

ДИНАМИКА БИФУРКАЦИЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ПО ПАРАМЕТРАМ ДИВЕРГЕНЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕНТРА ИЛИ КРАТНОГО ФОКУСА

Морозов Н. П. (Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра математики и информатики)

Аннотация. Возможные фазовые портреты квадратичной системы известны [1]. Цель данного исследования состоит в изучении динамики бифуркаций квадратичной системы по параметрам дивергенции при наличии состояния равновесия типа центр. В основе метода исследования лежит специальное представление систем на плоскости [2; 3].

Представим квадратичную систему (см. [1], [2])

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) \end{cases} \quad (1)$$

в следующем виде ($H - \sigma$ вид)

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + x\sigma(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + y\sigma(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь естественный гамильтониан квадратичной системы

$$H(x, y) = h_2(x, y) + h_3(x, y),$$

где $h_2(x, y) = \frac{1}{2}(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2),$

$$h_3(x, y) = \frac{1}{6}(a_{02}y^3 + \mu_{10}x^2y + \mu_{01}xy^2 - b_{20}x^3),$$

$$\sigma(x, y) = \frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{\sigma}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y).$$

При условии $\Delta_h = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10} > 0$ система (2) путем приведения квадратичной части естественного гамильтониана к канонической форме (см. [3], [4]) линейным преобразованием

$$x = \alpha u + k \left(\frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right) v, \quad y = \gamma u + k \left(b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right) v \quad (3)$$

и заменой $\tau = \omega t$ приводится к виду (при прежнем обозначении переменных и параметров системы)

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{6}(3a_{02}y^2 + \mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x \left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y) \right), \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{6}(b_{20}x^2 - 2\mu_{10}xy - \mu_{01}y^2) + y \left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y) \right). \end{cases} \quad (4)$$

Пусть квадратичная система изначально имела такой вид. Тогда систему (4) можно рассматривать как основного представителя системы (1) в классе систем, приводимых линейным преобразованием (3) к этому виду.

Положим

$$b_{20} = \gamma \cos \beta, \quad a_{02} = \gamma \sin \beta, \quad \mu_{01} = 3b_{20} + \lambda \sin \alpha, \quad \mu_{10} = -3a_{02} + \lambda \cos \alpha, \\ \sigma_{10} = r \cos \theta, \quad \sigma_{01} = r \sin \theta, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \gamma, \lambda, r, \beta, \alpha, \theta \in R.$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(\gamma \sin \beta (y^3 - 3x^2y) + \gamma \cos \beta (3xy^2 - x^3)) + \\ + \lambda \gamma x(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = \frac{1}{2}\rho^2 + h_3(x, y).$$

Будем рассматривать систему (4) в одном из случаев наличия центра. В этих обозначениях условие центра имеет вид

$$\sigma_{00} = 0, \quad \lambda = 0, \quad \theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi, \quad k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3; \}$$

Состояние равновесия $O(0; 0)$ при этом условии является центром, а система (4) преобразованием поворота приводится либо к виду $(\theta = \frac{\beta}{3} - \frac{\pi}{6})$

$$\dot{u} = v + \frac{\gamma}{2}v^2 + \left(\frac{r}{3} - \frac{\gamma}{2}\right)u^2, \quad \dot{v} = -(1 - (\gamma + \frac{r}{3})v)u, \quad (5)$$

либо к виду $(\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{6})$

$$\dot{u} = v - \frac{\gamma}{2}v^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{r}{3}\right)u^2, \quad \dot{v} = -(1 + (\gamma - \frac{r}{3})v)u.$$

Теорема. 1) Система (5) имеет две инвариантные кривые: гиперболу

$$(при \ r \neq \frac{3}{2}\gamma \text{ и } r \neq 6\gamma) \ 3u^2 - \left(v + \frac{4}{2\gamma - \frac{r}{3}}\right)^2 = \frac{8r}{(\gamma - \frac{2r}{3})(2\gamma - \frac{r}{3})^2} \text{ и прямую } v = \frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma}$$

(при $r \neq -3\gamma$). Точки пересечения этих кривых $O_2\left(\frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\gamma + \frac{r}{3}}{\frac{\gamma - r}{2}}}; \frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma}\right), O_3\left(-\frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\gamma + \frac{r}{3}}{\frac{\gamma - r}{2}}}; \frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma}\right)$ являются

состояниями равновесия системы.

2) При $-3\gamma < r < \frac{3}{2}\gamma$ система имеет четыре состояния равновесия: центр $O(0; 0)$ и три седла $O_1(0; -\frac{2}{\gamma}),$

$$O_2\left(\frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\gamma + \frac{r}{3}}{\frac{\gamma - r}{2}}}; \frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma}\right), O_3\left(-\frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\gamma + \frac{r}{3}}{\frac{\gamma - r}{2}}}; \frac{1}{\frac{r}{3} + \gamma}\right).$$

3) При $r \rightarrow \frac{3}{2}\gamma - 0$ состояния равновесия O_2 и O_3 уходят на бесконечность и в круге Пуанкаре сливаются при $r = \frac{3}{2}\gamma$ с состояниями равновесия на бесконечности $B_0(1; 0)$ и $B_3(1; \pi)$ соответственно (рис. 3).

При $r \rightarrow -3\gamma + 0$ состояния равновесия O_2 и O_3 уходят на бесконечность и в круге Пуанкаре сливаются при $r = -3\gamma$ с состояниями равновесия $B_1(1; \frac{\pi}{6})$ и $B_2(1; -\frac{\pi}{6})$ соответственно (рис. 6).

4) При $-\frac{9}{2}\gamma < r < 3\gamma$ система имеет те же четыре состояния равновесия: центр $O(0; 0)$, седло $O_1(0; -\frac{2}{\gamma})$, неустойчивый узел O_2 и устойчивый узел O_3 (рис. 7).

5) При $r = -\frac{9}{2}\gamma$ состояния равновесия O_1, O_2, O_3 сливаются, образуя сложное состояние равновесия $O_1(0; -\frac{2}{\gamma})$ (рис. 8).

6) При $r < -\frac{9}{2}\gamma$ система имеет два состояния равновесия $O(0; 0)$ и $O_1(0; -\frac{2}{\gamma})$ типа центр (рис. 9).

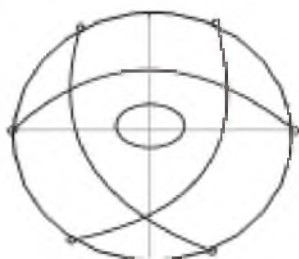


Рис. 1. ($r=0$)

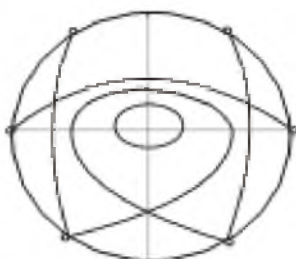


Рис. 2. ($0 < r < \frac{3}{2}\gamma$)

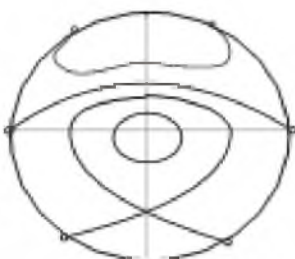


Рис. 3. ($r = \frac{3}{2}\gamma$)

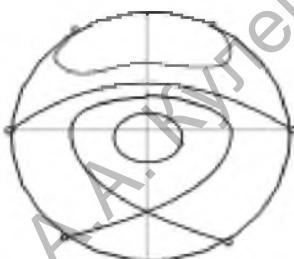


Рис. 4. ($r > \frac{3}{2}\gamma$)



Рис. 5. ($3\gamma < r < 0$)



Рис. 6. ($r = 3\gamma$)



Рис. 7. ($-\frac{9}{2}\gamma < r < 3\gamma$)



Рис. 8. ($r = -\frac{9}{2}\gamma$)

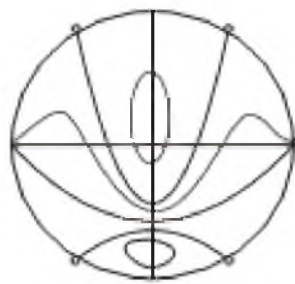


Рис. 9. ($r < -\frac{9}{2}\gamma$)

Рассмотрена динамика бифуркаций при $\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{6}$. При изменении θ на величину $\frac{2\pi}{3}$ фазовые портреты повторяются.

Литература

1. Reyn, J. Phase Portraits of planar quadratic systems / J. Reyn. – Springer, 2007. – 333 p.
2. Морозов, Н. П. О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Весник МДУ імя А. А. Куляшова. Серія В. – 2011. – № 2 (38). – С. 43–49.
3. Морозов, Н. П. Приведение автономных систем второго порядка к специальному виду. Естественный гамильтониан системы / Н. П. Морозов // Весник МДУ імя А. А. Куляшова. Серія В. – 2016. – № 1(47). – С. 32–42.
4. Марченко, И. В. Об одном подходе к изучению линейных стационарных систем на плоскости / И. В. Марченко, Н. П. Морозов // Весник МДУ імя А. А. Куляшова. Серія В. – 2015. – № 2 (46). С. 23–31.