Дополнительное графическое моделирование. Решение до конца не просматривается. Как быть? Возможно, для решения задачи требуется дополнительное построение. Какое? Возможно, что искомую величину удобнее найти из другого треугольника...Какого? 6. Повторная актуализация знаний. Все ли условия задачи использовали при ее решении? Какие понятия используются в задаче? Как они определяются? Какие теоремы, связанные с ними, вам известны? 7. И снова к чертежу. Анализируйте чертеж, подмечайте имеющиеся на нем закономерности. 8. Не забыли ли вы, к чему следует стремиться? Требование задачи никогда не следует забывать. Приближаетесь ли вы к требованию задачи? 9. Аналитический метод поиска (анализ Евклида). А если обозначить искомую величину через x? Попытайтесь выразить через x другие величины.... Нельзя ли составить уравнение? 10. Аналитический метод поиска (анализ Паппа). Возможно, полезно задать вопрос: «Чтобы ответить на вопрос задачи, что достаточно знать?» Допустим, что надо знать a и b. Поставьте этот же вопрос применительно к величинам a и b. Повторяйте этот вопрос до тех пор, пока не обнаружится, что нахождение промежуточных неизвестных величин сводится к величинам известным, данным в условии задачи.
III. Запись найденного решения	11. Если задача решена, то обдумайте, как кратко записать ее решение. Пользуйтесь математической и логической символикой. Разбейте решение на отдельные шаги и пронумеруйте их.
IV. Проверка решения	12. Обратите внимание на то, правдоподобен ли полученный вами ответ. Приучайте себя к самоконтролю и самопроверке. Какие этапы решения задачи вызывают сомнение? Проверьте их.
V. Задача решена. Что дальше?	13. Понравилось ли вам найденное решение? Нельзя ли задачу решить проще, оригинальнее? Полезно иметь в виду, что решение задачи различными способами, как правило, оценивается высшим баллом. 14. Вспомните, какие из правил этой таблицы вам помогли в решении задачи.

**Модель с минимальной конкретизацией –
«Эвристическая таблица-2»**

Этапы поиска	ООД с 1-й ориентацией на учебную тему (если таблица-1 не помогла)
I. Изучите задачу	Графическое моделирование (материализованные действия): 1. Если в задаче говорится о центроиде треугольника, то проведите медианы; если о центре окружности, описанной около треугольника, – проведите серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, радиус окружности; если о центре вписанной окружности – проведите биссектрисы треугольника, отметьте точки касания, проведите радиус окружности; если об ортоцентре треугольника – проведите высоты треугольника и т.д. 2. Обратите внимание на то, как удобнее оказалось выполнение чертежа: придерживаясь последовательности условий, данной задачи, или несколько другой последовательности. Возможно, уже это подскажет некоторые соображения по решению задачи, поможет выделить ее основное соотношение.

Таблица 10.13

**Модель с дополнительной частичной конкретизацией –
«Эвристическая таблица-3»**

Этапы поиска	ООД со 2-й ориентацией на учебную тему (если таблицы 1 и 2 не помогли)
II. Поиск решения задачи	Графическое моделирование (материализованные действия): 1. Какой прямоугольный треугольник можно построить, в который бы входил искомый радиус описанной окружности и некоторые данные элементы? 2. Какой прямоугольный треугольник можно построить, в который бы входил искомый радиус вписанной окружности и некоторые данные элементы?

Таблица 10.14

**Модель с максимальной конкретизацией –
«Эвристическая таблица-4»**

Этапы поиска	ООД с 3-й ориентацией на учебную тему (если предыдущие таблицы не помогли)	
II. Поиск решения задачи	Графическое моделирование (перевод материализованных действий в мысленный план). Типичные ситуации для описанной окружности: рис. 10.10-12.	Графическое моделирование (перевод материализованных действий в мысленный план) Типичные ситуации для вписанной окружности: рис. 10.13-15.

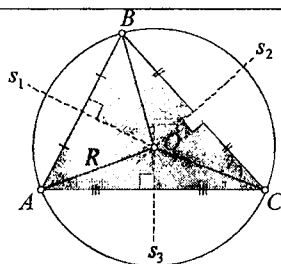


Рис. 10.10

Рисунок 10.6 выполняется учеником под руководством учителя (построения сопровождаются словесными пояснениями учителя и ученика).

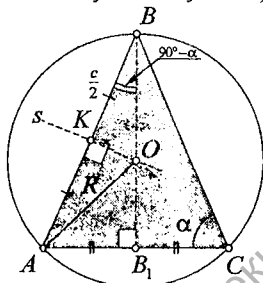


Рис. 10.11

Рисунок 10.7 выполняется учеником самостоятельно с последующей коррекцией учителем (построения сопровождаются им словесными пояснениями).

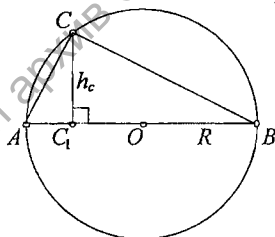


Рис. 10.12

Рисунок 10.8 выполняется учеником самостоятельно (построения сопровождаются им словесными пояснениями).

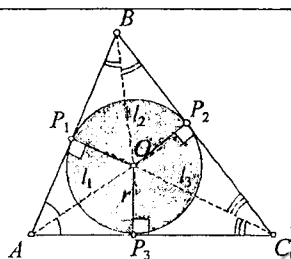


Рис. 10.13

Рисунок 10.13 выполняется учеником под руководством учителя (построения сопровождаются словесными пояснениями учителя и ученика).

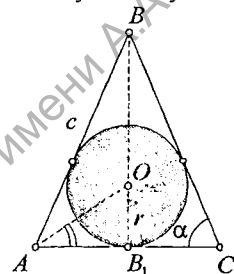


Рис. 10.14

Рисунок 10.14 выполняется учеником самостоятельно с последующей коррекцией учителем (построения сопровождаются им словесными пояснениями).

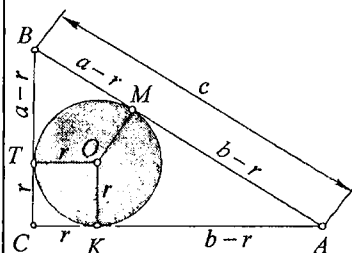


Рис. 10.15

Рисунок 10.15 выполняется учеником самостоятельно (построения сопровождаются им словесными пояснениями).

З а м е ч а н и е. Сопровождение словесными пояснениями построений необходимо для планомерного перевода материализованных действий в умственный план.

Разрешающая модель – «Эвристическая таблица-5»

Этапы поиска	ООД с 4-й ориентацией на учебную тему (если предыдущие таблицы не помогли)
II. Поиск решения задачи	1. Признаки какого математического метода можно заметить в процессе анализа текста задачи, выполнения чертежа, краткой записи задачи, выполнения дополнительных построений, отыскания перспективных треугольников? 2. Каковы условия применения выбранного вами математического метода? Имеются ли эти условия в наличии? Можно ли их заметить в тексте задачи? по краткой записи? по чертежу? подсказываются ли они предыдущими задачами?

Таким образом, модель управления поиском решения задач определенного класса (определенной учебной темы) представляется нами в виде совокупности моделей (рис. 10.16). Исходной моделью управления поиском в этой совокупности служит микросистема задач, выступающая в качестве средства самонаведения, затем по необходимости привлекается универсальная модель – модель поиска решения любой задачи (по любой теме), далее в нее «вкладывается» ряд конкретных моделей поиска (ориентированных на определенный тип задач, определенную учебную тему, определенную микросистему задач), заключительной моделью в этом ряду является разрешающая модель.

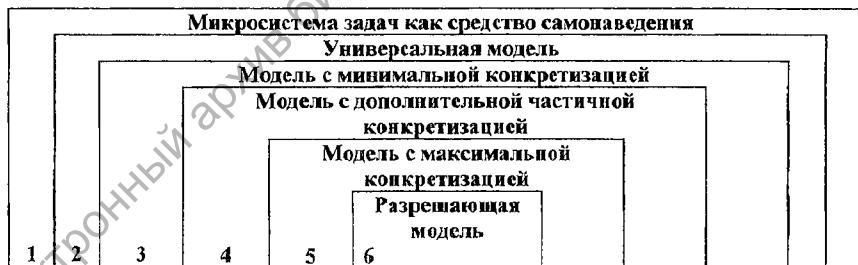


Рис. 10.6

В заключение отметим, что большинство приемов поиска решения задач базируется на достаточно серьезном логическом содержании, поэтому овладение ими учащимися возможно лишь при условии систематического и целенаправленного их применения. Полез-

но практиковать в этих целях краткий методологический комментарий, разъясняющий учащимся суть применяемых приемов поиска решения задач.

7.6. Пример поиска решения задачи. Рассмотрим конкретную задачу.

Задача. Теплоход прошел 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 ч. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Краткая запись задачи

9 км – путь, пройденный теплоходом по озеру;

20 км – путь, пройденный теплоходом по реке;

1 ч – время движения теплохода по озеру и реке;

3 км/ч – скорость течения реки;

x км/ч – скорость теплохода при движении по озеру (собственная скорость теплохода).

Поиск решения задачи с помощью анализа Евклида. В целях мобилизации внимания учащихся, достижения большего проникновения в содержательную сторону задачи полезно начать поиск ее решения с несколько неожиданного вопроса: «Втекает река в озеро или вытекает из него? Нарисуйте схему движения теплохода». Если теплоход сначала плыл по озеру, а затем по течению реки, то река вытекает из озера и схема движения теплохода будет такой, как показано на рис. 10.17. Это обстоятельство имеет существенное значение для решения задачи. Дальнейший поиск направляется следующими вопросами:

– Известно ли время движения теплохода на всем пути? (Известно. Оно составляет 1 ч.)

– Из чего складывается это время? (Оно складывается из времени движения теплохода на участках AB и BC .)

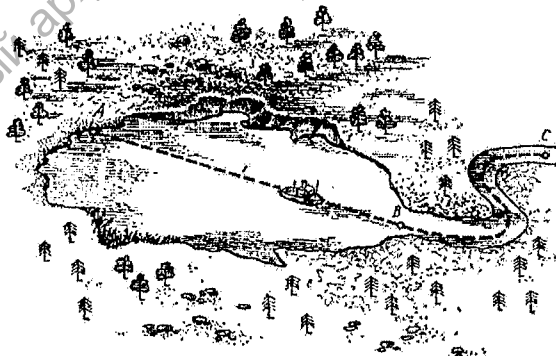


Рис. 10.17

– К составлению какого уравнения будем стремиться? (Искомое уравнение имеет вид: $\dots + \dots = 1$.)

– Известно ли время движения теплохода на каждом из участков пути? (Неизвестно.)

– Зная путь AB , можно ли выразить через x время движения теплохода по озеру? (Можно. Оно равно $\frac{9}{x}$ ч.)

– Как выразить через x время движения теплохода на участке BC ? (Для этого надо выразить через x скорость теплохода по течению реки.)

– Из чего складывается скорость теплохода по течению реки? (Она равна сумме собственной скорости теплохода и скорости течения реки.)

– Что можно сказать о собственной скорости теплохода? (Она равна скорости теплохода по озеру, так как вода в озере считается стоячей.)

– Как выразить скорость движения теплохода по реке, если собственная скорость теплохода x км/ч (Она равна $(x + 3)$ км/ч.)

– Зная путь BC , можно ли выразить через x время движения теплохода по реке? (Оно равно $\frac{20}{x+3}$ ч.)

– Какое равенство можно записать? (Сложить время движения теплохода по озеру и по реке и приравнять его к 1 ч: $\frac{9}{x} + \frac{20}{x+3} = 1$.)

Поиск решения закончен. Он направлялся вопросами типа: «Зная то-то, как можно выразить (найти) то-то?». Именно таким путем проводится анализ Евклида: из условия задачи и допущения, что искомая величина равна x , выводят следствия до тех пор, пока не получится уравнение, связывающее искомую величину с данными.

8. Задания для практических и лабораторных занятий

Выполнение следующих заданий рекомендуется сопровождать деловой игрой.

Задание 1. Воспользуйтесь анализом Евклида для отыскания решения текстовой задачи: «На станции стояло два товарных состава. Число вагонов в первом составе в 1,5 раза меньше числа вагонов во втором составе. От первого состава отцепили 5 вагонов и прицепили их ко второму составу. После этого во втором составе вагонов стало в 2 раза больше, чем в первом. Сколько вагонов было в каждом составе?» (VI класс).

Задание 2. Воспользуйтесь анализом Евклида для отыскания решения текстовой задачи: «В одном баке 104 л бензина, а в другом

72 л. Из первого бака каждый час расходовали 3 л бензина, а из второго – 5 л. Через сколько часов во втором баке останется бензина в 2,5 раза меньше, чем в первом?» (VI класс).

Задание 3. Воспользуйтесь анализом Евклида для отыскания доказательства неравенства: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, где $a > 0$; $b > 0$; $a \neq b$ (VIII класс).

Задание 4. Воспользуйтесь анализом Евклида для отыскания доказательства тригонометрического тождества: $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} = 1$ (X класс).

Задание 5. Воспользуйтесь анализом Евклида при отыскании решения задачи на построение: «Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам» (VIII класс).

Задание 6. Воспользуйтесь анализом Евклида при отыскании доказательства векторного равенства: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где M – середина отрезка AB ; O – произвольная точка плоскости (IX класс, факультативные занятия).

Задание 7. Воспользуйтесь анализом Паппа при отыскании решения стереометрической задачи: «Длина прямоугольного параллелепипеда 8 м, ширина 6 м, а высота 12 м. Найдите сумму площадей его наибольшей и наименьшей граней» (V класс).

Задание 8. Воспользуйтесь анализом Паппа при отыскании решения текстовой задачи: «Пионеры прошли 75 км по местам боевой славы. В первый день они прошли $\frac{3}{25}$ этого расстояния, а во второй день $\frac{4}{25}$. Сколько километров прошли пионеры за эти 2 дня?» (V класс).

Задание 9. При решении геометрических задач на вычисление можно использовать следующую схему.

- 1) построить чертеж-набросок;
- 2) обозначить одну из искоемых величин через x ;
- 3) выразить через x неизвестные величины;
- 4) составить и решить уравнение;
- 5) записать и проверить ответ.

При решении задач на доказательство может быть применена такая схема:

- 1) построить чертеж;
- 2) выделить условие и заключение задачи, записать их;
- 3) вспомнить определения и свойства геометрических фигур, о которых идет речь в задаче;

4) из условия задачи сделать логические выводы, стремясь получить ее заключение (проследить, чтобы все данные задачи были использованы).

Приведите примеры применения этих схем при решении 2-3-х задач. Составьте схему решения задач на построение.

Задание 10. Общие схемы решения задач могут быть ориентированы на применение отдельных математических методов. Например, для решения задач на доказательство координатным методом может быть предложена следующая схема:

- 1) построить чертеж;
- 2) расположить систему координат удобным образом;
- 3) записать координаты точек;
- 4) записать условие и заключение задачи на языке координат;
- 5) выполнить переход от условия задачи к ее заключению.

Приведите примеры применения этой схемы при изучении теоретического материала и решении задач.

Задание 11. Выше рассматривались различные приемы обучения учащихся решению задач. При всей их важности для методической подготовки учителя все же следует отметить, что ими не исчерпывается весь «арсенал» методики обучения учащихся решению задач. По мере накопления опыта работы учитель может обращаться к более специальным приемам. К их числу относятся, например, *поиск решения задачи в пространстве состояний* и *метод редукции (сведения задачи к подзадам)*, в которых традиционные приемы поиска решения задач представляются в нетрадиционной форме — в виде графов. Ознакомьтесь с указанными методами по источнику [92].

Тема 11

ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ. УРОК МАТЕМАТИКИ

1. Что такое урок?
2. О классификации уроков
3. Многообразие структур урока
4. Требования к уроку
5. Подготовка урока
6. Составление конспекта урока

7. Факультативные занятия и внеклассная работа

8. Задания для практических и лабораторных занятий

1. Что такое урок?

По данным Ю.А. Конаржевского [22] за период своей профессиональной деятельности учитель в среднем проводит более 25 тысяч, а ученик за время учебы посетит не менее 10 тысяч уроков. В характеристике данного автора урок является живой клеточкой учебно-воспитательного процесса, все самое важное и самое главное для школьника совершается на уроке. Каждый новый урок – это ступенька в знаниях и развитии ученика, новый вклад в формирование его умственной и моральной культуры. От урока тянутся сотни не замечаемых с первого взгляда незримых связей к внеклассной и внешкольной работе, к взаимоотношениям учителей и родителей, к отношениям в педагогическом коллективе, к содержанию и направленности методической работы в школе, к внутришкольной культуре, к формированию новых технологий обучения и воспитания и освоению передового опыта – словом, ко многим сторонам, звеньям и явлениям школьной жизни. Урок – не самоцель. Это инструмент воспитания и развития личности. И если мы хотим перевести нашу школу в режим развития, мы должны в совершенстве овладеть этим инструментом, научиться более рационально его использовать, в совершенстве освоить управление им.

Урок является одним из самых многоаспектных понятий, все стороны которого чрезвычайно трудно охватить одним каким-либо определением. Учитывая это, определим понятие «урок» посредством перечисления его наиболее существенных признаков. Итак, что такое урок?

1. Урок – *основная форма организации учебной работы*, при помощи которой осуществляется воспитание и развитие личности. Как бы не менялась его форма, структура, технология, он и в наши дни играет не ослабевающую роль своего рода центра, вокруг которого группируются все другие формы учебных занятий.

2. Урок – *законченный отрезок педагогического процесса*, ограниченный хронологическими рамками, целями, содержанием, составом учащихся и т.п. Он является *элементарной структурообразую-*

щей единицей учебно-воспитательного процесса, на базе которой раскрывается и реализуется известная часть учебной программы и отражается конкретный этап ее усвоения. Урок представляет собой динамическую процессуальную систему, отражающую в себе все многообразные многоплановые стороны учебно-воспитательного процесса. Каждый отдельно взятый урок органически связан с предыдущими и последующими уроками, он звено в системе уроков. *Сущность урока* составляет организация учителем разнообразной работы учащихся по усвоению ими новых знаний, умений и навыков, в ходе которой осуществляется их воспитание и развитие.

3. *Современный урок* должен строиться на основе самостоятельности учащихся в учебном процессе, их самоорганизации, развития их личности, коллективной учебной деятельности, ответственности учеников. Современный урок – это прежде всего урок, на котором учитель умело использует все возможности для развития личности ученика, ее активного умственного роста, глубокого и осмысленного усвоения знаний, для формирования ее нравственных основ. Совершенно очевидно, что для осуществления всех этих и многих других сложных задач не может быть раз и навсегда установленного типа урока, с застывшими навечно этапами и стандартной последовательностью их осуществления. Исходная идея современного урока: единство обучения, воспитания и развития.

4. Урок – *система социальная*, которая может существовать только за счет взаимодействия учителя с учащимися и учащихся друг с другом. Это система, которая может успешно функционировать не столько на основе передачи учебной информации ученикам от учителя, сколько на основе организации учителем деятельности учащихся по усвоению этой информации. Сложность феномена, именуемого уроком, заключается в том, что он, протекая в школе, крепко-накрепко связан с педагогическими процессами, имеющими место в семье. Последние же далеко не всегда усиливают результативность успехов, особенно в воспитательном и развивающем аспекте.

5. Урок, как и весь учебно-воспитательный процесс в школе, *обуславливается социально-экономическими потребностями общества*, уровнем его развития, самодостаточности его экономики, нравственными и моральными ценностями общества. Одновременно с этим школа – не пассивный придаток к другим сферам жизнедеятельности общества, она призвана, прежде всего через урок, опере-

жать его запросы, задавать тон, готовить и возвращать инициативный и творческий тип личности, влияя тем самым на все общество.

2. О классификации уроков

По образовательным целям (наиболее распространенная классификация) уроки делятся на уроки овладения новыми знаниями (мировоззренческими, методологическими, теоретическими, практическими), уроки формирования и усвоения умений и навыков, уроки углубления, систематизации и обобщения знаний, уроки комплексного применения знаний, контрольно-проверочные уроки.

По развивающим целям возможно такое деление уроков: уроки по развитию умственных качеств (глубины, критичности, гибкости, широты ума, сообразительности и быстроты мышления и т.д.); уроки развития математической речи (внутренней, внешней, устной, письменной); уроки по развитию коммуникативных способностей, умению выстраивать нормативные отношения; уроки по развитию интеллектуальных умений (умений анализировать, синтезировать, пользоваться индукцией, дедукцией, аналогией, обобщением, конкретизацией, моделированием, классификацией и т.д.); уроки по развитию памяти (оперативной, долговременной, механической, логической, запоминание общих методов и способов решения задач, крупных порций учебного материала и т.д.); уроки по развитию способности учащихся к осмысленному восприятию, пониманию и применению знаний в различных ситуациях; уроки по развитию исследовательских и творческих способностей.

По воспитательным целям возможно такое деление уроков: уроки по воспитанию потребности в знаниях (потребности в изучении мировоззренческих, методологических, теоретических, практических знаний, в частности, потребности в доказательстве); уроки по воспитанию потребности в овладении различными практическими умениями; уроки по воспитанию потребности в обновлении и углублении творческого подхода к процессу учения; уроки по воспитанию положительного эмоционально-ценностного отношения к изучаемому учебному материалу; уроки по воспитанию положительных моральных, нравственных, эстетических качеств личности.

По содержанию обучения уроки делятся на уроки геометрии,

алгебры и начал анализа, интегрированные уроки (по курсу математики V–VII классов), уроки по отдельной учебной теме (уроки по изучению отдельных понятий, фактов, доказательств, решения задач); уроки по отдельной однопредметной содержательной линии; уроки по нескольким однопредметным содержательным линиям; уроки по межпредметным содержательным линиям.

По методам обучения могут выделяться информационно-рецептивные, репродуктивные, уроки проблемного изложения, уроки частичного поиска, уроки исследовательской учебной деятельности, уроки со словесным источником знаний, наглядным источником знаний, уроки с практическим источником знаний, уроки с явным применением логических методов познания.

По средствам обучения можно выделить уроки с применением работы учащихся с учебником, учебно-дидактическими материалами, компьютером (компьютерный учебник, компьютерная графика, компьютерный контроль знаний), другими техническими средствами обучения.

По форме обучения уроки могут делиться на уроки с фронтальной формой учебной работы, с парной и групповой формами, урок-лекция, урок-семинар, урок-практикум, урок-лабораторная работа, урок-зачет (тематический, итоговый), урок-консультация, урок-контрольная работа (устная, письменная), уроки с применением внутренней дифференциации и индивидуализации обучения, урок с использованием различных форм внеклассной работы, урок с использованием деловой игры и т.д.

Приблизительно можно подсчитать многообразие уроков, выделяемых на основании различных целей обучения. Выше были высказаны в форме предикатов 9 образовательных, 33 развивающих и 11 воспитательных целей. По правилу, известному в комбинаторике, общее число уроков с такими целями равно $9 \cdot 33 \cdot 11 = 3267$. Далее было выделено 12 уроков в зависимости от содержания, 10 уроков – по методам обучения, 4 урока – по средствам обучения и 16 видов уроков – по форме обучения. Общее многообразие уроков равно $3267 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 16 = 25090560$. Как видно, получаем довольно внушительную количественную характеристику этого многообразия. Если признаки, на основании которых выделяются уроки, будут формулироваться не в виде предикатов, а в виде конкретных высказываний, то общее число уроков возрастет на несколько порядков. организо-

вызвать такое количество уроков в определенную систему возможно только на основе компьютерной технологии. В этой связи отметим, что классно-урочная система обучения не только не исчерпала себя, но и более того – ее потенциал использован не в полном объеме, а наиболее важные этапы ее развития еще предстоит пройти, возможно, в данном столетии.

К вариативной части классно-урочной системы обучения можно отнести уроки с использованием некоторых форм внеклассной работы (урок-КВН, урок-спектакль, урок-диспут и т.д.), уроки с использованием элементов фантазии (урок-сказка, урок «с участием инопланетян» и т.д.), уроки в форме соревнований, занимательных и деловых игр (викторина, эстафета, конкурс, турнир и т.д.), уроки самостоятельной работы с использованием технологий программированного и модульного обучения (в том числе с использованием компьютера как средства обучения), уроки крупноблочного изложения учебного материала, уроки по профессиональной ориентации учащихся, уроки общественного смотра знаний, интегрированные уроки (уроки с межпредметным содержанием) и т.д.

3. Многообразие структур урока

Структура урока – это совокупность различных вариантов взаимодействия между элементами урока, возникающая в процессе обучения и обеспечивающая его целенаправленную действенность. Сведем структуры различных уроков в таблицы 11.1-2.

Таблица 11.1

**Структура уроков различных типов
(в характеристике В.С.Кукушина [25])**

№ п/п	Тип урока	Структура урока
1	Урок изучения нового материала	• первичное введение материала с учетом закономерностей процесса познания при высокой мыслительной активности учащихся; • указание на то, что учащиеся должны запомнить; • мотивация запоминания и длительного сохранения в памяти;

№ п/п	Тип урока	Структура урока
1	Урок изучения нового материала	• сообщение либо актуализация техники запоминания (работа с опорными для памяти материалами, смысловая группировка и т. д.); • первичное закрепление под руководством учителя посредством прямого повторения частичных выводов; • контроль результатов первичного запоминания; • регулярное систематизирующее повторение через короткие, а затем более длительные промежутки времени в сочетании с различными требованиями к воспроизведению, в том числе и с дифференцированными заданиями; • внутреннее повторение и постоянное применение полученных знаний и навыков для приобретения новых; • частое включение опорного материала для запоминания в контроль знаний, регулярная оценка результатов запоминания и применения.
2	урок закрепления и развития знаний, умений, навыков	• сообщение учащимся цели предстоящей работы; • воспроизведение учащимися знаний, умений и навыков, которые потребуются для выполнения предложенных заданий; • выполнение учащимися различных заданий, задач, упражнений; • проверка выполненных работ; • обсуждение допущенных ошибок и их коррекция; • задание на дом (если это необходимо).
3	урок формирования умений и навыков	• постановка цели урока; • повторение сформированных умений и навыков, являющихся опорой; • проведение проверочных упражнений; • ознакомление с новыми умениями, показ образца формирования; • упражнения на их освоение; • упражнения на их закрепление; • тренировочные упражнения по образцу, алгоритму, инструкции; • упражнения на перенос в сходную ситуацию; • упражнения творческого характера; • итог урока; • задание на дом.

№ п/п	Тип урока	Структура урока
4	урок повторения	• организация начала урока; • постановка образовательных, воспитательных, развивающих задач; • проверка домашнего задания, направленного на повторение основных понятий, умозаключений, основополагающих знаний, умений, способов деятельности (практической и мыслительной). На предыдущем уроке, зная о предстоящем повторении, нужно подобрать соответствующее домашнее задание; • подведение итогов повторения, проверка результатов учебной работы на уроке; • задание на дом.
5	урок проверки знаний	• организация начала урока. Здесь необходимо создать спокойную, деловую обстановку. Дети не должны бояться проверочных и контрольных работ или чрезмерно волноваться, так как учитель проверяет готовность детей к дальнейшему изучению материала; • постановка задач урока. Учитель сообщает ученикам, какой материал он будет проверять или контролировать. Просит, чтобы дети вспомнили соответствующие правила и пользовались ими в работе. Напоминает, чтобы учащиеся обязательно сами проверили свои работы; • изложение содержания контрольной или проверочной работы (задачи, примеры, диктант, сочинение или ответы на вопросы и задания по объему или степени трудности должны соответствовать программе и быть посильными для каждого ученика); • подведение итогов урока. Учитель выбирает хорошие работы учащихся, анализирует допущенные ошибки в других работах и организует работу над ошибками (иногда на это уходит следующий урок); • определение типичных ошибок и пробелов в знаниях и умениях, а также путей их устранения и совершенствования знаний и умений.
6	урок применения знаний, умений и навыков	• организация начала урока (психологический настрой учащихся); • сообщение темы урока и его задач; • изучение новых знаний, необходимых для формирования умений;

№ п/п	Тип урока	Структура урока
6	урок применения знаний, умений и навыков	• формирование, закрепление первичных умений и применение их в стандартных ситуациях — по аналогии; • упражнения в применении знаний и умений в измененных условиях; • творческое применение знаний и умений; • упражнение по отработке навыков; • домашнее задание; • итог урока с оценкой проделанной учащимися работы.
7	повторительно-обобщающий урок	• организационный момент; • вступительное слово учителя, в котором он подчеркивает значение материала изученной темы или тем, сообщает цель и план урока; • выполнение учащимися индивидуально и коллективно различного рода устных и письменных заданий обобщающего и систематизирующего характера, вырабатывающих обобщенные умения, формирующих обобщенно-понятийные знания, на основе обобщения фактов, явлений; • проверка выполнения работ, корректировка (при необходимости); • формулирование выводов по изученному материалу; • оценка результатов урока; • подведение итогов; • задание на дом (не всегда).
8	комбинированный урок (как правило, имеет две или несколько дидактических целей)	• организация начала урока; • проверка домашнего задания, постановка цели урока; • подготовка учащихся к восприятию нового учебного материала, т. е. актуализация знаний и практических и умственных умений; • изучение нового материала, в том числе и объяснение; • закрепление материала, изученного на данном уроке и ранее пройденного, связанного с новым; • обобщение и систематизация знаний и умений, связь новых с ранее полученными и сформированными; • подведение итогов и результатов урока; • задание на дом; • подготовка (предварительная работа), необходимая учащимся для изучения новой темы (не всегда).

**Системы уроков, разработанные некоторыми
учителями-новаторами**

№ п/п	Учитель-новатор	Система уроков
1	Н.П. Гузик	1. Уроки теоретического разбора материала учителем. 2. Уроки самостоятельного разбора темы учениками (разбитыми на группы) по заданной программе, планам, алгоритмам. 3. Уроки-семинары. 4. Уроки-практикумы. 5. Уроки контроля и оценки.
2	Р.Г. Хазанкин	1. Урок-лекция по всей теме. 2. Уроки-решения ключевых задач. 3. Урок-консультация. 4. Урок-зачет.

4. Требования к уроку

**Требования к урокам различных типов
(в характеристике В.С. Кукушина [25])**

№ п/п	Тип урока	Требования
I	Дидактические требования к современному уроку	• Четкое формулирование образовательных задач в целом и их составных элементов, их связь с развивающими и воспитательными задачами. Определение места в общей системе уроков. • Определение оптимального содержания урока в соответствии с требованием учебной программы и целями урока, с учетом уровня подготовки и подготовленности учащихся. • Прогнозирование уровня усвоения учащимися научных знаний, сформированных умений и навыков как на уроке, так и на отдельных его этапах. • Выбор наиболее рациональных методов, приемов и средств обучения, стимулирования и контроля, оптимального их воздействия на каждом этапе урока, выбор, обеспечивающий познавательную активность,

№ п/п	Тип урока	Требования
I	Дидактические требования к современному уроку	сочетание различных форм коллективной и индивидуальной работы на уроке и максимальную самостоятельность в обучении учащихся. • Реализация на уроке всех дидактических принципов. • Создание условий успешного обучения учащихся.
II	Психологические требования к уроку	
1	Психологическая цель урока:	• Проектирование развития учащихся в пределах изучения конкретного учебного предмета и конкретного урока; • Учет в целевой установке урока психологической задачи и изучения темы и результатов, достигнутых в предшествующей работе; • Предусмотрение отдельных средств психолого-педагогического воздействия, методических приемов, обеспечивающих развитие учащихся.
2	Стиль урока	• Определение содержания и структуры урока в соответствии с принципами развивающего обучения: – соотношение нагрузки на память учащихся и их мышление; – определение объема воспроизводящей и творческой деятельности учащихся; – планирование усвоения знаний в готовом виде со слов учителя, из учебника, пособия и т.п. и в процессе самостоятельного поиска; – осуществление учителем и учащимися проблемно-эстетического обучения (кто ставит проблему, формулирует ее, кто решает); – учет контроля, анализа, оценки деятельности школьников, осуществляемые учителем, и взаимной критической оценки, самоконтроля и самоанализа учащихся; – соотношение побуждения учащихся к деятельности (комментарии, вызывающие положительные чувства в связи с проделанной

№ п/п	Тип урока	Требования
2	Стиль урока	работой, установки, стимулирующие интерес, волевые усилия к преодолению трудностей и т.д.) и принуждения (напоминание об отметке, резкие замечания, нотации и т.п.); • Особенности самоорганизации учителя: – подготовленность к уроку и главное – осознание психологической цели и внутренняя готовность к ее осуществлению; – рабочее самочувствие в начале урока и в его ходе (собранность, сонастроенность с темой и психологической целью урока, энергичность, настойчивость в осуществлении поставленной цели, оптимистический подход ко всему происходящему на уроке, педагогическая находчивость и др.); – психологический климат на уроке (поддержание атмосферы радостного, искреннего общения, деловой контакт и др.).
3	Организация познавательной деятельности учащихся:	• Определение мер для обеспечения условий продуктивной работы мышления и воображения учащихся; – планирование путей восприятия учениками изучаемых объектов и явлений, их осмысления; – использование установок в форме убеждения, внушения; – планирование условий устойчивого внимания и сосредоточенности учащихся; – использование различных форм работы для актуализации в памяти учащихся ранее усвоенных знаний и умений, необходимых для восприятия новых (беседа, индивидуальный опрос, упражнения по повторению); • Организация деятельности мышления и воображения учащихся в процессе формирования новых знаний и умений; – определение уровня сформированности знаний и умений у учащихся (на уровне конкретно-чувственных представлений, понятий, обобщающих образов, «открытий» формулирования выводов);

№ п/п	Тип урока	Требования
3	Организация познавательной деятельности учащихся:	– опора на психологические закономерности формирования представлений, понятий, уровней понимания, создания новых образов в организации мыслительной деятельности и воображения учащихся; – планирование приемов и форм работы, обеспечивающих активность и самостоятельность мышления учащихся (система вопросов, создание проблемных ситуаций, разные уровни проблемно-эвристического решения задач, использование задач с недостающими и излишними данными, организация поисковой и исследовательской работы учащихся на уроке, создание преодолимых интеллектуальных затруднений в ходе самостоятельных работ, усложнение заданий с целью развития познавательной самостоятельности учащихся); – руководство повышением уровня понимания (от описательного, сравнительного, объяснительного к обобщающему, оценочному, проблемному) и формированием умений рассуждать и умозаключать; – использование различных видов творческих работ учащихся (объяснение цели работы, условий ее выполнения, обучение отбору и систематизации материала, а также обработке результатов и оформлению работы); • Закрепление результатов работы; – формирование навыков путем упражнений; – обучение переносу ранее усвоенных умений и навыков на новые условия работы, предупреждение механического переноса.
4	Организованность учащихся:	• Отношение учащихся к учению, их самоорганизация и уровень умственного развития; • Возможные группы учащихся по уровню обучаемости, учет этих обстоятельств при определении сочетания индивидуальной, групповой и фронтальной форм работы учащихся на уроке.

№ п/п	Тип урока	Требования
5	Учет возрастных особенностей учащихся:	• Планирование урока в соответствии с индивидуальными и возрастными особенностями учащихся; • Проведение урока с учетом сильных и слабых учеников; • Дифференцированный подход к сильным и слабым ученикам.
III	Гигиенические требования к уроку	• Температурный режим. • Физико-химические свойства воздуха (необходимость проветривания). • Освещение. • Предупреждение утомления и переутомления. • Чередование видов деятельности (смена слушания выполнением вычислительных, графических и практических работ). • Своевременное и качественное проведение физкультминуток. • Соблюдение правильной рабочей позы учащегося. • Соответствие классной мебели росту школьника.
IV	Требования к технике проведения урока	• Урок должен быть эмоциональным, вызывать интерес к учению и воспитывать потребность в знаниях. • Темп и ритм должны быть оптимальными, действия учителя и учащихся завершенными. • Необходим полный контакт во взаимодействии и учителя, и учащихся на уроке, должны соблюдаться педагогический такт и педагогический оптимизм. • Доминировать должна атмосфера доброжелательности и активного творческого труда. • По возможности следует менять виды деятельности учащихся, оптимально сочетать различные методы и приемы обучения. • Обеспечить соблюдение единого орфографического режима школы. • Учитель должен обеспечить активное учение каждого школьника.

5. Подготовка урока

В зависимости от наличия тех или иных элементов учебного материала и характера их изложения определяются *структурные элементы (составные части) урока*.

Например, урок по алгебре на тему «Теорема Виета» (VIII класс) содержит следующий учебный материал:

1) подведение учащихся к теореме Виета на основе отдельных примеров;

2) формулировка теоремы Виета;

3) доказательство теоремы Виета;

4) применение теоремы Виета к решению упражнений.

В соответствии с этим можно выделить следующие структурные элементы данного урока:

1) проверка домашнего задания;

2) подведение учащихся к теореме Виета;

3) формулирование теоремы Виета;

4) доказательство теоремы Виета;

5) применение теоремы Виета к решению упражнений;

6) задание на дом.

Рекомендуем читателю выделить структурные элементы урока, посвященного изучению теоремы, обратной теореме Виета (VIII класс). Предусмотрите при этом включение такого структурного элемента урока, как самостоятельная работа учащихся.

Совокупность всех выделенных структурных элементов урока определяет *план урока*. Так, план урока, посвященного изучению теоремы Виета, будет содержать выделенные выше пп. 1 – 6.

Рекомендуем читателю привести другие варианты плана урока по изучению теоремы Виета, а также составить план урока по изучению обратной теоремы.

В дидактике наиболее распространенной является *типология уроков в зависимости от дидактических целей*: уроки овладения новыми знаниями, уроки формирования умений и навыков; уроки систематизации и обобщения знаний; уроки повторения и закрепления знаний, умений и навыков; контрольно-проверочные уроки; комбинированные уроки, на которых одновременно решается несколько дидактических задач.

Нетрудно определить тип урока по изучению теоремы Виета: он является уроком овладения новыми знаниями. Таким же является и тип урока по изучению теоремы, обратной теореме Виета.

В построении урока важным моментом является выбор *общей цели урока и целей его составных частей*. Для одного и того же урока цели могут быть сформулированы по-разному.

Например, для урока по изучению теоремы Виета целесообразно выделить следующие цели:

1) образовательные – ознакомить учащихся с теоремой, ее доказательством и первыми упражнениями на применение этой теоремы;

2) воспитательные:

а) обеспечить интерес учащихся путем акцентирования элемента новизны: учащиеся ознакомятся с новой интересной закономерностью, связывающей корни квадратного уравнения с его коэффициентами;

б) стимулировать интерес учащихся путем проведения наблюдения данных таблицы, приводящего к обнаружению теоремы Виета;

в) стимулировать ответственное отношение учащихся к учебной работе путем поощрения их участия в проведении доказательства теоремы Виета;

3) развивающие – развитие умений обобщить результаты наблюдения, сформулировать учебную гипотезу в общем виде, указать способ логического обоснования теоремы.

В *конспекте урока*, разрабатываемом студентом в период педагогической практики, должны быть указаны цели урока в развернутой конкретной форме (как это сделано, например, выше). Опытный учитель, разумеется, цели урока формулирует более кратко.

Рекомендуем поупражняться в постановке целей обучения на ином учебном материале. Сформулируйте, например, цели урока по изучению теоремы синусов.

Далее можно окончательно определить *содержание учебного материала данного урока*:

1) составление таблицы, содержащей следующие столбцы: «квадратное уравнение» (приведенное, неприведенное), «корень x_1 », «корень x_2 », « $x_1 + x_2$ », « $x_1 \cdot x_2$ », «вывод» (формулируется в устной форме). Уравнения, в целях экономии времени, подбираются из числа ранее решенных: $x^2 + x - 2 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, $9x^2 + 3x - 2 = 0$ и (уравнение, равносильное последнему) $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$. На основе этой таблицы подмечается искомая закономерность, формулируется теорема Виета;

2) доказательство теоремы, использующее формулы корней квадратного уравнения;

3) решение упражнений из действующего учебника с помощью теоремы Виета; 4) упражнения для домашнего выполнения.

Для того чтобы точнее спланировать действия учителя и учащихся на уроке, выбор методов и средств обучения, необходимо, разумеется, детально ознакомиться с изложением доказательства теоремы в учебнике, решить все упражнения для классной и домашней работы. Студенту, разумеется, необходимо согласовать все эти вопросы с учителем и методистом по педагогической практике.

Студенту в период педагогической практики необходимо продумать и спланировать свою деятельность, деятельность учащихся (что должны делать дети на каждом этапе урока), разработать все пояснения учащимся, вопросы для беседы,

В данном случае основные составляющие деятельности студента на уроке:

1) Постановка целей урока в форме, доступной учащимся. Обеспечение заинтересованности учащихся сообщением основной «интриги» урока — на уроке потребуется проявить сообразительность, проведем своего рода конкурс на «самого сообразительного ученика»;

2) Предъявление учащимся таблицы, о которой говорилось выше;

3) Пояснения о том, что представляет собой эта таблица и с какой целью она приводится (сообщается, что эта таблица поможет догадаться до теоремы Виета, которая связывает сумму и произведение корней квадратного уравнения с его коэффициентами; от учащихся же требуется проявить догадку и сообразительность, заметить искомую закономерность и сформулировать ее);

4) Организация наблюдений данных в таблице (в какой последовательности рассматривать уравнений, как добиться чтобы закономерность для приведенного квадратного уравнения была замечена уже на первом уравнении, тогда второе уравнение может быть использовано для подтверждения первоначальной догадки);

5) Обеспечение четкости формулировки закономерности для приведенного квадратного уравнения;

6) Обеспечение перехода к неприведенному квадратному уравнению, при этом акцент должен сделан уже на рассуждении (актуализировать необходимые знания, проанализировать связь между последними двумя уравнениями, догадаться о том, что при решении данной проблемы целесообразно от неприведенного уравнения перейти к равносильному приведенному уравнению);

7) Оказание помощи в формулировании закономерности для неприведенного квадратного уравнения;

8) Обеспечение возможности самостоятельного формулирования учащимися теоремы Виета для приведенного и неприведенного квадратных уравнений;

9) Подведение итогов конкурса — поощрение и оценивание учащихся, проявивших догадку и сообразительность;

10) Определение метода обучения, используемого при ознакомлении учащихся с доказательством теоремы Виета;

- 11) Закрепление доказательства теоремы Виета;
- 12) Подбор ключевых задач по данной теме и к данному уроку;
- 13) Организация и управление учебной работой над задачами;
- 14) Определение возможных затруднений учащихся при решении каждой задачи;

15) Определение конкретной помощи ученику в каждом случае (какие подсказки, сообщаются ли они учителем в готовом виде, используется ли помощь ученику со стороны других учащихся и т.д.);

16) Подведение итогов урока. Оценивание учащихся;

17) Подготовка и задание домашней работы.

Основные составляющие деятельности ученика на уроке:

- 1) наблюдения, выводы, связанные с таблицей – в устной форме;
- 2) самостоятельное доказательство теоремы Виета с записью его на классной доске и в тетрадях;
- 3) письменное решение задач учеником на классной доске;
- 4) письменное решение задач учащимися в тетрадях;
- 5) ответы ученика на вопросы учителя и учащихся;
- 6) задание вопросов учителю, вызвавших затруднения ученика.

6. Составление конспекта урока

Остановимся на требованиях к конспекту урока. При составлении конспекта урока обычно придерживаются следующей схемы:

- 1) указываются дата проведения урока, его номер по тематическому плану, название темы урока и класс, в котором он проводится;
- 2) указываются образовательные, воспитательные и развивающие цели урока;
- 3) приводится план урока с нумерацией его этапов и указанием затрат времени для каждого из них;
- 4) перечисляются учебное оборудование и используемая методическая литература;
- 5) далее следует основная часть конспекта, в которой описывается «живая» картина – ход урока: действия учителя и учащихся.

1. Пример конспекта урока по изучению теоремы Виета.

Тема урока: «Теорема Виета», VIII ____ кл ____ СШ.

Цели урока:

образовательные: _____;

воспитательные _____;

развивающие _____.

(Цели этого урока были сформулированы выше.)

План урока:

1. Проверка домашнего задания (5 мин.).
2. Подведение к теореме Виета (5 мин.).
3. Формулирование теоремы Виета (2 мин.).
4. Доказательство теоремы Виета с предварительным составлением его блок-схемы (10 мин.).
5. Решение задач (20 мин.).
6. Задание на дом (3 мин.).

Учебное оборудование: таблица с записью результатов вычислений, плакат с блок-схемой доказательства теоремы Виета.

Ход урока (описание картины урока)

1. *Проверка домашнего задания.* (Описание этого пункта плана мы здесь опустим.)

2. *Подведение к теореме Виета.*

– На данном уроке познакомимся с теоремой Виета. Эта теорема выражает интересную закономерность, существующую между суммой (произведением) корней квадратного уравнения и его коэффициентами. Чтобы заметить эту закономерность, рассмотрим таблицу 11.4, в которой приведены ранее решенные квадратные уравнения. От нас требуется заполнить данную таблицу и с ее помощью заметить искомую закономерность.

Таблица 11.4

Таблица для обнаружения теоремы Виета

№ п/п	Уравнение	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$	Вывод
1	$x^2 + x - 2 = 0$	-2	1			
2	$x^2 - x - 2 = 0$	1	-2			
3	$9x^2 + 3x - 2 = 0$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$			
4	$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$			
5	$x^2 + px + q = 0$	$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$			
6	$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$	$\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$			

Обобщение делаем вначале для квадратных уравнений 1 и 2.

— Посмотрите, чему равна сумма корней уравнения 1. С каким коэффициентом уравнения ее удобно сравнить? Какой вывод можно сделать? (Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком.)

Если учащимся трудно будет заметить искомую закономерность на примере уравнения 1, предложим им обратиться к уравнению 2. Если окажется, что закономерность правильно сформулирована уже на основании уравнения 1, то обращение к уравнению 2 проводится с целью дополнительного подтверждения догадки. После этого можно перейти к отысканию закономерности для произведения корней приведенного уравнения.

— Посмотрите, чему равно произведение корней уравнения 1. С каким коэффициентом уравнения его удобно сравнить? Какой вывод можно сделать? (Произведение корней приведенного квадратного уравнения равно свободному члену.)

В случае затруднений поступаем, как и выше.

Для формулирования первого ответа привлекаются учащиеся..., а для формулирования второго — учащиеся...

— Для уравнения 3 искомую закономерность заметить труднее. Не поможет ли это сделать уравнение 4? Приходим к выводу о том, что закономерность для уравнения 3 будет легче обнаружить, если данные уравнения заменить приведенными. Как это сделать? Что можно заметить после этого? А как сформулировать закономерность в общем виде? (Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\frac{a}{b}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.)

3. *Формулирование теоремы Виета.* Формулировка теоремы Виета повторяется учениками.

4. *Доказательство теоремы Виета.*

— Как доказать теорему Виета? Приведенная выше таблица подсказывает и идею доказательства. Можно ли для этого воспользоваться формулами корней квадратного уравнения? В чем состоит план доказательства? (Обращаемся к блок-схеме доказательства. Учащиеся называют последовательность рассуждений.)

— Найдем $x_1 + x_2$. Опираясь на «помощь» учащихся, учитель делает на доске следующие записи:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

— Найдем $x_1 x_2$. На доске делаются следующие записи:

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

– Таким образом, теорема Виета доказана. Итак, повторим, что нужно сделать, чтобы доказать эту теорему. (Надо записать корни квадратного уравнения, затем вычислить их сумму и произведение.)

5. Упражнения.

1. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней (если они существуют):

1) $2x^2 - 9x - 10 = 0$;

2) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;

3) $x^2 - 37x + 27 = 0$;

4) $y^2 + 41y - 371 = 0$.

– Что означают слова «не решая уравнения, найдите сумму...»? (Они означают, что нельзя пользоваться формулами корней квадратного уравнения.)

– Чем можно воспользоваться для нахождения суммы (произведения) корней? (Можно воспользоваться теоремой Виета.)

К доске вызываются ученики..., делают следующие записи:

1) $x_1 + x_2 = \frac{9}{2}, x_1 x_2 = -\frac{10}{2} = -5$;

2) $x_1 + x_2 = -\frac{12}{5}, x_1 x_2 = \frac{7}{5}$;

3) $x_1 + x_2 = 37, x_1 x_2 = 27$;

4) $y_1 + y_2 = -41, y_1 y_2 = 371$.

2. Решите уравнение и выполните проверку решений по теореме Виета:

1) $3x^2 - 4x - 4 = 0$;

2) $2x^2 + 7x + 6 = 0$.

Находим корни x_1 и x_2 уравнения, затем их сумму и произведение сравниваем с числами $\frac{4}{3}$ и $-\frac{4}{3}$ и делаем вывод, что корни найдены правильно. Аналогично поступаем и в случае 2.

3. В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p .

Краткая запись задачи и ее решения

$$\frac{x^2 + px - 35 = 0, x_1 = 7}{x_2 = ? p = ?}$$

Решение.
$$\begin{cases} 7 + x_2 = -p, \\ 7x_2 = -35, \end{cases}$$

$x_2 = -35 : 7 = -5; 7 + (-5) = -p, 2 = -p, p = -2.$

Ответ: $x_2 = -5, p = -2.$

6. Задание на дом. Пояснения к его выполнению.

Рефлексия деятельности учителя. Для достижения поставленных воспитательных целей использовался метод поощрения учащихся за следующие виды учебной работы: проявление догадки и наблюдательности при обнаружении теоремы Виета; обнаружения идеи доказательства теоремы Виета; активное участие в проведении доказательства теоремы; правильное решение рассматриваемых на уроке задач. Удалось ли достичь эти цели, в какой степени? Можно ли улучшить эту часть урока?

Развивающие цели будем считать достигнутыми, если учащиеся:

- 1) проявили догадку на стадии обнаружения теоремы Виета;
- 2) активно «подсказывали» учителю доказательство данной теоремы;
- 3) при минимальной помощи учителя (или самостоятельно) догадывались, каким образом при решении упражнений следует применить изученную теорему.

Достигнуты ли эти цели? Можно ли усовершенствовать работу по их достижению?

Какие образовательные цели достигнуты в полной мере, какие частично? Экономно ли использовалось время урока и т.д.

2. Пример конспекта урока по изучению теоретического материала с применением электронного учебника [98]. Рассмотрим первый урок на тему «Признаки равенства треугольников».

Содержание учебного материала: определение равных треугольников, формулировки всех трех признаков равенства, доказательство второго признака (заметим, что 1-й признак в нашей системе изложения принят в качестве аксиомы), доказательство 2-го признака.

Исходные условия: школьники еще находятся в самом начале изучения систематического курса, у них отсутствует надлежащий опыт в проведении доказательств, доказательство признака является одним из сложных во всем курсе планиметрии. Все это свидетельствует о том, что выбранная порция учебного материала является достаточно крупной и дальнейшее увеличение ее не представляется целесообразным.

Возможные цели урока.

Воспитательная: воспитание активной жизненной позиции и коллективистских качеств в процессе общения учащихся друг с другом, учителем, ЭУ.

Развивающая: развитие способности оперировать крупной порцией учебного материала, развитие памяти и внимания, развитие математической речи.

Образовательная: обеспечить усвоение учебного материала на уровне понимания и первичного закрепления на основе систематической (пошаговой) обратной связи.

Вводная часть урока: сообщаются сведения из истории математики, подчеркивается, что признаки равенства треугольников дали исторически первый крупный математический метод доказательства теорем и решения задач, приводятся краткие сведения о Евклиде и его «Началах». В школьном курсе геометрии метод равных треугольников применяется почти «на каждом шагу», поэтому важно каждому ученику овладеть этим методом.

Основная часть урока.

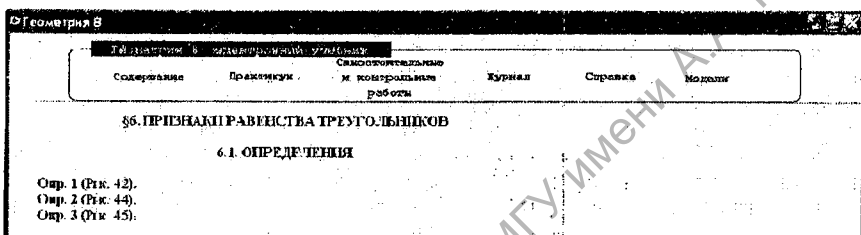


Рис. 11.1а

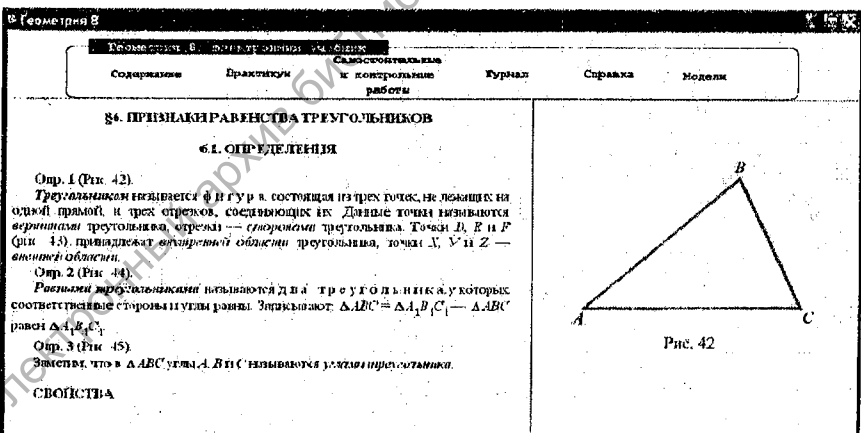


Рис. 11.1б

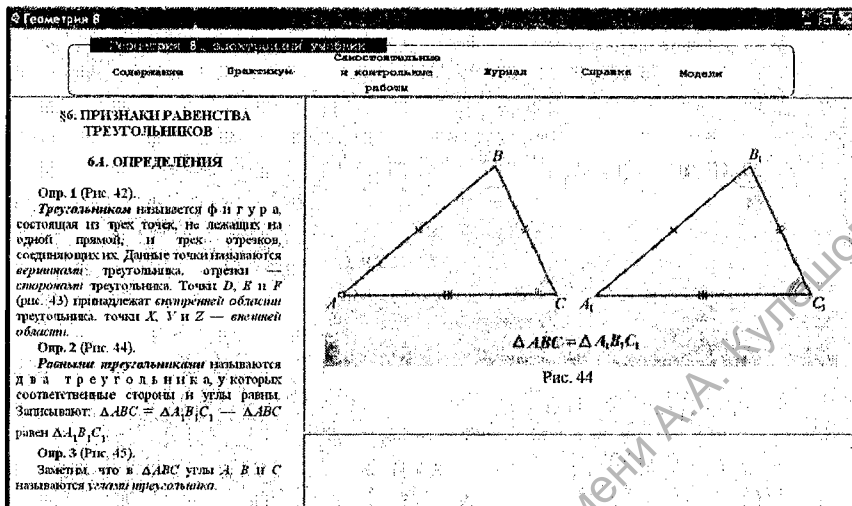


Рис. 11.1в

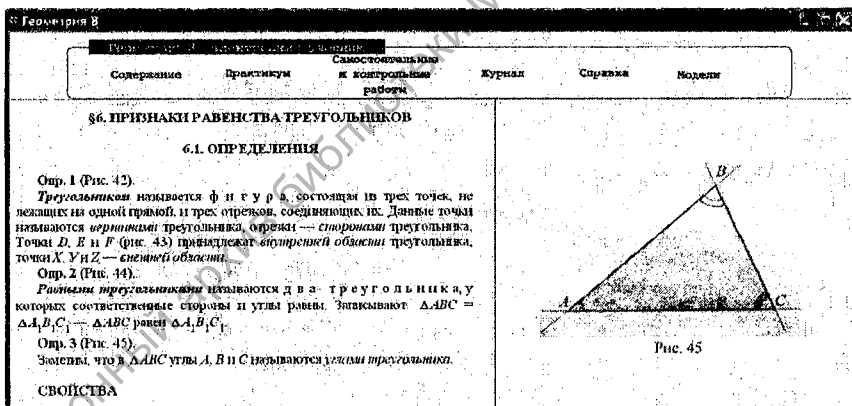


Рис. 11.1г

1-й срез: обзор основного содержания урока. Сообщается, что на данном уроке познакомимся с тремя определениями, одной аксиомой, одной теоремой и ее доказательством. Перелистываем четыре страницы ЭУ (рис. 11.1, а-г) и показываем, с какими определениями будем знакомиться (называем их и попутно показываем соответствующие рисунки).

§6. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

6.2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТЕОРЕМА 3 (второй признак равенства треугольников. Рис. 47)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Запись доказательства.

Доказательство.

1. Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2.

Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\triangle A_1B_2C_1$.

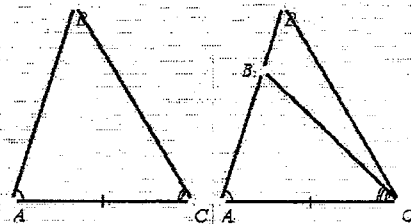
(Построение)

3.

На основании 1-го признака равенства треугольников (аксиомы 13) $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

4.



Запись доказательства: достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$. (Почему достаточно?)

Рис. 11.2а

соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Запись доказательства.

Доказательство.

1. Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2. Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

3. На основании 1-го признака равенства треугольников (аксиомы 13) $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

4. Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$.

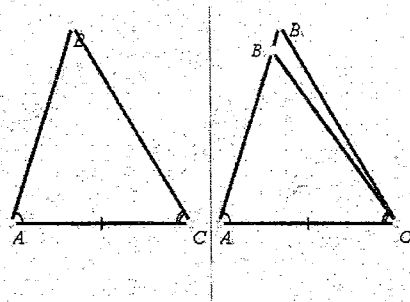
(Построение)

5. $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.

(Построение)

6. $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$ и эти углы не совпадают (!), что противоречит основному свойству откладывания угла.

7.



Запись доказательства: достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$. (Почему достаточно?)

соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Замысел доказательства.

Доказательство.

1.

Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2.

Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

3.

На основании 1-го признака равенства треугольников (аксиомы 13) $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

4.

Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$.

(Построение).

5.

$\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.

(Построение)

6.

$\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$ и эти углы не совпадают (!), что противоречит основному свойству откладывания угла.

7.

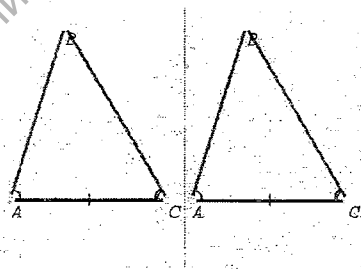
Следовательно, допущение неверно, и поэтому $AB = A_1B_1$.

(Построение).

8.

Тогда по 1-му признаку $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

(Построение)



Замысел доказательства: достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$. (Почему достаточно?)

Рис. 11.2в

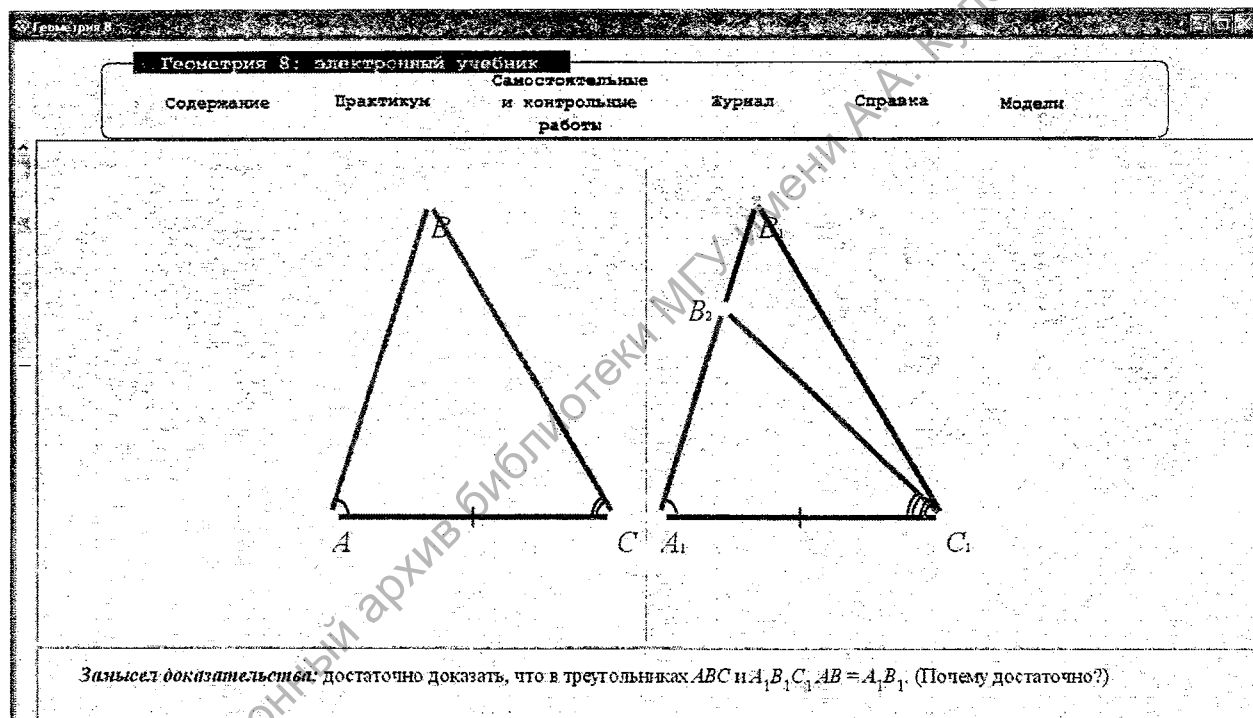


Рис. 11.2г

§6. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

6.2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТЕОРЕМА 3 (второй признак равенства треугольников. Рис. 47)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Замысел доказательства.

Доказательство.

1. Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2. Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

3. На основании 1-го признака равенства треугольников (аксиомы 13) $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$.

(Построение)

4. Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$.

(Построение)

5. $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.

(Построение)

6.

2-й срез: изучение и закрепление определений с многократной обратной связью: а) просим ученика А вслух прочитать тему урока, название первого пункта темы и первое определение; б) проводим анализ формулировки при коллективном участии класса (какое понятие определяем, через какое понятие); в) ученику Б дается задание прочитать вслух только определение треугольника и постараться воспроизвести это определение по возможности не подглядывая в экранную страницу; г) ученику В дается аналогичное задание в отношении оставшейся части формулировки определения 1; д) ученик Г вслух воспроизводит формулировку определения 1 целиком; е) ученик Д вслух читает определение и сразу его воспроизводит (дополнительно дается указание, дети, покажите равные элементы двух треугольников); ж) ученик Е читает и воспроизводит определение 3; з) ученик Ж воспроизводит все три определения, остальные при необходимости вносят уточнения; и) ученики читают свойства 1 и 2 про себя, ученик З формулирует оба эти свойства.

3-й срез: изучение первых двух признаков (аксиомы и теоремы): а) ученик И читает оба признака и воспроизводит их, при необходимости остальные поправляют. Ученикам предлагается сделать в тетради краткую запись определения равных треугольников и двух признаков равенства. Примерная запись:

1) $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ тогда и только тогда, когда $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$, $AC = A_1 C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ – определение;

2) $(AB = A_1 B_1, AC = A_1 C_1, \angle A = \angle A_1) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ – 1-й признак;

3) $(AC = A_1 C_1, \angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ – 2-й признак;

4-й срез: изучение доказательства 2-го признака (см. рис. 11.2, а-в):

а) инициативу берет учитель: прежде всего, он обращает внимание учащихся на замысел доказательства, выясняет с учащимися, почему для доказательства теоремы достаточно доказать равенство $AB = A_1 B_1$, что доказательство будет вестись методом от противного, что для этого строится третий треугольник; учитель объясняет, руководит пошаговым предъявлением доказательства (вызов следующего шага проводится учащимися только по указанию учителя), каждый шаг доказательства сопровождается синхронной демонстрацией на рисунке; б) в качестве закрепления учитель снова повторяет доказательство, опираясь только на рисунок 11.2, г (текст при этом убирается); в) проводится анализ доказательства в коллективной форме с помощью вопросов: «Что дано в теореме? Что нужно доказать? В чем состоит замысел доказательства? С чего начинается доказательство? Какой следующий шаг?» и т.д.; г) ученику К предлагается воспроизвести доказательство, пользуясь только рисунком, при необходимости ему оказывается помощь; д) возвращаем на экран полную страницу с доказательством и проводим его закрепление с помощью следующего задания: «Составьте и запишите в тетради план доказательства».

Завершается урок обсуждением плана. При наличии времени можно попытаться воспроизвести доказательство по тексту, но без рисунка (рис. 11.2, д).

Методический комментарий к проведенному уроку:

1. Последовательно использовался метод срезов.
2. Применялся метод интерактивной структуризации учебного материала (текста и графики).
3. Преобладала коллективная (фронтальная) форма работы.
4. Урок проводился в интенсивном темпе, что существенно для развития. Между тем, искусственного форсирования темпа не проводилось. Темп определялся тем, насколько быстро усваивалась текущая порция учебного материала. Возможно, что при более медленном темпе работы не все изложенные формы будут задействованы.
5. Использовались объяснительно-иллюстративный и репродуктивный методы обучения.
6. Систематически осуществлялась обратная связь и закрепление.
7. Велась работа по развитию устной и письменной речи. В целом ученики читали, говорили, слушали, размышляли, делали записи, осуществляли с помощью кнопок навигацию.
8. Воспроизведение осуществлялось как по частям, так и крупными порциями, что содействовало запоминанию и развитию памяти. Особенно развитию памяти и мышления способствовал прием изложения доказательства только по рисунку.
9. По мере накопления опыта работы с ЭУ возможно более широкое привлечение чтения текста про себя.
10. Урок может быть проведен с использованием мультимедийного проектора, отчего условия проведения фронтальной работы только улучшаться.
11. Мы намеренно продемонстрировали урок, который не вписывается в распространенное представление о том, что компьютер удобно использовать только для организации индивидуальной формы работы. Кроме того, в виду повышенной сложности учебного материала индивидуальная работа в данном случае заведомо окажется неэффективной.
12. Безусловно, каждый учитель, даже придерживаясь изложенной выше схемы урока, проведет его в своем стиле, в своей манере общения с детьми и т.д.

Геометрия 8

ГЛАВНОЕ МЕНЮ

Содержание Практикум Самостоятельная и контрольная работы Журнал Справка Модели

§9. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ДАННОЙ ПРЯМОЙ. СРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

9.2. СРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

Выясним, какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку и каковы свойства этой прямой.

Опр. (Рис. 67).

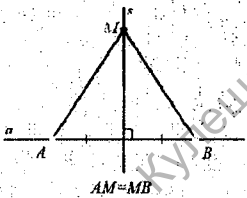
Срединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину.

ТЕОРЕМА 6.1 (о серединном перпендикуляре. Рис. 68).

Если точка M принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB , то она равноудалена от концов этого отрезка.

ТЕОРЕМА 6.2 (обратная. Рис. 69).

Если точка K равноудалена от концов отрезка AB , то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку.



$AM = MB$

Рис. 11.3

Геометрия 8

ГЛАВНОЕ МЕНЮ

Содержание Практикум Самостоятельная и контрольная работы Журнал Справка Модели

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задачи делятся по трем уровням сложности (I-III), затем эти задачи распределяются по уровням обучения (базовый, повышенный, углубленный).

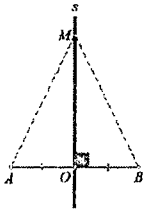
В параграф § 9 (Петров Петр Петрович) – Диалоговое окно веб-страницы

Задача № 93

Составьте планы доказательств теорем 6.1 и 6.2. Докажите эти теоремы по нарисованному плану.

Варианты промежуточного ответа. Планы доказательств теорем 6.1:

а) 1) $AM = BM$;
2) $\triangle AMO = \triangle BMO$;
с) 1) $\triangle AMO = \triangle BMO$;
2) $AM = BM$.



$AM = BM$

Петров Петр Петрович. См. пользователя

Рис. 11.4

9. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ДАННОЙ ПРЯМОЙ. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

9.2. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

ТЕОРЕМА 6.1 (о *срединовом перпендикуляре*, Рис. 68).

Если точка M принадлежит срединовому перпендикуляру к отрезку AB , то она равноудалена от концов этого отрезка.

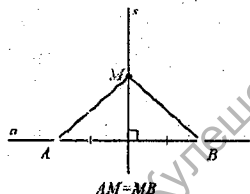
Краткая запись теоремы.

Доказательство.

Докажем, что если точка M принадлежит срединовому перпендикуляру к отрезку AB , то она равноудалена от концов этого отрезка.

1. $\triangle AOM = \triangle BOM$ по двум сторонам и углу между ними. $AO = OB$, $OM = OM$, $\angle AOM = \angle BOM = 90^\circ$.

2. Из равенства этих треугольников следует, что $AM = BM$.



Краткая запись теоремы.
Дано: s — срединовый перпендикуляр к отрезку AB , $M \in s$.
Доказать: $AM = BM$.

Рис. 11.5

9. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ДАННОЙ ПРЯМОЙ. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

9.2. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

ТЕОРЕМА 6.2 (обратная, Рис. 69).

Если точка K равноудалена от концов отрезка AB , то она принадлежит срединовому перпендикуляру к этому отрезку.

Краткая запись теоремы.

Доказательство.

Пусть точка K равноудалена от концов отрезка AB , т.е. $AK = BK$, прямая s — срединовый перпендикуляр к отрезку AB . Докажем, что $K \in s$. Докажем это методом от противного.

1. Допустим, что $K \notin s$.
2. $\triangle AKO = \triangle BKO$ — по трем сторонам ($AO = OB$, $AK = BK$, $OK = OK$).
3. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle AKO = \angle BKO = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

4. Получили, что через точку O на прямой AB проведены две перпендикулярные к ней прямые OK и s .

5. Это противоречит единственности перпендикулярной прямой.

6. Полученное противоречие означает, что допущение неверно. Следовательно, $K \in s$.



Краткая запись теоремы.
Дано: s — срединовый перпендикуляр к отрезку AB , $AK = BK$.
Доказать: $K \in s$.

Рис. 11.6

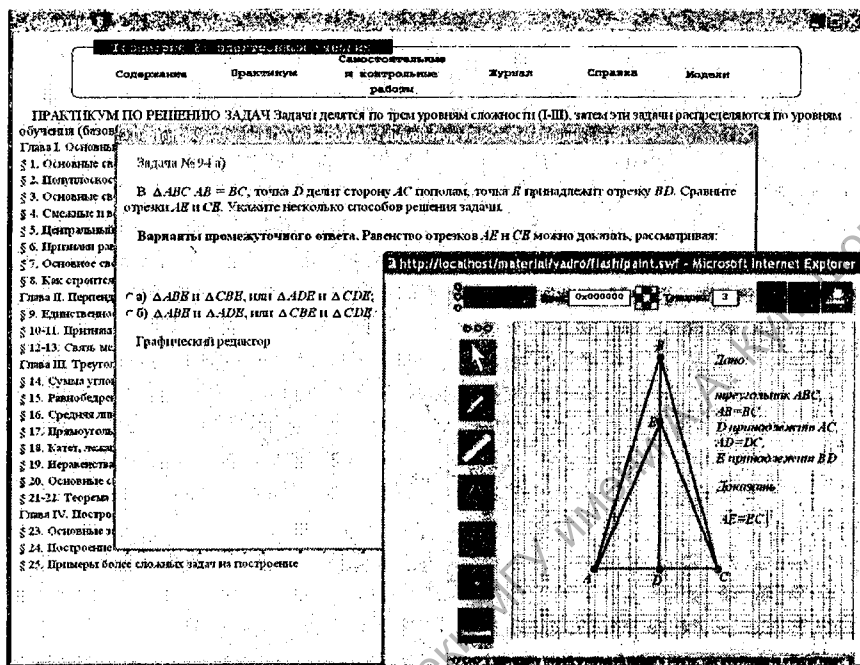


Рис. 11.7

3. Методические рекомендации к построению урока по решению задач с использованием электронного учебника [98]. Рассмотрим в качестве примера урок по решению задач по теме «Серединный перпендикуляр к отрезку» (7 класс).

Воспитательная цель урока: воспитание интереса к учебной работе за счет сочетания обычных форм работы с работой на компьютере.

Развивающая цель: развитие наблюдательности, догадки, самостоятельности на доступном задачном материале.

Образовательная цель: формирование первоначальных навыков в решении задач по названной теме.

Развернутый план урока.

1. **Актуализация теоретических знаний.** Рекомендуем обратиться к § 9 «Единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой. Серединный перпендикуляр к отрезку» (рис. 11.3). После прочтения первой страницы параграфа, закрепляем ее содержание с помощью заданий: «Сформулируйте определение серединного перпендикуляра к отрезку, сформулируйте теоремы 6.1-2».

2. Рассмотрим задачу № 93 (рис. 11.4). К теореме 6.1 приводится два варианта ответа, выберите правильный ответ. В случае затруднений обратитесь к доказательству теоремы 6.1 (рис. 11.5). Завершается эта часть работы выбором нужного варианта доказательства теоремы 6.1. После чего составляется краткий план доказательства теоремы 6.2. При этом разрешается пользоваться текстом доказательства (рис. 11.6).

3. Переходим к решению задачи № 94а (рис. 11.7). Действия учащихся можно организовать следующим образом: дети читают задачу; с помощью графического конструктора выполняют рисунок и краткую запись задачи; выбирают правильный вариант промежуточного ответа; после чего решение задачи завершается в устной форме.

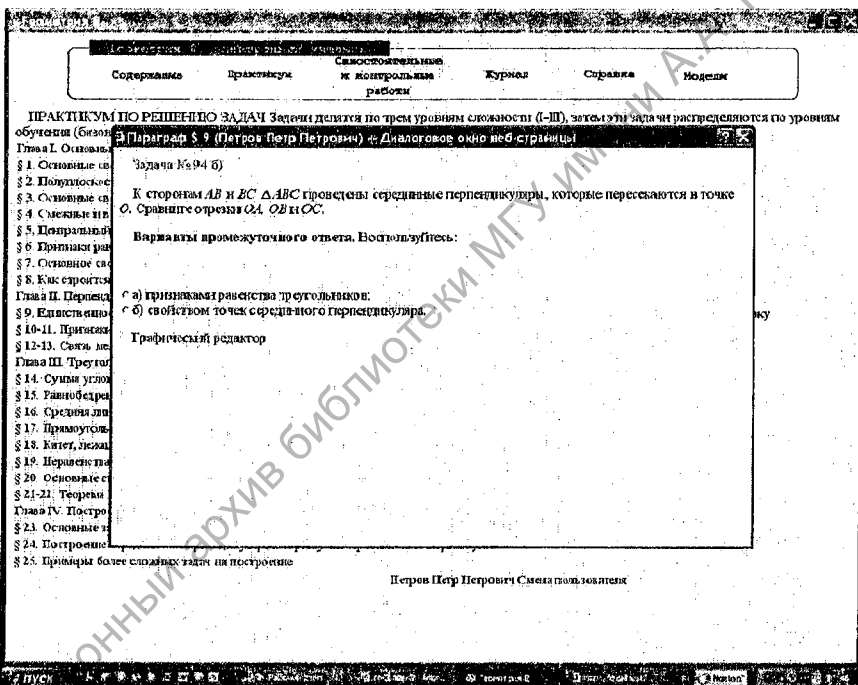


Рис. 11.8

4. Переходим к задаче № 94б (рис. 11.8). Рекомендуем решить задачу письменно в обычной тетради. Для проведения серединных перпендикуляров проще воспользоваться чертежным треугольником.

5. Рекомендации к решению задачи № 94в аналогичные. Чертеж может быть выполнен и в тетради и с помощью графического конструктора (рис. 11.9).

6. В качестве домашнего задания можно задать следующий «квартет»: № 94д,

№ 94г, № 95,а, № 95б.

7. Подведение итогов урока.

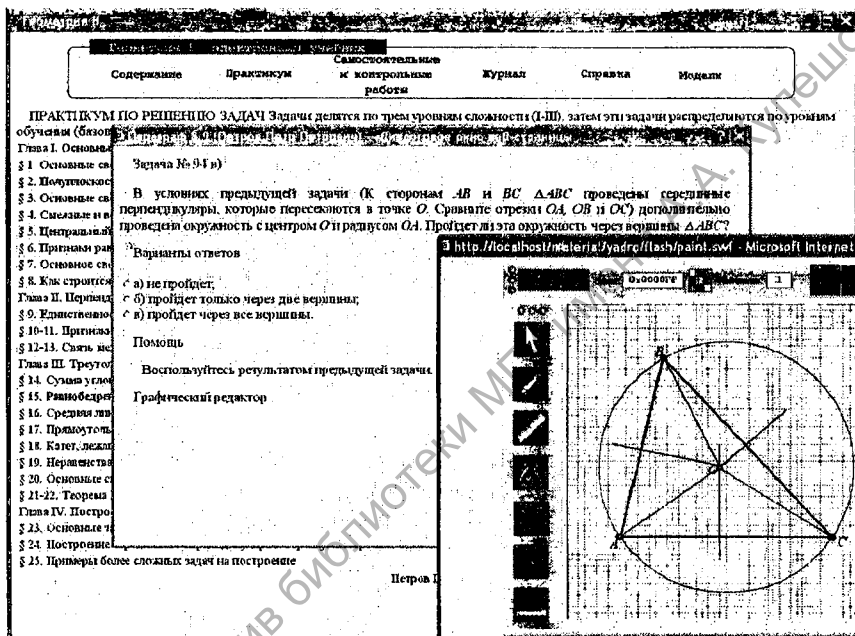


Рис. 11.9

7. Факультативные занятия и внеклассная работа

7.1. Актуальность факультативных занятий по математике.

Бесспорно, что овладение практически любой современной профессией требует определенных знаний по математике. С математикой тесно связана и «компьютерная грамотность», широкое распространение которой стало неотъемлемой чертой нашего времени. Математические знания стали необходимой частью общей культуры, средством всестороннего развития личности. В школе математика явля-

ется опорным предметом, обеспечивающим изучение на должном уровне, как естественных, так гуманитарных дисциплин. Необходимо отметить, что математика является профилирующим предметом на вступительных экзаменах в вузы по широкому спектру специальностей. Наряду с поступающими на математические факультеты и в технические вузы вступительные экзамены по математике (централизованное тестирование) сдают будущие физики, химики, биологи, врачи, психологи, экономисты.

Как и в прежние годы, современная школа призвана решать две тесно связанные друг с другом задачи: с одной стороны, обеспечить овладение учащимися твердо установленным и четко очерченным **минимальным** объемом знаний и умений, необходимых каждому члену нашего общества, с другой – создать оптимальные условия для тех, кто проявляет повышенный интерес и склонность к данному предмету. Свой вклад в решение этих задач призваны сделать факультативные занятия.

7.2. Общие цели и задачи факультативных занятий по математике в VII–XI классах. В настоящее время ведется интенсивная разработка и корректировка нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования *в условиях современной образовательной среды* общеобразовательных учреждений, *повышении качества обучения* предметам естественно-математического цикла с учетом запросов и потребностей общества. Частью этой разработки является создание методических материалов для организации и проведения факультативных занятий по предметам естественно-математического цикла в условиях современной образовательной среды.

Основной задачей факультативных занятий является создание максимально благоприятных условий для интеллектуального развития учащихся в соответствии с их интересами, целями, способностями и потребностями. На факультативных занятиях учащиеся имеют возможность, прежде всего, совершенствовать знания, получаемые на уроках, приобрести умения решать более трудные и разнообразные задачи. В виду существенного повышения роли факультативов для их проведения отводится пять лет (VII–XI классы).

Изучение потребностей практики обучения показало, что наибольшую пользу факультативные занятия приносят, если они используются для **расширения, совершенствования и коррекции знаний уча-**

щихся по основному курсу, для решения задач повышенной трудности, для использования различных форм кружковой работы.

Курс «Школьная геометрия: многообразие идей и методов» – один из факультативных курсов, предлагаемых в настоящее время. Он является своего рода **сопровождением базового и повышенного курсов, посилено расширяя и углубляя эти курсы**. Содержание этого факультативного курса, придерживаясь рамок базового и повышенного курсов, делает больший **акцент на математические методы**, являющимися основным инструментом изложения теории и решения задач.

Каждая тема факультатива непосредственно связана с материалом общеобразовательного курса математики. При этом программа предусматривает достижение двоякой цели: во-первых, довести изучаемый материал до того уровня, на котором учащемуся становится ясным его принципиальная математическая важность, до известной степени завершенности; во-вторых, показать непосредственные связи школьной математики с наукой и ее приложениями.

Материал курса **не дублирует** вузовские программы, но в целом ряде случаев позволяет с общих позиций взглянуть на школьную математику и подчеркнуть единство предмета и метода математической науки. Поэтому важно в рамках данного факультативного курса идти не от вузовских курсов, адаптируя их к школьникам, а показывать, каким образом из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью, которые впоследствии сыграют роль своего рода пропедевтики для изучения вузовских курсов математики.

Факультативный курс «Школьная геометрия: многообразие идей и методов» содержит разнообразные темы как теоретического, так и прикладного плана. Предполагается, что в процессе занятий будет показана история возникновения и развития ряда изучаемых методов, концепций и идей, их значение для математики, для других наук и областей практической деятельности.

В предлагаемом факультативном курсе новизна обеспечивается путем раскрытия **многообразия идей и методов школьной геометрии, решения содержательных задач**. На факультативных занятиях учащимся могут предлагаться задачи занимательного характера, исторические сведения. Учащиеся имеют возможность выступить с лекцией, провести под руководством учителя экскурсию на интере-

сующееся предприятие или в учебное заведение, подготовить и сделать доклад по выбранной тематике. Такой факультатив окажется интересным и полезным и тем учащимся, которые не проявляют специального интереса и склонности к занятиям математикой, но хотят расширить свой кругозор.

На *первом этапе* (VII–IX классы) особое внимание следует уделить формированию устойчивого интереса к предмету, выявлению и развитию математических способностей учащихся, ориентации на профессии, существенным образом связанных с математикой. Обучение на *втором этапе* (X–XI классы) должно обеспечить подготовку к поступлению в вуз, продолжению образования и к профессиональной деятельности, требующей глубоких и прочных знаний, умений и навыков, высокой математической культуры.

Образовательные цели факультативных занятий. Эти цели следующие: систематическое изучение геометрических фигур и их свойств, систематизация и углубление знаний об измерении геометрических величин, углубленное изучение геометрических построений и преобразований, координат и векторов, приобретение умений и навыков в решении задач повышенной сложности.

Основным является традиционное содержание. К ведущим *содержательным линиям данного факультативного курса* относятся: геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин; геометрические построения и преобразования; координаты и векторы.

В VII–IX классах: признаки равенства треугольников, признаки и свойства параллельных прямых, теоремы о сумме углов треугольника и Пифагора, признаки и свойства четырехугольников, окружность и ее комбинации с многоугольниками, решение прямоугольного и произвольного треугольников, площади фигур. Наибольшее углубление осуществляется при изучении именно этого материала и связывается с практикой решения содержательных геометрических задач, с решением задач повышенной сложности.

Факультативный курс в VII–IX классах представлен систематическим построением планиметрии, предусматривающим: знакомство учащихся с аксиомами геометрии, углубленное изучение теории перпендикулярных и параллельных прямых, треугольников и четырехугольников, равенства и подобия фигур, тригонометрии прямоугольного и произвольного треугольника, комбинаций окружности и многоугольников, измерений геометрических величин, геометрических преобразований и построений, координат и векторов.

Акцент при этом делается на раскрытие математических идей и методов школьной геометрии.

В X–XI классах: аксиомы стереометрии и первые следствия из них, взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, геометрические построения (воображаемые построения, построение изображений плоских и пространственных фигур, построения на изображениях), многогранники, тела вращения, комбинации многогранников и тел вращения, измерение расстояний, меры углов, площадей и объемов.

Развивающие цели факультативных занятий. Эти цели следующие:

- развитие познавательного интереса;
- развитие логического мышления, наблюдательности, воображения, математической интуиции, математической речи;
- развитие умственных способностей: гибкости, критичности и глубины ума, самостоятельности и широты мышления, памяти, способности к цельности восприятия, генерированию идей, укрупнению информации и др.
- формирование исследовательских навыков применения методов научного познания: анализа и синтеза, абстрагирования, обобщения и конкретизации, индукции и дедукции, классификации, аналогии и моделирования и др.;
- развитие общих учебных умений: постановки учебной цели, выбора средств ее достижения, структурирования информации, выделения главного и т.д.

Воспитательные цели факультативных занятий. Они заключаются:

- в формировании мировоззренческих представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о роли математики в общественном прогрессе;
- в развитии и углублении интереса к математике, стимулировании самостоятельности учащихся в изучении теоретического материала и решении задач повышенной сложности, создании ситуаций успеха по преодолению трудностей, воспитании трудолюбия, волевых качеств личности;
- в стимулировании исследовательской деятельности учащихся, активного участия их во внеклассной работе по математике, в математических олимпиадах;
- в воспитании нравственных качеств личности: настойчивости, целеустремленности, творческой активности и самостоятельности,

трудолюбия и критичности мышления, дисциплинированности, способности к аргументированному отстаиванию своих взглядов и убеждений;

– в эстетическом воспитании (раскрытии красоты математической теории, совершенства математического доказательства, точности в постановке математической задачи, рациональности ее решения, раскрытии связи углубленного курса математики с архитектурой, живописью, музыкой, скульптурой).

Дидактическая основа организации факультативных занятий. В основу теоретического обоснования и практических разработок нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования положен *средовый подход*, разрабатываемый Национальным институтом образования. При реализации средового подхода образовательное содержание учебного предмета *не передается учащимся напрямую*. Каждый обучаемый конструирует и создаёт в результате деятельности внутреннее содержание образования, отличающегося от внешне заданного с учетом его возможностей и потребностей в ходе разнообразной учебной деятельности, коллективной коммуникации, сопоставлении полученных результатов с культурно-историческими аналогами и другими аспектами. Возможности средового подхода расширяются в связи с созданием учебно-методических комплексов нового поколения, предусматривающих включение *электронных учебных изданий и средств обучения*.

Средовый подход рассматривается как общая дидактическая основа организации обучения в современной общеобразовательной школе, повышения качества знаний. В противовес технократическому подходу акцент в построении содержания обучения на факультативных занятиях должен быть сделан на *усвоение идей и методов математики, непосредственно связанных со школьным курсом*.

Наиболее массовой и доступной составляющей средового подхода, дополнительного изучения математики являются факультативные занятия.

Организация учебно-воспитательного процесса на факультативных занятиях. Она должна предусматривать:

- *различные организационные формы*: использование внутренней дифференциации и индивидуализации обучения; уроков-лекций, уроков крупноблочного, обзорного изложения теоретического материала с последующей самостоятельной его проработкой, уроков-практикумов,

уроков коллективного исследования, уроков с использованием электронных средств обучения; различных форм внеклассной работы по математике;

- *организацию дидактического цикла с учетом особенностей дополнительного обучения.* Рекомендуется следующая последовательность звеньев дидактического цикла: опережающее крупноблочное изучение теоретического материала; решение ключевых задач всех уровней сложности; организация фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся по решению задач, выполнение самостоятельных работ, в том числе и работ исследовательского характера.
- *учет особенностей системы математических задач и упражнений, которая в пособиях для факультативных занятий является, как правило, избыточной относительно фронтальной формы работы.* Часть задач, избыточная относительно фронтальной формы работы, предназначена для организации групповой и индивидуальной работы;
- *развивающее обучение (обеспечение оптимально возможного уровня трудности и темпа обучения, доступного учащимся; обеспечение внутренней дифференциации обучения, сочетание фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся);*
- *использование проблемных методов обучения, обучение учащихся эвристическим приемам решения задач, использование доказательства в целях обнаружения теорем, выработка общих учебных умений по отысканию замысла решения задачи, составлению плана решения задачи;*
- *сбалансированное выделение времени на изучение теоретического материала и решение задач (с учетом общего сравнительно небольшого количества часов рекомендуется примерно 1/4 учебного времени выделять на изучение теории и 3/4 – на решение задач);*
- *повышение роли самостоятельной работы учащихся по изучению теоретического материала и решению задач (систематическая самостоятельная работа с учебной и научно-популярной литературой);*
- *систематическое решение задач повышенной сложности, используя при этом различные приемы: руководство и помощь со стороны учителя, коллективный разбор и решение задач повышенной трудности, опора на наиболее способных учащихся класса, использование исследовательских заданий для группы учащихся на сравнительно продолжительный срок;*
- *использование компьютерной технологии обучения;*
- *использование опыта учителей-новаторов;*
- *стимулирование внеклассной работы учащихся, тесное увязывание ее с факультативным занятием.*

8. Задания для практических и лабораторных занятий

Задание 1. Приготовьтесь к деловой игре по проведению урока на тему «Теорема Виета». Осуществите эту игру. (При подготовке игры мысленно «проиграйте» роль учителя, ученика; проговорите эти роли вслух.)

Задание 2. Разработайте конспект урока по изучению теоремы синусов. Подготовьте деловую игру по проведению урока на тему «Теорема синусов».

Задание 3. Разработайте конспект урока на тему «Длина окружности». Предусмотрите использование машинного эксперимента при введении понятия длины окружности, при вычислении отношения периметров правильных многоугольников к диаметру окружности. Какова цель использования здесь микрокалькулятора? Проведите деловую игру.

Задание 4. Разработайте конспект урока на тему «Площадь круга». Проведите деловую игру.

Задание 5. Ознакомьтесь с *методической схемой наблюдения и анализа урока*. Посетите урок математики в школе. Проанализируйте этот урок и составьте его конспект. Приготовьтесь к деловой игре по проведению этого урока.

Задание 6. Изучите опыт учителей по проведению таких уроков, как урок-лекция, урок-семинар, уроки обобщения и систематизации учебного материала по теме (эти типы уроков предусмотрены школьной реформой).

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Ананчанка, К.А.** Агульная методыка выкладання матэматыкі школе / К.А. Ананчанка. – Мн.: Універсітэцкае, 1997. – 94 с.
2. **Бабанский, Ю.К.** Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю.К. Бабанский. – М.: Просвещение, 1985. – 208 с.
3. **Бершадский, М.Е.** Дидактические и психологические основания образовательной технологии / М.Е. Бершадский, В.В. Гузеев. – М.: Центр «Педагогический поиск», 2003. – 256 с.
4. **Беспалько, В.П.** Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В.П. Беспалько. – М.: Изд-во института профессионального образования МО РФ, 1985. – 512 с.
5. **Беспалько, В.П.** Слагаемые педагогической технологии / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
6. **Брунер, Дж.** Психология познания / Дж. Брунер. – М.: Прогресс, 1977. – 412 с.
7. **Вендровская, Р.Б.** Очерки истории советской дидактики / Р.Б. Вендровская. – М.: Педагогика, 1982. – 212 с.
8. **Виноградова, Л.В.** Методика преподавания математики в средней школе / Л.В. Виноградова. – Ростов на/Д: Феникс, 2005. – 252 с.
9. **Воспитание учащихся при обучении математике** / сост. Л.Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1987. – 175 с.
10. **Глейзер, Г.И.** История математики в средней школе / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1971. – 461 с.
11. **Градштейн, И.С.** Прямая и обратная теоремы / И.С. Градштейн. – М.: Наука, 1965. – 128 с.
12. **Гузеев, В.В.** Методы и организационные формы обучения / В.В. Гузеев. – М.: Народное образование, 2001. – 84 с.
13. **Гуцанович, С.А.** Тестирование в обучении математике: диагностико-дидактические основы / С.А. Гуцанович, А.М. Радков. – Могилев: Изд-во МГПИ им. А.А. Кулешова, 1995. – 203 с.
14. **Давыдов, В.В.** Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
15. **Данилов, М.А.** Процесс обучения / Дидактика средней школы. – М., 1975. – С. 82-115.
16. **Десятибалльная система оценки результатов учебной деятельности учащихся** / Научн. редактор и сост. О.Е. Лисейчиков. – Мн.: НИО, 2002. – 400 с.
17. **Епишева, О.Б.** Учить школьников учиться математике / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.
18. Журнал «Матэматыка. Праблемы выкладання».
19. Журнал «Математика в школе» (Российская Федерация).
20. **Кашлев, С.С.** Современные технологии педагогического процесса / С.С. Кашлев. – Мн.: Университетское, 2000. – 95 с.
21. **Колягин, Ю.М.** Задачи в обучении математике: в 2 ч. / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – Ч. 1. – 110 с.; Ч. 2. – 144 с.
22. **Конаржевский, Ю.А.** Анализ урока / Ю.А. Конаржевский. – М.: Центр «Педагогический поиск», 2003. – 336 с.

23. Ксензова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии / Г.Ю. Ксензова. – М.: Педагогическое общество России, 2001. – 224 с.
24. Крупич, В.И. Структура геометрической задачи и ее роль в обучении геометрии // Актуальные вопросы обучения геометрии в средней школе / Межвузовский сборник научных трудов. – Владимир: ВГПИ им. Лебедева-Полянского, 1989. – 96 с.
25. Кукушин, В.С. Теория и методика обучения / В.С. Кукушин. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 474 с.
26. Левитес, Д.Г. Современные образовательные технологии / Д.Г. Левитес. – Новосибирск: 1999. – 288 с.
27. Лернер, И.Я. Дидактические основы методов обучения / И.Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.
28. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики / С.Г. Манвелов. – М.: Просвещение, 2005. – 175 с.
29. Матюшкин, А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М., 1972. 156 с.
30. Махмутов, М.И. Организация проблемного обучения в школе / М.И. Махмутов. – М.: Просвещение, 1977. 240 с.
31. Махмутов, М.И. Теория и практика проблемного обучения / М.И. Махмутов. – Казань: Татарское книжное издательство, 1972. – 551 с.
32. Метельский, Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 254 с.
33. Метельский, Н.В. Очерки истории методики математики / Н.В. Метельский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1968. – 340 с.
34. Методика преподавания математики: Общая методика / сост.: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
35. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
36. Методика факультативных занятий в 7–8 классах: Избранные вопросы математики / А.М. Абрамов, И.Н. Антипов, Л.Ю. Березина и др.; сост.: И.Л. Никольская, В.В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1981. – 160 с.
37. Новик, И.А. Практикум по методике преподавания математики / И.А. Новик. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 175 с.
38. Педагогика / под ред. Ю.К. Бабанского. – М.: Просвещение, 1983. – 608 с.
39. Пичурин, Л.Ф. Методика преподавания математики в IV–V классах / Л.Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1981. – 56 с.
40. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
41. Республиканская программа «Информатизация системы образования» // Информатизация адукацыі. – 1998. – № 1. – С. 4–17.
42. Рогановская, Е.Н. Теория и методика применения школьного электронного учебника математики в учебном процессе: монография / Е.Н. Рогановская. – Могилев: Изд-во МГУ им. А.А. Кулешова, 2009. – 184 с.
43. Рогановская, Е.Н. Электронный школьный учебник: Теория и практика создания (на примере курса математики): в 2 ч. Ч. I: Методология и технология конструирования: монография / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 176 с.

44. **Рогановская, Е.Н.** Электронный школьный учебник: Теория и практика создания (на примере курса математики): в 2 ч. Ч. 2: Методика конструирования: монография / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 224 с.
45. **Рогановский, Н.М.** Методика преподавания математики в средней школе / Н.М. Рогановский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 267 с.
46. **Рубинштейн, С.Л.** Хрестоматия по психологии / С.Л. Рубинштейн. – М.: Просвещение, 1977. – С. 43.
47. **Селевко, Г.К.** Современные образовательные технологии / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
48. **Степин, В.С., Елсуков, А.Н.** Методы научного познания / В.С. Степин, А.Н. Елсуков. – Мн.: Выш. шк., 1974. – 152 с.
49. **Столяр, А.А.** Педагогика математики / А.А. Столяр. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 190 с.
50. **Талызина, Н.Ф.** Пути и проблемы управления познавательной деятельностью человека // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
51. Учебно-методические комплексы по математике для средней школы.
52. **Фридман, Л.М.** Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л.М. Фридман. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
53. **Фридман, Л.М.** Психолого-педагогические основы обучения математике в средней школе / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
54. **Фридман, Л.М.** Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Трубецкий. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
55. **Хуторской, А.В.** Современная дидактика / А.В. Хуторской. – СПб.: Питер, 2001. – 544 с.
56. **Чередов, И.М.** Система форм организации обучения в советской общеобразовательной школе / И.М. Чередов. – М.: Педагогика, 1987. – 152 с.
57. **Шатон, Г.И.** Неклассическая дидактика / Г.И. Шатон. – Мн.: АПО, 2002. – 234 с. М.: Сентябрь, 1996. – 96 с.
58. **Якиманская, И.С.** Развивающее обучение / И.С. Якиманская. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.
59. **Яковлев, Н.М.** Методика и техника урока в школе / Н.М. Яковлев. – М.: Просвещение, 1970. – 286 с.

Дополнительная литература

60. **Алешина, Т.Н.** Урок математики: применение дидактических материалов с профессиональной направленностью / Т.Н. Алешина. – М.: Высшая школа, 1991. – 64 с.
61. **Болтянский, В.Г.** К проблеме дифференциации математического образования // Математика в школе. – 1984. – № 3. – С. 9-13.
62. **Вадюшин, В.А.** Технические средства обучения: учеб. пособие для вузов (пособие к лабор. работам) / В.А. Вадюшин, Б.В. Пальчевский, Л.С. Фридман. – Мн.: Вышэйшая школа, 1987. – 246 с.
63. **Гальперин, П.Я.** Введение в психологию / П.Я. Гальперин. – Ростов-н/Д: Феникс, 1999. – 332 с.
64. **Гершунский, В.Я.** Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы / В.Я. Гершунский. – М.: Педагогика. – 1987. – 263 с.

65. Гин, А.А. Приемы педагогической техники: пособие для учителей / А.А. Гин. – Мн.: НМЦ «Учебная книга и средства обучения», Гомель ИПП «Сож», – 1999. – 88 с.
66. Дьюи, Дж. Психология и педагогика мышления; пер. с англ. Н.М. Никольской / Дж. Дьюи. – М.: Совершенство, 1997. – 208 с.
67. Жук, А.И. Управленческие и дидактические аспекты технологизации образования / А.И. Жук, Н.И. Запрудский, Н.Н. Кошель. – Мн.: АПО, 2000. – 204 с.
68. Запрудский, Н.И. Технология педагогических мастерских / Н.И. Запрудский. – Мн.: АПО; Мозырь: ООО ИД «Белый ветер», 2002. – 96 с.
69. Запрудский, Н.И. Современные школьные технологии: пособие для учителей / Н.И. Запрудский. – Мн.: Сэр-Вит, 2004. – 288 с.
70. Захарова, И.Г. Информационные технологии в образовании / И.Г. Захарова. – М.: АCADEMA, 2003. – 192 с.
71. Зорина, Л.Я. Дидактический цикл процесса обучения и его элементы // Советская педагогика. – 1983. – № 10.
72. Ивочкина, Т. Организация научно-исследовательской деятельности учащихся / Т. Ивочкина, И. Ливерц // Народное образование. – 2000. – № 3.
73. Ильин, Е.Н. Рождение урока / Е.Н. Ильин. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.
74. Исследовательская деятельность в школе / под ред. Т.В. Фроловой. – М.: Сентябрь, 1999. – 256 с.
75. Кашлев, С.С. Технология интерактивного обучения / С.С. Кашлев. – Мн.: ЧУИП «Белорусский верасень», 2005. – 196 с.
76. Кириллова, Г.Д. Теория и практика урока в условиях развивающего обучения / Г.Д. Кириллова. – М.: Просвещение, 1980. – 159 с.
77. Кларин, М.В. Инновационные модели обучения в зарубежных педагогических поисках / М.В. Кларин. – М.: Арена, 1994. – 223 с.
78. Комплексная информатизация образования / авт.-сост. О.В. Крючкова. – Мн.: Красико-Принт, 2006. – 176 с.
79. Костров, Б.В. Основы искусственного интеллекта / Б.В. Костров, В.Н. Ручкин, В.А. Фулин. – М.: ДЕСС, 2007. – 192 с.
80. Крупич, В.И. Структура и логика процесса обучения математике в средней школе / В.И. Крупич. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1985. – 117 с.
81. Кульневич, С.В. Не совсем обычный урок: Практическое пособие / С.В. Кульневич, Т.П. Лакоценина. – Ростов-н/Д: ТЦ «Учитель», 2001. – 176 с.
82. Левитес, Д.Г. Практика обучения: современные образовательные технологии / Д.Г. Левитес. – Москва-Воронеж, 1998. – 288 с.
83. Леднев, В.С. Содержание образования: сущность, структура, перспективы / В.С. Леднев. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
84. Лук, А.Н. Учить мыслить / А.Н. Лук. – М.: Знание, 1975. – 96 с.
85. Львова, Ю.Л. Как рождается урок / Ю.Л. Львова. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
86. Львова, Ю.Л. Творческая лаборатория учителя / Ю.Л. Львова. – М.: Просвещение, 1985. – 116 с.
87. Майоров, А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования / А.Н. Майоров. – М.: Народное образование, 2001. – 352 с.
88. Михайлычев, Е.А. Дидактическая тестология. Научно-методическое пособие / Е.А. Михайлычев. – М.: Народное образование, 2001. – 432 с.
89. Мищенко, А.С. О некоторых принципах преподавания математики в школе // Математика в школе. – 1982. – № 2. – С. 50-52.

90. О школьном учебнике математики / К.И. Нешков [и др.] // Математика в школе. – 1982. – № 2. – С. 52-57.
91. Нешков, К.И. Функции задач в обучении // Математика в школе. – 1971. – № 3. – С. 4-7.
92. Нильсон, Н. Искусственный интеллект: Методы поиска решения задач / Н. Нильсон. – М.: Мир, 1973. – 270 с.
93. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / под ред. Е.С. Полат. – М.: Академия, 2000. – 224 с.
94. Окунев, А.А. Урок? Мастерская? Что еще? / А.А. Окунев. – СПб.: Филиал изд-ва «Просвещение». 2001. – 304 с.
95. Основы педагогики и психологии высшей школы / под ред. А.В. Петровского. – М.: МГУ, 1986. – 304 с.
96. Петровский, Г.Н. О содержании понятий педагогической и образовательной технологий // Адукацыя і выхаванне. – 2002. – № 1. – С. 20-26.
97. Пидкасистый, П.И. Искусство преподавания / П.И. Пидкасистый, М.Л. Портнов. – М.: Педагогическое общество России, 1999. – 212 с.
98. ПМК «Геометрия 8 класс: поддержка учебника Н. М. Рогановского» (разработан в рамках республиканской программы «Информатизация системы образования» по заказу Главного информационно-аналитического центра Министерства образования Республики Беларусь, 2006, госрегистрация 200645114, дата регистрации 16.11.2006).
99. Рогановская, Е.Н. Методика преподавания математики. Ч. 1: Дидактика математики. Темы 1-4 / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2002. – 92 с.
100. Рогановская, Е.Н. Методика преподавания математики. Ч. 1: Дидактика математики. Темы 5-6 / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2003. – 64 с.
101. Рогановская, Е.Н. Методика преподавания математики. Ч. 1: Дидактика математики. Учебно-исследовательский практикум для студентов физико-математического факультета / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2004. – 110 с.
102. Рогановский, Н.М. Геометрия: учебное пособие для 8-го класса с углубленным изучением математики / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская, О.И. Тавгень. – Мн. Народная асвета, 2005. – 245 с.
103. Рогановский, Н.М. Школьный электронный учебник математики: технология разработки и использования / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская, О.И. Тавгень // Матэматыка: Праблемы выкладання. – 2007. – № 2.
104. Рогановский, Н.М. Школьный электронный учебник математики: обучающие, развивающие и контролирующие тестовые задания / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская, О.И. Тавгень // Матэматыка: Праблемы выкладання. – 2007. – № 5.
105. Технологии учебного процесса / сост.: С.В. Дормаш и Т.Е. Заводова. – Мн.: Изд-во ООО «Красико-Принт», 2004. – 176 с.
106. Третьяков, П.И. Технология модульного обучения в школе: практико-ориентированная монография / П.И. Третьяков, И.Б. Сенновский. – М.: Новая школа, 2001. – 352 с.
107. Тучнин, Н.П. Как задать вопрос / Н.П. Тучнин. – М.: Просвещение, 1993. – 192 с.
108. Хуторской, А.В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения / А.В. Хуторской. – М.: МГУ, 2003. – 416 с.
109. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1985. – 240 с.
110. Эрдниев, П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике / П.М. Эрдниев. – М.: Учпедгиз, 1960. – 150 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Тема 1. ПРЕДМЕТ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ	5
1. Объект и предмет методики преподавания математики	5
2. Соотношение понятий «система», «технология» и «методика» обучения математике	8
3. Связь методики преподавания математики с математикой. Современные тенденции в школьном математическом образовании	10
4. Парадигмы и концепции обучения	12
5. Задания для практического занятия	19
Тема 2. ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ	19
1. Цели обучения как систематизирующий фактор	20
2. Взаимосвязь целей, содержания, средств, методов и форм обучения математике	22
3. Постановка образовательных целей обучения математике	24
4. Постановка развивающих целей обучения математике	31
5. Постановка воспитательных целей обучения математике	36
6. Самое трудное, но необходимое – комплексное планирование целей обучения, таблица целей, дерево целей, структура целей	39
7. Задания для практического занятия	43
Тема 3. ПРИНЦИПЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ	46
1. Выбор принципов обучения	47
2. Необходимость расширенной трактовки принципа научности обучения	58
3. Интегративный принцип в обучении	70
4. Система принципов обучения (подведение итогов)	77
5. О технологии реализации принципов обучения	78
6. Задания для практических и лабораторных работ	82
Тема 4. СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ	82
1. Традиционная технология обучения в ее современном состоянии	83
2. Кружоблочное изложение учебного материала	90
3. Информационная технология обучения, предусматривающая использование электронного учебника	100
4. Технология обучения, предполагающая организацию управляемой самостоятельной работы учащихся на основе тестовых заданий	102
5. Задания для практического занятия	109

Тема 5. ШКОЛЬНЫЙ УЧЕБНИК МАТЕМАТИКИ – СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ	110
1. Учебник на традиционном носителе	110
2. Школьный электронный учебник	114
3. Интегративный учебник	127
4. Задания для практического занятия	132
Тема 6. МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ	133
1. Состав мировоззренческих и методологических знаний	133
2. Ознакомление учащихся с мировоззренческими знаниями	134
3. Ознакомление учащихся с методологическими знаниями (с методами научного познания)	139
4. Математические методы познания	147
5. Задания для практических и лабораторных работ	151
Тема 7. МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ	152
1. Многомерность метода обучения	153
2. Из истории развития методов обучения	153
3. Классификации методов обучения	155
4. Характеристика некоторых методов обучения	157
5. О сочетании методов обучения	169
Тема 8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДИКА ИХ ИЗУЧЕНИЯ	174
1. Понятие и определение (сведения из логики)	174
2. Методика формирования понятий	180
3. Задания для практических и лабораторных работ	193
Тема 9. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ	194
1. Теорема и доказательство (сведения из логики)	194
2. Методика обучения теоремам и доказательствам	196
3. Задания для практических и лабораторных работ	214
Тема 10. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	214
1. О понятии «задача»	215
2. Задача и проблемная ситуация	218
3. Состав и структура задачи	222
4. Требования к формулированию задач и проблемных ситуаций	225
5. Информационно-эвристическая структура и типология проблемных ситуаций и задач (с учетом математических методов и эвристических средств)	234
6. Информационно-эвристическая структура процесса решения задачи и разрешения проблемной ситуации	237

7. Управление поиском решения задач	248
8. Задания для практических и лабораторных занятий	259
Тема 11. ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ. УРОК МАТЕМАТИКИ	261
1. Что такое урок?	262
2. О классификации уроков	264
3. Многообразие структур урока	266
4. Требования к уроку	270
5. Подготовка к уроку	275
6. Составление конспекта урока	278
7. Факультативные занятия и внеклассная работа	296
8. Задания для практических и лабораторных занятий	303
ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА	304
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА	306

Учебное издание

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В 2-х частях

**Часть 1. Общие основы методики преподавания математики
(общая методика)**

Учебное пособие

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать **10.03.2010 г.**
Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 18,1. Уч.-изд. л. 18,5. Тираж 300 экз. Заказ № **107**,

Учреждение образования "Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО "МГУ им. А.А. Кулешова". 212022, Могилев, Космонавтов, 1.