Н. М. Рогановский, доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова,
Е. Н. Рогановская, кандидат педагогических наук, доцент, докторант Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,
С. С. Новашинская, аспирант кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВАХ ОБУЧЕНИЯ

Аннотация

В данной статье отражена проблема представления и конструирования задачного материала курса геометрии средней школы в электронных средствах обучения. С целью усиления обучающих и развивающих качеств системы задач предложена методика построения задач в виде микросред задач с использованием методов редукции и суперпозиции.

Ключевые слова: задача, электронные средства обучения, школьный электронный учебник, тестовое задание, микросреда задач, метод редукции, метод суперпозиции.

Введение

Проблемы обучения геометрии в средней школе были и остаются объектом внимания учёных и педагогов разных стран. В настоящее время эти проблемы стали особенно актуальны в связи с изменением условий практики обучения. На качество обучения заметно влияет сокращение количества часов на математику, отмена углублённого уровня обучения, излишняя ориентация учителей на задания Централизованного тестирования (в которые задачи на доказательство и построение вообще не включаются), недостаточно активное использование учителями-предметниками компьютерной технологии. В практике обучения решению задач сохраняется существенный недостаток: в школе до сих пор опираются на репродуктивные виды деятельности, на сообщение знаний в готовом виде, на демонстрацию решений задач и последующее их решение по образцу. В результате такой методики умение учащихся решать задачи и, как следствие, развитие учащихся остаются на невысоком уровне [5].

Систематизация задач внутри параграфа ещё не стала предметом специального исследования или затрагивается поверхностно. В учебниках в лучшем случае реализуется тематическая систематизация задач по нарастанию их сложности. При выполнении домашних работ ученик часто оказывается наедине с непреодолимыми для него трудностями (в виду того, что необходимая помощь со стороны учебника либо отсутствует, либо оказывается недостаточной).

В данной статье обсуждаются вопросы использования *метода редукции* (разбиения исходной задачи на подзадачи) и *метода суперпозиции* (объединение исходных подзадач в одну крупную задачу) в двух направлениях: как приёмов систематизации задач в учебнике и как приёмов управления поиском решения задач (в контексте метода обучения). При этом естественным образом приходим к необходимости использования понятий *микросреды задач* и *локальной среды задач*, введённых в источнике [5].

Теория

Под *задачей* будем понимать определённую цель, заданную в конкретной ситуации в совокупности с некоторыми условиями, существующую вместе с субъектом. Более детально задачу можно охарактеризовать как тройку, компонентами которой являются:

- задача как математический объект;
- проблемная ситуация, связанная с её решением;
- субъект (ученик, являющийся субъектом поисковой деятельности по решению задачи).

Отметим, что субъектный подход к математическим задачам развивается в работах Ю. М. Колягина [1], В. И. Крупича [2], Е. Н. Рогановской [5; 6], Л. М. Фридмана [7] и др.

Понятие, близкое к понятию «разбиение задачи на подзадачи», используются в работах Д. Пойа. Так, широко употребляется термин *вспомогательная задача*: «вспомогательная задача — это задача, которую мы рассматриваем не ради неё самой, а лишь потому, что надеемся, рассматривая её, приблизиться к решению другой исходной задачи» [4, с. 65]. Вспомогательная задача может быть связана с исходной непосредственно или косвенно. Отсюда возможны два вида подзадач.

Первый вид подзадач: *подзадача — это вспомогательная задача, решение которой является частью решения целевой задачи.* Допустим, что решение данной задачи состоит из 6 элементарных шагов, которые нельзя разбить на более мелкие шаги. В каждом шаге либо доказывается некоторое утверждение, либо находится значение вспомогательной величины, либо выполняется промежуточное построение. Для каждого шага может быть сформулирована *элементарная подзадача* целевой (основной, исходной) задачи. Предъявление ученику последовательности подзадач естественно рассматривать как помощь в решении исходной задачи. Чаще всего редукция исходной задачи к полному набору элементарных подзадач методически нецелесообразна, так как это оказывается слишком большой подсказкой (немаловажно, чтобы учащиеся не только использовали готовые цепочки подзадач, но и учились сами составлять подзадачи). В этих случаях некоторые элементарные подзадачи объединяют и образуют меньшее число *укрупнённых подзадач.* Формальным признаком подзадач является то, что их решение составляет часть решения целевой задачи. Именно в таком смысле понятие подзадачи используется в теории искусственного интеллекта [3]. Редукцию целевой задачи к этому виду подзадач будем называть *формализованной редукцией.* Исходная задача и 2—3 её подзадачи образуют *микросистему задач.* Характерно, что микросистема задач в этом случае составлена на одной и той же математической ситуации, в ней говорится об одном и том же математическом объекте. Решение микросистемы задач рассматривается как выяснение различных свойств объекта, заданного в исходной задаче. Методическое назначение микросистемы задач — уменьшить трудность решения исходной задачи. Микросистемы к близким в некотором отношении задачам образуют *локальные среды задач.* Например, возможны микросистемы к прямой задаче, к обратным задачам, к обобщённой задаче. Эти микросистемы естественно объединить и рассматривать как единую локальную среду.

Второй вид подзадач: *подзадача — это вспомогательная задача, решение которой не является частью решения целевой задачи, но которая подсказывает идею, способ, метод решения целевой задачи.* Вспомогательная задача в этом случае косвенно связана с исходной и формально не представляет собой элементарной или укрупнённой подзадачи первого вида. Эта связь носит исключительно дидактический и эвристический характер. Исходная задача — это задача, решаемая в данный момент времени, подзадача — аналогичная, сходная, знакомая, ранее решённая задача. В этом случае подзадача также помогает решению основной задачи, играет роль эвристического средства. Редукцию целевой задачи к подзадачам такого вида назовём *дидактической редукцией*. Введение и использование данного понятия представляется весьма ценным для методики преподавания математики.

Комбинированная редукция: редукция, использующая в той или иной комбинации редукции первых двух видов.

Отметим, что *последовательность расположения задач* при использовании метода редукции такова: исходная (основная) задача — подзадачи. Примечательно, что при использовании метода редукции хорошо прослеживается цель приведения подзадач. Эта последовательность может быть как использована в учебнике, так и предлагаться на уроке учителем (если в учебнике она отсутствует).

Суперпозиция задач предполагает расположение задач в обратной последовательности: вначале идут подзадачи, которые варьируются, постепенно укрупняются и в заключение помещается наиболее крупная (целевая) задача. Цели приведения подзадач в редукции и суперпозиции одинаковы. Особенность суперпозиции может состоять в том, что заранее учащиеся могут не видеть, на какую задачу наводят подзадачи. Как и в первом методе, на основе суперпозиции задач могут быть образованы микросреды и локальные среды задач.

По аналогии с редукцией *суперпозиция может быть формализованной, дидактической, комбинированной*.

Объективно редукция и суперпозиция неотделимы друг от друга, внутри одной из них применяется другая, одна из них работает на другую.

Область применения методов редукции и суперпозиции. Эти методы, разумеется, не являются универсальными. Необходимость в них возникает при решении задач, обладающих субъективной новизной и трудностью, при решении достаточно содержательных в математическом отношении задач. Анализ практики обучения свидетельствует о необходимости расширения области применения этих методов на уровне методов систематизации задач в учебнике и на уровне методов обучения (составление подзадач учителем и учащимися по ходу решения целевой задачи).

Конкретизации

1. Метод формализованной редукции.

При изучении комбинаций треугольника и окружности (IX класс) может быть рассмотрена задача о прямой Симсона (рис. 1).

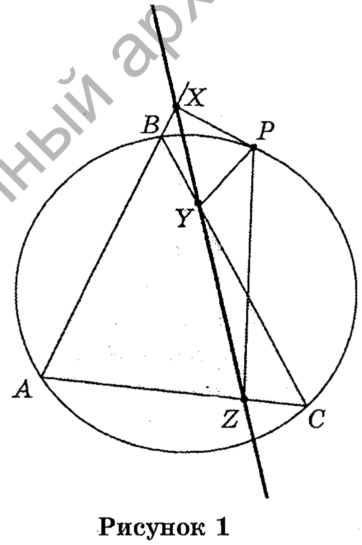

Рисунок 1

Пусть P — некоторая точка окружности, описанной около ΔABC; точки X, Y и Z — основания перпендикуляров, проведённых из точки P соответственно на прямые AB, BC, CA. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона).

Указание. Предварительно докажите, что:

1) $\angle XYB = \angle XPB$;
2) $\angle ZYC = \angle ZPC$;
3) $\angle XPZ = 180° - \angle A$;
4) $\angle BPC = 180° - \angle A$;
5) $\angle XPB = \angle ZPC$;
6) $\angle XYB = \angle ZYC$.

В этом случае целевая задача сформулирована первой, после чего приведены её подзадачи. Заметим, что приведение трудной целевой задачи вместе с подзадачами делает её доступной в обычном классе.

2. Метод дидактической редукции.

К предыдущей задаче вместо подзадач первого вида приведём *идею решения задачи*: для решения задачи достаточно доказать, что углы XYB и ZYC являются вертикальными.

3. Метод комбинированной редукции.

К той же самой задаче вначале приводится идея решения, затем подзадачи 1—6. Сообщение идеи решения делает процесс решения подзадач целенаправленным. Сообщение идеи решения при необходимости возможно и к подзадачам. Например, для подзадач 1—2 она может быть сформулирована в такой форме: рассмотрите четырёхугольники, около которых можно описать окружность.

4. Метод формализованной суперпозиции.

Обратимся ещё раз к задаче о прямой Симсона. В этом случае вначале приведём подзадачи, в конце — целевую задачу.

Задача 1. Пусть P — некоторая точка окружности, описанной около ΔABC; точки X, Y и Z — основания перпендикуляров, проведённых из точки P соответственно на прямые AB, BC, CA. Докажите, что:

1) $\angle XYB = \angle XPB$; 2) $\angle ZYC = \angle ZPC$.

Задача 2. В условиях задачи 1 докажите, что:

1) $\angle XPZ = 180° - \angle A$;

2) $\angle BPC = 180° - \angle A$.

Задача 3. В условиях задачи 1 докажите, что:

1) $\angle XPB = \angle ZPC$; 2) $\angle XYB = \angle ZYC$.

Задача 4. В условиях задачи 1 докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона).

5. Метод дидактической суперпозиции.

При изучении расстояния между двумя точками и длины отрезка (VII класс) может быть рассмотрена локальная среда, состоящая из следующих микросред.

Микросреда 1 (прямые задачи, рис. 2).

Задача 1, а. Отрезок длиной 30 см разбит на 15 равных частей. Найдите длину отрезка XY, где X — середина первого отрезка, а Y — середина последнего отрезка.

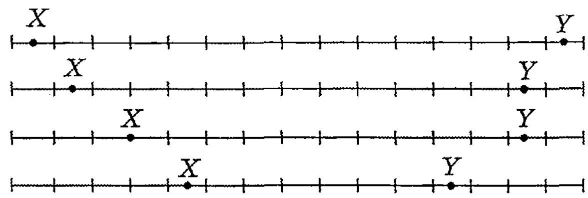

Рисунок 2

Задача 1, б. Отрезок длиной 30 см разбит на 15 равных частей. Найдите длину отрезка XY, где X — середина второго отрезка, а Y — середина предпоследнего отрезка.

Задача 1, в. Отрезок длиной 30 см разбит на 15 равных частей. Найдите длину отрезка XY, где X — правый конец третьего отрезка, а Y — середина предпоследнего отрезка.

Задача 1, г. Отрезок длиной 30 см разбит на 15 равных частей. Найдите длину отрезка XY, где X — середина пятого отрезка, а Y — середина двенадцатого отрезка.

В данном случае решение первых задач подсказывает решение следующих задач, но решение одной задачи не является решением другой.

Микросреда 2 (обратные задачи, рис. 2).

Задача 1, а. Найдите длину отрезка, разбитого на 15 равных частей. Известно, что $XY = 10$ см, где X — середина первого отрезка, а Y — середина последнего отрезка.

Задача 1, б. Найдите длину отрезка, разбитого на 15 равных частей. Известно, что $XY = 24$ см, где X — середина второго отрезка, а Y — середина предпоследнего отрезка.

Задача 1, в. Найдите длину отрезка, разбитого на 15 равных частей. Известно, что $XY = 14$ см, где X — правый конец третьего отрезка, а Y — середина предпоследнего отрезка.

Задача 1, г. Найдите длину отрезка, разбитого на 15 равных частей. Известно, что $XY = 8$ см, где X — середина пятого отрезка, а Y — середина двенадцатого отрезка.

Здесь также решение первой задачи подсказывает решение второй, первых двух задач — решение третьей, первых трёх задач — решение четвёртой.

Микросреда 3 (обобщение задач микросред 1 и 2, рис. 2).

Задача 1, а. Отрезок, длиной a см, разбит на n равных частей. Найдите длину отрезка XY, где X — середина первого отрезка, а Y — середина последнего отрезка.

Задача 1, б. Найдите длину отрезка, разбитого на n равных частей. Известно, что $XY = m$ см, где X — середина пятого отрезка, а Y — середина $(n - 4)$-го отрезка.

6. Метод комбинированной суперпозиции.

Задача 1 (VI класс). Расстояние между двумя пунктами равно 2 км. Из одного из них вначале вышел сын. После того как он прошёл 560 м, навстречу ему из другого пункта вышел отец с собакой. Собака, добежав до сына, возвращается к отцу, и это повторяется безостановочно до тех пор, пока отец и сын не встретятся. Какое расстояние пробежит собака, если сын проходит 30 м в минуту, отец — 50 м в минуту, а собака — 100 м в минуту?

Указание. Найдите вначале время движения собаки.

Ответ: 1800 м.

Задача 2. Из одного пункта в одном направлении вначале вышел сын. После того как он прошёл 560 м, вышел отец с собакой. Собака, догнав сына, возвращается к отцу и это повторяется безостановочно до тех пор, пока отец не догонит сына. Какое расстояние пробежит собака, если сын проходит 30 м в минуту, отец — 50 м в минуту, а собака — 100 м в минуту?

Ответ: 2800 м.

Решение первой задачи, безусловно, подсказывает решение второй задачи (но не является частью решения второй задачи). Имеет место дидактическая суперпозиция. Учитывая, что к первой задаче в виде указания приведена подзадача, являющаяся частью решения первой задачи, то при решении первой задачи будет использоваться формализованная суперпозиция. В итоге поиск решения второй задачи будет осуществляться методом комбинированной суперпозиции.

Отметим, что редукция сложной задачи к подзадачам — как метод поиска решения исходной задачи — для учащихся является достаточно трудоёмким процессом, особенно в условиях отсутствия его последовательного применения. Использование редукции и суперпозиции в качестве метода систематизации задач в учебнике призвано способствовать формированию необходимых поисковых навыков. Достаточно просто реализовать в учебниках суперпозицию, обеспечивающую переход от группы подзадач к заключительной задаче этой группы.

Представление задач в школьном электронном учебнике

Большинство задач в школьном электронном учебнике рекомендуем помещать в тестовой форме. Обычно тесты рассматриваются как средство измерения учебных достижений, средство исследования и измерения психических свойств и состояний испытуемых. В меньшей мере — как предмет и средство обучения. В случае, когда акцент делается на обучающую и развивающую сторону задания, целесообразно говорить о *тестовом задании*. Тестовые задания могут снабжаться помощью, группироваться в микросреды на основе различных видов редукции и суперпозиции. Микросреды задач рекомендуется комплектовать следующим образом: произвести выборку задач на непосредственное применение знаний, на применение их в наиболее типичных ситуациях; на применение знаний в знакомой ситуации; завершают эту цепочку задачи на применение знаний уже в новой (незнакомой) ситуации. Решение таких задач требует комплексного применения различных знаний. Как правило, первые три задачи будут являться подзадачами следующей основной задачи, наделяемой обычно большей познавательной и развивающей функцией.

На первой электронной странице рекомендуется помещать все задачи определённой микросреды (рис. 3). Это позволяет уже на визуальном уровне представить общий фронт работы, уяснить роль отдельных задач. Тексты задач приводятся в специальном (основном) окне, имеется отдельное окно для графики (анимации и моделей с активными точками), справа внизу расположено окно для гиперссылок (в нём приводятся указания к решению конкретной задачи). На рисунках 4 и 5 показана организация электронной страницы, посвящённой соответственно промежуточной и заключительной задачам микросреды.

В приводимом примере в систематизации задач 1—3 (основное окно) использована формализованная редукция (происходит последовательное укрупнение задач). Внутри суперпозиции используется формализованная редукция: для доказательства утверждения задачи 1, *а* надо доказать равенство треугольников OMA и OMB. Равенство этих треугольников используется далее и для доказательства утверждений задач 1, *б, в*.

Отдельный вопрос о помощи, приводимой в виде гиперссылок (правое нижнее окно). Помощь служит дополнительным средством, облегчающим процесс дидактической редукции. Редукция в данном случае означает сведение к предыдущей задаче, или к ранее известным теоретическом сведениям (например, к задаче 1, *а*) приводится указание: воспользуйтесь определением равнобедренного треугольника).

Общий вывод

В данном исследовании задача понимается как определённая цель, заданная в конкретной ситуации в совокупности с некоторыми условиями, существующая вместе с субъектом. Рекомендуется: а) объединять задачи (в различ-

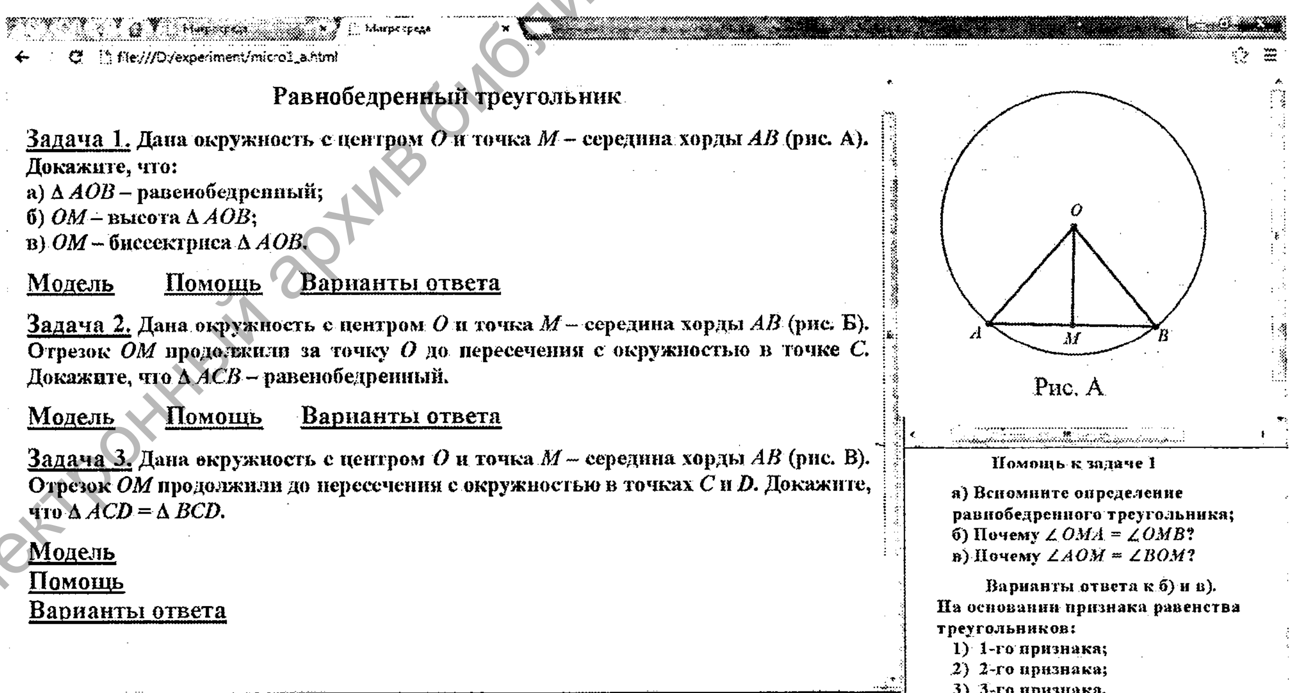

Рисунок 3

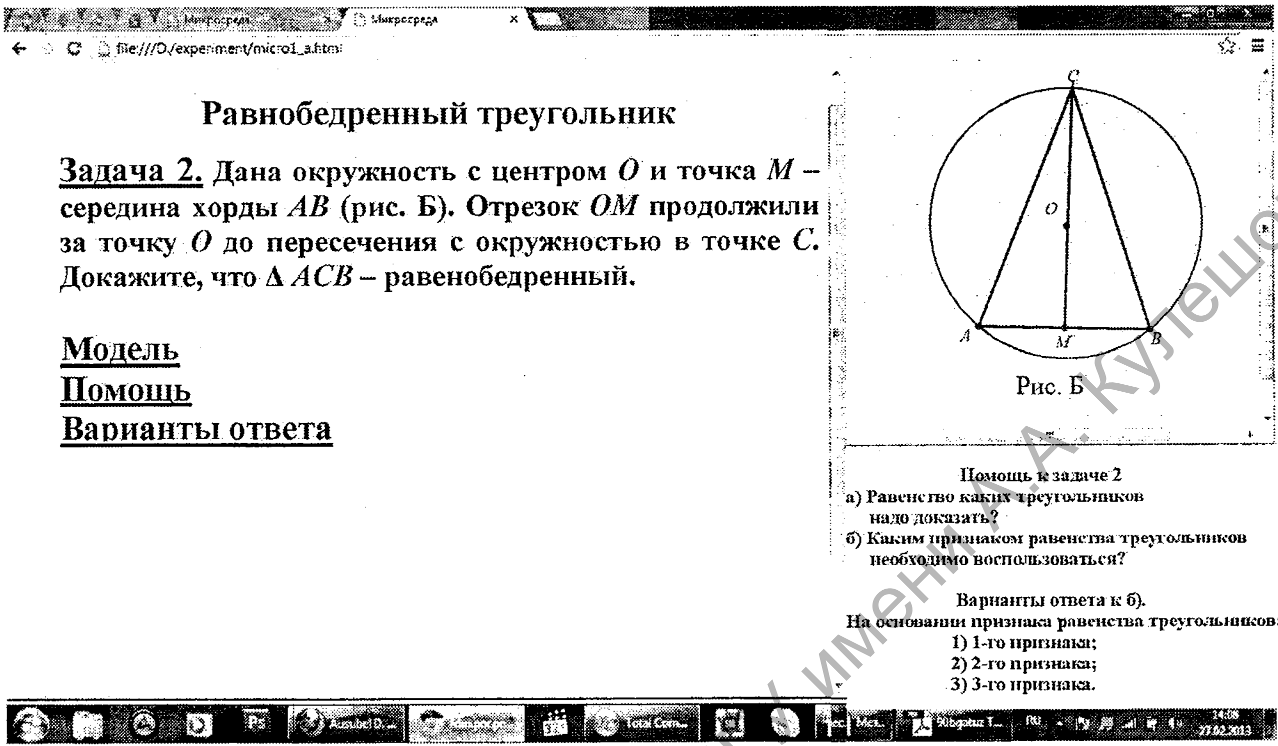

Рисунок 4

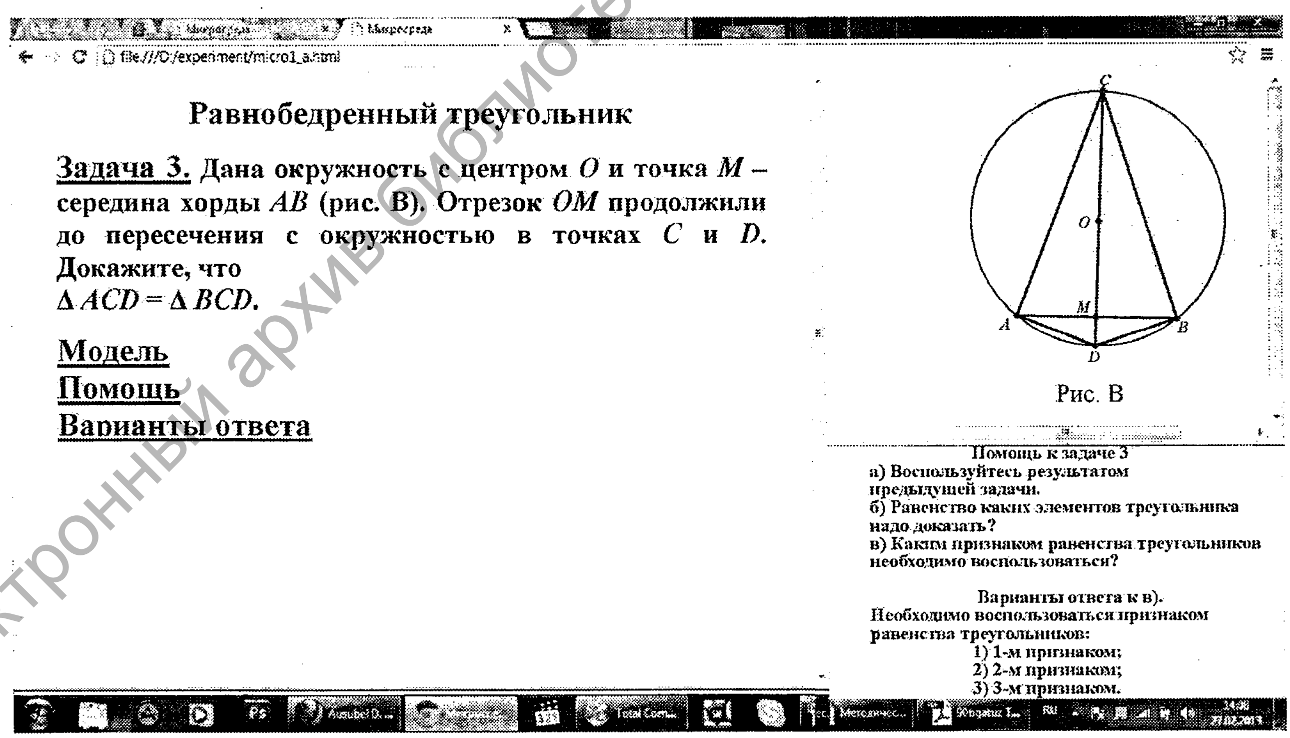

Рисунок 5

ных средствах обучения) в небольшие микросистемы (группы); б) систематизировать задачи внутри микросистемы на основе методов редукции и суперпозиции; в) представлять задачи в электронных средствах обучения в виде тестовых заданий, систематизируемых также на основе этих методов; такая систематизация вместе с помощью, приводимой к тестовым заданиям, и самоконтролем создаёт оптимальные условия для достижения основных дидактических целей обучения.

Особо отметим, что предложенный подход содействует организации самостоятельной поисковой деятельности, рассматриваемой нами в качестве основного средства развития учащихся.

Список использованных источников

1. *Колягин, Ю. М.* Задачи в обучении математике : в 2 ч. — Ч. 1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю. М. Колягин. — М. : Просвещение, 1977. — 111 с.

2. *Крупич, В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач : дис. докт. пед. наук: 13. 00. 02 / В. И. Крупич. — М., 1992. — 395 с.

3. *Нильсон, Н.* Искусственный интеллект : Методы поиска решений / Н. Нильсон. — М. : Мир, 1973. — 273 с.

4. *Пойа, Д.* Как решать задачу : пособие для учителей / Д. Пойа; пер. с англ. под ред. Ю. М. Гайдука. — М. : Учпедгиз, 1959. — 208 с.

5. *Рогановская, Е. Н.* Средово-ориентированный подход к дидактическому проектированию и применению информационно-образовательных ресурсов в процессе геометрической подготовки учащихся : монография / Е. Н. Рогановская. — Могилёв : УО «МГУ им. А. А. Кулешова», 2011. — 316 с.

6. *Рогановский, Н. М.* Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. — Ч. 1: Общие основы методики преподавания математики (общая методика) / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Могилёв : УО «МГУ им. А. А. Кулешова», 2010. — 312 с.

7. *Фридман, Л. М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л. М. Фридман. — М. : Педагогика, 1977. — 208 с.