УДК 511.36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ АППРОКСИМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

Борбат В. Н. (Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра математики и информатики)

Аннотация. Определено точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами.

Первые работы, которые позволили с единых позиций взглянуть на получение оценок снизу размерности Хаусдорфа, множеств нулевой меры Лебега в метрической теории диофантовых приближений принадлежат А. Бейкеру и В. Шмидту [1]. Они ввели понятие регулярной системы точек и показали, как с ее помощью на основе метрической теоремы строить оценки снизу размерности Хаусдорфа. При этом центр тяжести перемещался на конструирование регулярной системы точек, но затем оценка снизу получается во всех задачах единообразно.

После доказательства В.Г. Спринджуком гипотезы Малера [2] в работе [1] была выдвинута следующая гипотеза. Пусть $S_n(w)$ множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много алгебраических чисел α степени не более n, удовлетворяющих неравенству $|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w}$, где $H(\alpha)$ высота алгебраического числа α. Тогда при $w > n + 1$ для размерности Хаусдорфа множества $S_n(w)$ справедливо неравенство $\dim S_n(w) \geq \frac{n+1}{w}$. В этом состояла гипотеза Бейкера-Шмидта, которая была доказана в [3]. Так же в [3] было доказано, что $\dim S_n(w) \leq \frac{n+1}{w}$. Откуда получается точное значение размерности Хаусдорфа множества $S_n(w)$.

В [4] доказана метрическая теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Теорема 1. Пусть $\mu L_n(w)$ мера Лебега множества $x \in R$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+\gamma} \\ |P'(x)| < H^{1-\gamma-\varepsilon}, \end{cases}$$

где $0 < \gamma < 1$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu L(w) = 0$.

В [5] на основе теоремы 1 получены оценки для размерности Хаусдорфа множества действительных чисел при приближении их алгебраическими числами специального вида.

Пусть Γ множество действительных алгебраических чисел α степени не более n, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n, корнем которого является α и такой, что $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$. Через $B_n(w)$ обозначим множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много чисел $\alpha \in \Gamma$, удовлетворяющих неравенству

$$|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w} \tag{1}$$

Теорема 2. При $w > n + 1 - 2\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w} \le \dim B_n(w) \le \min\{1, \frac{n+1-2\gamma}{w}\} \tag{2}$$

В данной работе определено точное значение размерности Хаусдорфа множества $B_n(w)$.

Теорема 3. При $w > n + 1 - 2\gamma$ имеем

$$\dim B_n(w) = \frac{n+1-2\gamma}{w}.$$

Литература

1. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – № 13. – P. 1–11.

2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 194 с.

3. Берник, В. И. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Минск : Наука и техника, 1988. – 144 с.

4. Борбат, В. Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных / В. Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. Наук. – 1995. – № 1. – С. 9–16.

5. Борбат, В. Н. Оценка размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами / В. Н. Борбат. – Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. – 2016. – № 1(47). – С. 23–27.