УДК 517.925.42

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЮЛАКА – ЧЕРКАСА СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ПЯТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Сидоренко И. Н. (Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра математики и информатики)

Аннотация. Рассматривается система Льенара с кубической вязкостью и восстанавливающие силой в виде полинома пятой степени. Предложен алгоритм построения систем с заданным распределением предельных циклов «нормального размера». Получены системы со следующими распределениями предельных циклов (((1,0),1),1), (((0,0),1),1), (((0,0),2),0), (((0,0),0),2). Доказательство точности полученных распределений предполагается через построение соответствующих функций Дюлака – Черкаса.

При качественном исследовании автономных систем на плоскости наиболее трудной является задача оценки числа предельных циклов, которая не решена даже для простейших классов таких систем. В работе рассматривается система Льенара

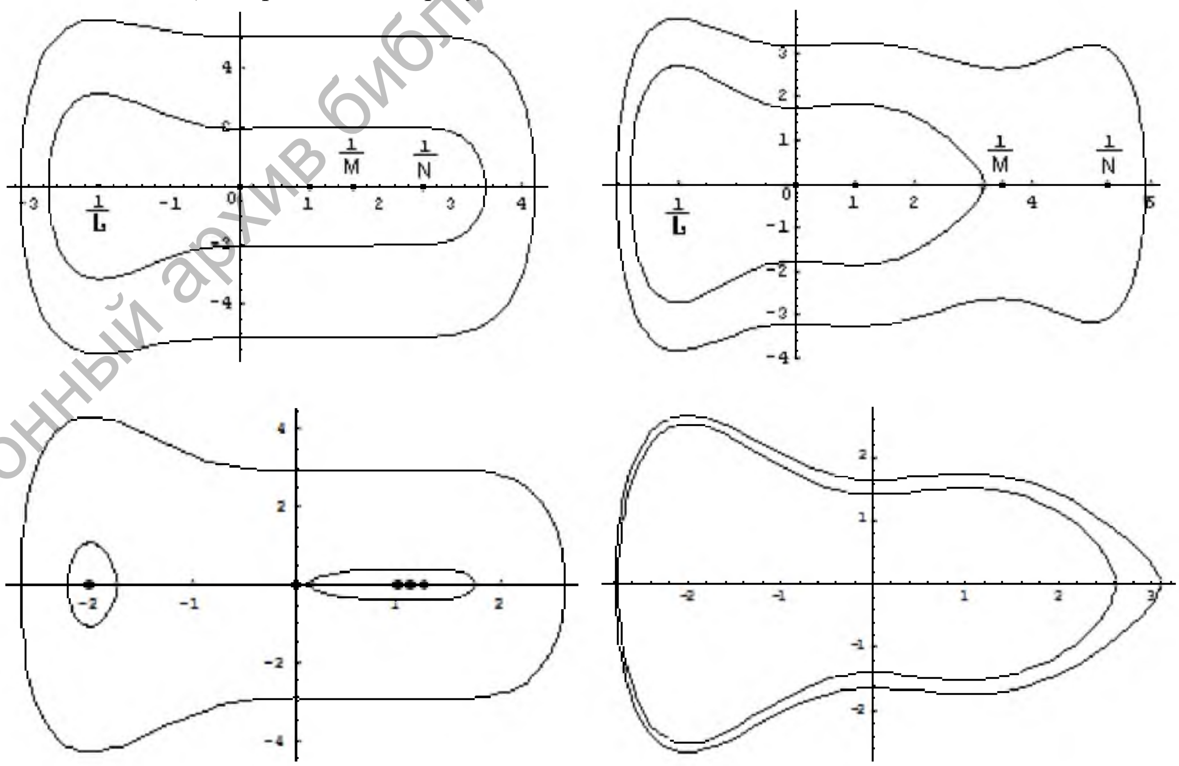
$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \tag{1}$$

где $f(x)$ – полином первой степени, а $g(x) = x(1-x)(1-Kx)(1-Lx)(1-Mx)$, $-1 < L < 0$, $0 < K < M < 1$.

При таких значениях параметров рассматриваемая система имеет три антиседла и два седла. Результаты исследований [1; 2] можно естественным образом обобщить на случай пяти особых точек. Метод основан на гипотезе Смейла, по которой число предельных циклов системы (1) равно числу положительных нулей функции $\varphi(u) = \widetilde{F}(u) - \widetilde{F}(-u)$, где $\widetilde{F}(u) = F(\varphi(u))$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\varphi(u)$ – функция, обратная функции $u = \sqrt{2G(x)}sign(x)$, $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Число положительных нулей функции $\varphi(u)$ равно числу решений системы

$$G(x) = G(y),\ F(x) = F(y),\ x < 0,\ y > 0,$$

то есть задача оценки числа предельных циклов системы (1) сводится к алгебраической задаче исследования решений полиномиальной системы. Этим же методом строятся системы (1) с распределениями предельных циклов, изображенных на рисунке.



Различные распределения предельных циклов системы Льенара (1) с пятью особыми точками

Для точной оценки числа предельных циклов будем использовать функцию Дюлака – Черкаса.

Определение. *Функция* $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$ *называется функцией Дюлака – Черкаса для системы*

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{2}$$

$$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(\Omega),$$

в области, если существует такое действительное число $k \neq 0$, *что справедливо неравенство*

$$\Phi = k\Psi\ div\,\varphi+\frac{\partial\Psi}{\partial x}P+\frac{\partial\Psi}{\partial y}Q>0(<0),\ \forall(x,y)\in\Omega,\ \varphi=(P,Q). \tag{3}$$

Справедлива

Теорема 1 [3; 4]. *Пусть в односвязной области* $div\,\varphi(A)\neq 0$ *система* (2) *имеет единственную особую точку – антиседло A,* $div\,\varphi(A)\neq 0$, $\varphi=(P,Q)$. *Пусть также для системы* (1) *существует функция Дюлака – Черкаса* $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$, *при этом уравнение* $\Psi(x,y)=0$ *определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из* $q-1$ *двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (2) *имеет точно один предельный цикл, а в целом в области* Ω *не более q предельных циклов.*

Известно [4], что для системы Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{5}$$

в полосе $\Omega_x=\{(x,y): x\in[\alpha,\beta], y\in R\}$ функцию Дюлака – Черкаса Ψ всегда можно найти в виде многочлена переменной y степени $n-1$, т.е.

$$\Psi=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)y^{n-i},$$

такую, что соответствующая функция Φ из (3) зависит только от x. При этом функция Φ является линейной комбинацией функций переменной x,

$$\Phi=\Phi(x,C)=\sum_{j=1}^{n}C_j\Phi_j(x),\ C=(C_1,C_2,...,C_n). \tag{6}$$

Для существования положительной на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции Φ в семействе (5) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$L=\max_{|C_j|\le 1}\min_{x\in[\alpha,\beta]}\Phi(x,C)>0. \tag{7}$$

Максимин (6) можно приближенно найти, решив соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i,C)\ge L,\ L\to\max,\ |C_j|\le 1 \tag{8}$$

на сетке узлов $x_i\in[\alpha,\beta]$, $i=\overline{1,N0}$, сведя ее к стандартной задаче линейного программирования. Выбор сетки узлов, числа $k<0$ и числа n осуществляется в соответствии с конкретной задачей.

Литература

1. Сидоренко, И. Н. О построении функции предельных циклов для системы Льенара с четырьмя особыми точками / И. Н. Сидоренко // Итоги научных исследований ученых МГУ имени А. А. Кулешова 2015 г. : материалы научно-методической конференции / под ред. Е. К. Сычовой. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2016. – С. 149–152.

2. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы одной системы Льенара / И. Н. Сидоренко // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сб. науч. тр. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Ю. М. Вувуникян (отв. ред.) [и др.]. – Гродно : ГрГУ, 2007. – С. 65–66.

3. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013 – 419 с.

4. Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.