И.В. Марченко

Т е о р и я вероятностей

Часть 1

Могилев 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

И.В. Марченко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические рекомендации

В двух частях

Часть 1

Могилев 2011

УДК 519.21 (075.8)
ББК 22.171
М30

Печатается по решению редакционно-издательского совета УО «МГУ им. А.А. Кулешова»

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и геометрии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова» *Б.Д. Чеботаревский*

Марченко, И.В.
М30 Теория вероятностей : метод. рекомендации: в 2 ч. – Ч. 1 / И.В. Марченко. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 52 с.: ил.

Методические рекомендации по своему содержанию охватывают следующие тематические разделы теории вероятностей: пространство элементарных событий, определения вероятности, основные теоремы теории вероятностей, схема Бернулли. Каждая тема сопровождается необходимыми теоретическими сведениями и решением типовых задач с подробными методическими пояснениями. Упражнения по каждому разделу разбиты на несколько групп: для закрепления теоретической части материала темы и самостоятельной подготовке к практическому занятию; для аудиторной работы; для домашней работы; задачи повышенной сложности. В конце рекомендаций предлагается список вопросов для дискуссии, которую можно организовать как на занятии по теории вероятности, так и на кураторском часе.

Методические рекомендации предназначены для всех специальностей, предусматривающих изучение курса теории вероятностей. Они будут полезны для преподавателей и ассистентов при подготовке и проведении практических занятий.

УДК 519.21 (075.8)
ББК 22.171

Упражнения группы A предназначены для закрепления теоретической части материала темы и самостоятельной подготовке к практическому занятию.

Упражнения группы B предназначены для аудиторной работы.

Упражнения группы C предназначены для домашней работы.

Упражнения группы D содержат задачи, выходящие за рамки учебного плана, а также задачи повышенной сложности. Они будут полезны тем, кто заинтересован в более глубоком изучении материала.

Студентам, отсутствовавшим на занятиях по данной теме, рекомендуется выполнить упражнения всех уровней.

Символ ♦ используется для обозначения окончания решения примера или задачи.

Упражнения снабжены ответами и указаниями в тех случаях, где это целесообразно.

Тема 1. Дискретное пространство элементарных событий. Классификация событий. Алгебра событий

Определение 1. Осуществление намеченного действия и получение его результата называется ***экспериментом***. Результат эксперимента называется его ***исходом***.

Определение 2. Всякий мыслимый результат эксперимента называется ***элементарным событием*** ω.

Определение 3. Множество элементарных событий ω таких, что в результате эксперимента происходит одно и только одно из них и все элементарные события взаимно исключают друг друга, называется ***пространством элементарных событий*** Ω.

Пространство элементарных событий *дискретно*, если число его элементов конечно или счетно. Таким образом, если число элементов пространства элементарных событий конечно, то $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,n}\}$, если же число элементов пространства Ω счетно, то $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,\infty}\}$.

Например, эксперимент E – подбрасывание монеты, исходы этого эксперимента – выпадение герба (элементарное событие ω_1) или выпадение цифры (элементарное событие ω_2). Тогда для данного эксперимента пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Определение 4. Любое подмножество пространства элементарных событий называется ***событием***. События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, …

Определение 5. Событие называется *случайным*, если в результате эксперимента оно может произойти, а может и не произойти.

Определение 6. Событие называется *достоверным*, если в результате эксперимента оно обязательно произойдет. Обозначается I (или u).

Определение 7. Событие называется *невозможным*, если при выполнении данного комплекса условий оно не происходит. Обозначается O (или v).

Определение 8. События называются ***равновозможными***, если нет оснований предполагать, что одно из них более возможно, чем другое.

Определение 9. События называются ***единственновозможными***, если при выполнении данного комплекса условий происходит одно и только одно из них.

Определение 10. Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появления другого.

Определение 11. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

Определение 12. Событие называется ***противоположным*** (***дополнительным***) событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Обозначается $\overline{A}$.

Определение 13. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***полной группой событий***, если в результате эксперимента происходит хотя бы одно из них.

Замечание 1. Пространство элементарных событий является достоверным событием, т.е. $\Omega = I$. Все элементарные события данного пространства Ω единственновозможные, попарно несовместные и образуют полную группу.

Замечание 2. Понятия противоположности и несовместности событий нетождественны. Противоположные события всегда являются несовместными, а несовместные события не всегда противоположны.

Пример 1. Эксперимент Е – подбрасывание игральной кости. Элементарные события (исходы) этого эксперимента ω_i – выпадение i очков на верхней грани игральной кости, $i = \overline{1,6}$. Пространство элементарных событий $\Omega = \left\{\omega_i \mid i = \overline{1,6}\right\}$.

Событиями эксперимента Е являются, например, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – выпадение четного числа очков, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ – выпадение нечетного числа очков, $C = \{\omega_1, \omega_3\}$ – выпадение 1 или 3 очков. События А и В равновозможны, так как содержат одинаковое число различных равновозможных элементарных событий. Очевидно, события А и С или В и С не являются равновозможными. События А и С или А и В несовместны, причем события А и В противоположные, а события А и С нет.

Полную группу событий для данного эксперимента можно образовать событиями ω_i, $i = \overline{1,6}$, или событиями А и В.

Невозможным для эксперимента Е является, например, событие – выпадение 7 очков на верхней грани игральной кости. ♦

Пример 2. Условия эксперимента – урна содержит 2 белых и 4 черных шара. Эксперимент Е – вытягивание шара из урны. Элементарные события эксперимента ω_1 – из урны извлечен белый шар и ω_2 – из урны извлечен черный шар не являются равновозможными. ♦

При описании пространства элементарных событий удобно использовать простой и наглядный способ перебора вариантов исходов эксперимента с применением деревьев. Суть его заключается в построении ***дерева подсчета***, которое является графическим изображением вероятностного пространства данного эксперимента.

Пример 3. Каково пространство элементарных событий при подбрасывании монеты и игральной кости?

При подбрасывании монеты возможно два исхода – выпадение герба (Г) или цифры (Ц). При подбрасывании игральной кости шесть вариантов исходов, согласно количеству очков выпавших на ее верхней грани (1, 2, 3, 4, 5, 6). Представим элементарные события рассматриваемого эксперимента в виде дерева подсчета. В вершинах первого уровня изобразим результаты подбрасывания монеты, а вершинах второго уровня – результаты подбрасывания игральной кости (рис. 1). Тогда каждый путь из корня к листьям (в данном дереве – это вершины второго уровня) будет представлять элементарное событие, а количество таких путей – число всех элементарных событий данного эксперимента. Как видно из рисунка 1 их 12. Отметим, что возможен и альтернативный вариант построения дерева подсчета (рис. 2).

Таким образом, пространство элементарных событий данного эксперимента

$\Omega = \{(Г,1), (Г,2), (Г,3), (Г, 4), (Г,5), (Г, 6), (Ц,1), (Ц,2), (Ц,3), (Ц, 4), (Ц,5), (Ц, 6)\}$ ♦

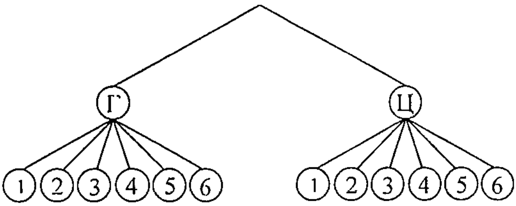

Рис. 1. Дерево подсчета примера 3

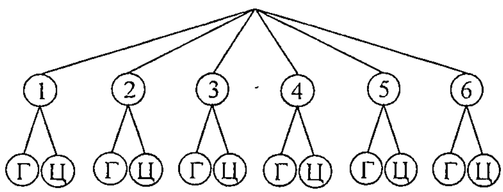

Рис. 2. Дерево подсчета примера 3

В некоторых случаях пространство элементарных событий удобно представить в виде таблицы, которая строится аналогично тому, как это делается при построении логических таблиц истинности.

Пример 4. Подбрасывается 3 монеты. Построить вероятностное пространство Ω этого эксперимента в виде таблицы.

Подсчитаем количество возможных исходов данного эксперимента. Для каждой монеты возможны два исхода – выпадение герба (Г) или цифры (Ц). Исход эксперимента для одной монеты может встретиться с любым из двух возможных исходов для второй монеты, а получившийся результат – с любым из двух возможных исходов для третьей монеты. Таким образом, число возможных исходов при подбрасывании трех монет равно $2\times2\times2 = 2^3 = 8$. Зная количество элементарных событий эксперимента, можно заполнять таблицу, описывающую вероятностное пространство данного эксперимента (см. табл. 1). ♦

Таблица 1. Пространство элементарных событий примера 4.

Монета 1	Монета 2	Монета 3
Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

Определение 14. Если при каждом осуществлении события А происходит событие В, то говорят, что ***событие А влечет за собой событие В***. Обозначается $A \supset B$.

Определение 15. События А и В называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если при выполнении данного комплекса условий оба происходят или оба не происходят. Обозначается $A = B$.

Определение 16. ***Объединением*** или ***логической суммой*** конечной или бесконечной последовательности событий называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается $A + B$ для двух событий А и В.

Определение 17. ***Пересечением*** или ***логическим произведением*** конечной последовательности событий называется событие, состоящее в осуществлении всех событий одновременно. Обозначается $A \cdot B$ для двух событий А и В.

Замечание 3. Операции над событиями производятся по тем же правилам, что и операции над множествами. Графически результаты этих операций могут быть проиллюстрированы с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Так на рисунках 3 и 4 изображены соответственно произведение и сумма двух событий А и В.

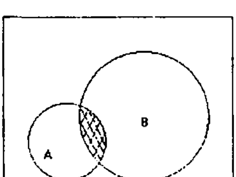

Рис. 3.

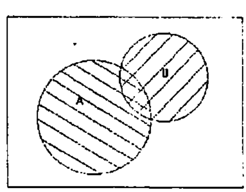

Рис. 4

Замечание 4. При словесной формулировке событий для суммы событий используется союз *ИЛИ*, для произведения – союз *И*; событие $\overline{A}$, противоположное событию A, записывается с помощью отрицания *НЕ* («*НЕ A*»).

Задача 1. Машина может появиться на любой из трех дорог. Требуется с помощью операций над событиями записать событие, состоящее в том, что: а) ни на одной из дорог не появится машина; б) машина появится хотя бы на одной из дорог; в) машина появится на одной или двух дорогах; г) машина появится на каждой из трех дорог; д) машина появится менее чем на трех дорогах.

Решение. Пусть событие A_i – машина появилась на i-ой дороге, $i = \overline{1,3}$. Для того чтобы записать указанные в условии события, сформулируем их словесно, используя союзы И, ИЛИ, отрицание НЕ и введенные события A_i.

а) Событие А – ни на одной из дорог не появится машина – означает, что машина НЕ появится на первой дороге (это событие $\overline{A_1}$, противоположное событию A_1) И машина НЕ появится на второй дороге (это событие $\overline{A_2}$) И машина НЕ появится на третьей дороге (это событие $\overline{A_3}$). Учитывая замечание 4, получаем, что $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

б) Событие В – машина появится хотя бы на одной из дорог – означает, что машина появится на первой дороге (событие A_1) ИЛИ на второй дороге (событие A_2) ИЛИ на третьей дороге (событие A_3). Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$.

в) Событие С, состоящее в том, что машина появится на одной (событие C_1) ИЛИ двух дорогах (событие C_2), можно представить в виде $C = C_1 + C_2$.

Событие C_1 означает, что машина появится на первой дороге И НЕ появится на второй дороге И НЕ появится на третьей дороге (событие $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$) ИЛИ машина НЕ появится на первой дороге И появится на второй дороге И НЕ появится на третьей дороге (событие $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$) ИЛИ машина НЕ появится на первой дороге И НЕ появится на второй дороге И появится на третьей дороге (событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$). Тогда $C_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

Аналогично тому, как это делалось для события C_1, получаем, что событие $C_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$.

Таким образом,

$$C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

г) Событие D – машина появится на каждой из трех дорог – означает, что машина появится на первой дороге (событие A_1) И на второй дороге (событие A_2) И на третьей дороге (событие A_3). В силу определения 17 имеем $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

д) Событие G – машина появится менее чем на трех дорогах – означает, что машина появится на одной дороге (событие C_1) ИЛИ двух дорогах (событие C_2) ИЛИ не появится ни на одной из дорог (событие А), т.е. $G = C_1 + C_2 + A$. ♦

Замечание 5. С помощью операций над событиями одно и тоже событие можно записать разными способами. Например, в задаче 1 событие D является противоположным событию G, т.е. $G = \overline{D} = \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}$.

Упражнения.

А1. В каждой из следующих вероятностных ситуаций определите пространство элементарных событий:

1) Из трех урн, содержащих черные и белые шары, вытягивается один шар;

2) В лаборатории, содержащей 3 установки, одна из которых неисправна, запускают 2 установки;

3) Посадку в аэропорте потребовал самолет, который следует из 5 возможных пунктов.

А2. Для экспериментов из задачи А1 запишите несколько событий. Являются ли эти события равновозможными, несовместными, противоположными, образуют ли они полную группу событий? Какие события в данном эксперименте являются единственновозможными? Объясните почему.

А3. Событие А – хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие В – бракованных изделий среди них не менее четырех. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

А4. Совместны ли события А и $\overline{A+B}$?

А5. Событие В есть частный случай события А, т.е. из появления события В следует, что событие А произошло. Следует ли из $\overline{B}$, что $\overline{A}$ произошло?

А6. Приведите примеры:

1) трех событий, образующих полную группу событий;

2) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы событий;

3) двух событий, несовместных и образующих полную группу, но не равновозможных;

4) двух событий, равновозможных и образующих полную группу, но совместных.

А7. Запишите следующие события в более простой форме:

1) $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$; 2) $\overline{\overline{A} + \overline{B}}$; 3) $(A+B)\overline{A}$; 4) $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

В1. На полке 2 книги по информатике и 3 по математике. Выбраны 2 книги. Подсчитайте количество элементарных событий этого эксперимента.

В2. Производится 2 выстрела по мишени. Событие А – ни одного попадания в мишень, событие В – одно попадание, событие С – два попадания. Являются ли события А, В, С равновозможными, единственновозможными, попарно несовместными, элементарными? Образуют ли эти события пространство элементарных событий для данного эксперимента? Назовите достоверное события в данном эксперименте. Будут ли события А и С противоположными? Ответы обоснуйте.

В3. Постройте в виде таблицы вероятностное пространство следующих экспериментов:

1) из трех урн, каждая из которых содержит белые и черные шары, вынимают по одному шару;

2) в студенческом отряде 2 первокурсника, 1 второкурсник и 2 студента третьего курса. Выбирают командира отряда и его заместителя;

3) к условию из п. 2) добавлено ограничение – командиром отряда не может быть первокурсник.

В4. Команды A и B играют между собой в турнире по баскетболу. Для победы в турнире команде необходимо выиграть три игры из четырех. Построив дерево подсчета, определите пространство элементарных событий этого эксперимента.

В5. Назвать противоположные события для следующих событий, выразив их через элементарные события эксперимента:

A – выпадение двух гербов при бросании двух монет;

B – появление белого шара при вынимании одного шара из урны, содержащей 1 красный, 2 белых и 3 черных шара;

C – три попадания при трех выстрелах;

D – хотя бы одно попадание при пяти выстрелах;

E – не более двух попаданий при пяти выстрелах;

F – выигрыш первого игрока при игре в шахматы.

В6. Возможны ли равенства: 1) $A + B = A$; 2) $AB = A$. Если да, то каковы при этом события A и B?

В7. Из таблицы случайных чисел выбраны два числа. События A и B соответственно означают, что выбрано хотя бы одно простое и хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A + B$?

В8. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A – обнаружен ровно один из четырех объектов;

B – обнаружен хотя бы один объект;

C – обнаружено не менее двух объектов;

D – обнаружено ровно два объекта;

E – обнаружено ровно четыре объекта;

F – обнаружено ровно три объекта.

Указать в чем состоят следующие события: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + C$; 4) BC; 5) $D + E + F$; 6) BF. Совпадают ли события BF и CF? Совпадают ли события BC и D?

В9. Пусть A, B, C – произвольные события некоторого пространства Ω. С помощью операций над событиями записать событие, состоящее в том, что: 1) произошло только событие A; 2) события A и B произошли, C не произошло; 3) все три события произошли; 4) произошло по крайней мере одно событие; 5) произошли по крайней мере два события; 6) произошло одно и только одно событие; 7) произошли два и только два события; 8) ни одного события не произошло; 9) произошло не более двух событий.

С1. Студент хочет получить средний балл за 3 экзамена выше 8, причем так, чтобы все экзаменационные оценки были не ниже 8. Постройте пространство элементарных событий этого эксперимента в виде таблицы.

С2. Что означают события А + А и АА?

С3. Событие А – хотя бы один из трех ответов неправильный, событие В – все три ответа правильные. Что означают события: 1) А + В; 2) АВ?

С4. Указать события противоположные следующим:

1) три дня шел дождь;

2) среди 5 человек нет ни одного мужчины;

3) из трех облигаций хотя бы одна выиграет;

4) среди четырех карт все карты разной масти.

С5. Что означает событие $A\overline{B}$, если:

1) событие А – случайно выбранное число делится на 5, событие В – данное число заканчивается 0;

2) событие А – дискриминант задуманного квадратного уравнения равен нулю, событие В – данное квадратное уравнение имеет один корень;

3) событие А – из трех машин хотя бы одна сломана, событие В – две машины из трех сломаны;

4) событие А – из трех выбранных карт две пиковой масти, событие В – одна из трех выбранных карт бубновой масти?

С6. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Событие A_i – попадание в мишень i-ым стрелком, $i=\overline{1,3}$. Записать событие, состоящее в том, что:

1) все стрелки попали в мишень;

2) ни один стрелок не попал в мишень;

3) хотя бы один стрелок попал в мишень;

4) в мишень попал только первый стрелок;

5) в мишень попал только один стрелок;

6) не все стрелки попали в мишень.

С7. Абоненту в библиотеке предлагают на выбор 3 книги и 2 журнала. Запишите события, состоящие в том, что среди трех взятых экземпляров было: 1) ровно 2 книги; 2) не менее 2 книг; 3) не более 2 книг; 4) хотя бы один журнал.

С8. На складе три группы товаров. Событие A_k состоит в том, что выбрана хотя бы одна партия товаров k-ой группы, событие A_{km} – выбрано m партий товаров k-ой группы, $k=\overline{1,3}$. Что означают события: 1) $A_1 + A_2 + A_3$; 2) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 3) $A_{11} + A_{23}$; 4) $A_{22} \cdot A_{14}$; 5) $(A_{12} + A_{21})\, A_3$?

С9. Собираясь в кино, девушка не может решить, что ей одеть. К серьгам подходят и платье, и костюм. К ожерелью костюм не подходит, но оно хорошо смотрится с платьем или сарафаном. Браслет подходит к брюкам и костюму. А кольцо с бриллиантом отлично смотрится с любой одеждой. Постройте пространство элементарных событий Ω, содержащее возможные варианты выбора девушки.

С10. Девушка из задачи С9 совсем растерялась, когда обнаружила, что не может надеть к брюкам или костюму босоножки, хотя они подходят к сарафану и платью. Платье и костюм отлично выглядят с туфлями. А вот к брюкам подойдут только ботинки. Неужели число вариантов увеличилось?

С11. Событие А состоит в том, что студент сдал коллоквиум, событие B_k, $k=\overline{1,3}$, – студент получил за k-ую контрольную работу более четырех баллов. Событие С – студент получил зачет автоматом, которое происходит, если студент сдал коллоквиум и написал хотя бы две контрольные более, чем на 4 балла. Используя операции над событиями, выразите события C и $\overline{C}$ через события А и B_k, $k=\overline{1,3}$.

D1. Команды А и В участвуют в ежегодном чемпионате по бейсболу, для победы в котором команде необходимо выиграть четыре игры из семи возможных. Если команда А выигрывает первые две игры, то сколько вариантов победы есть у команды А и сколько у команды В?

D2. В ресторане в качестве первого блюда предлагают суп или борщ. На второе можно заказать котлету, курицу или рыбу, а на гарнир можно выбрать картофель, макароны или рис. На десерт подают пирог или мороженое, а из напитков предлагают кофе, чай или лимонад. Составьте все возможные меню, содержащие три блюда и десерт, если:

1) нет никаких ограничений;

2) второе блюдо обязательно содержит рыбу;

3) на десерт выбран пирог и чай.

D3. Докажите следующие соотношения между событиями:

1) $A\subset B \Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$; 2) $A\cdot(B+C)=AB+AC$; 3) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; 4) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

D4. Найти случайное событие X из соотношения $\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B$.

D5. Доказать, что события A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу событий.

Тема 2. Классическое определение вероятности. Комбинаторика и вероятность

Определение 1 (классическое определение вероятности). ***Вероятностью события*** А называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию А, к числу n всех равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n},\ 0\le m\le n, \tag{1}$$

где $P(A)$ – вероятность события А.

Замечание 1. Классическое определение вероятности применяется, когда число всех равновозможных исходов испытания, образующих полную группу, конечно. Такой случай носит название ***классической схемы***.

Задача 1. Из 20 студентов группы 15 хорошо подготовлены к занятию. Какова вероятность того, что преподаватель вызовет отвечать неподготовленного студента?

Решение. Пусть событие А – преподаватель вызвал отвечать неподготовленного студента. Так как элементарные исходы испытания равновозможны и образуют полную группу, а число их конечно, то для нахождения вероятности события А воспользуемся формулой (1).

По условию число элементарных исходов n = 20 – числу студентов группы, число m исходов, благоприятствующих событию А, равно 5 – числу неподготовленных студентов. Тогда

$$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}.\blacklozenge$$

Классическая схема вероятностных задач совпадает с комбинаторными схемами. Поэтому при решении задач с помощью классического определения вероятности часто используются комбинаторные множества – размещения, перестановки, сочетания, а также комбинаторные правила суммы и произведения.

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Определение 2. ***Размещениями*** из n элементов по m элементов, $0\le m\le n$, называются упорядоченные подмножества, содержащие m элементов данного множества.

Число таких множеств обозначается A_n^m и находится по формуле

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Определение 3. ***Перестановками*** из n элементов называются размещения из n элементов по n. Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

По определению 2 имеем

$$P_n=A_n^n=n!$$

Определение 4. ***Сочетаниями*** из n элементов по m элементов, $0\le m\le n$, называются подмножества из m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. Их число обозначается C_n^m и определяется равенством

$$C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Замечание 1. Для правильного выбора типа комбинаторных множеств достаточно проверить определяющее их свойство: в размещениях важен порядок и состав элементов множеств, в перестановках – только порядок, в сочетаниях – только состав.

Комбинаторное правило произведения. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, ..., элемент a_k можно выбрать n_k способами, то *упорядоченный* набор $(a_1, a_2, ..., a_k)$ можно составить $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Комбинаторное правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то выбрать a или b можно $n+m$ способами.

В случае, когда элементы множества повторяются, комбинации из его элементов называются комбинаторными множествами с повторениями. Различают следующие виды таких множеств: размещения с повторениями, перестановки с повторениями и сочетания с повторениями.

Определение 5. Пусть множество содержит элементы n различных типов. ***Размещениями с повторениями*** из n элементов по m элементов называются упорядоченные подмножества, содержащие m элементов данного множества.

Их число

$$\overline{A}_n^m = n^m .$$

Пример 1. Подсчитаем число исходов при подбрасывании трех монет. В результате подбрасывания монеты на ней может выпасть герб или цифра, т.е. имеется 2 типа элементов (n = 2). Учитывая, что исходы могут повторяться, то возможные комбинации исходов есть размещения с повторениями из 2 элементов по 3 элемента, а их число $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$. ♦

Определение 6. Пусть множество из n элементов содержит n_1 элемент первого типа, n_2 элемента второго типа, ..., n_k элементов k-ого типа. ***Перестановками с повторениями*** из n элементов называются упорядоченные подмножества из n элементов данного множества, в которых элементы могут повторяться.

Число перестановок с повторениями из n элементов

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!} .$$

Пример 2. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «математика»?

В этом слове 10 букв, причем буква «м» встречается 2 раза, «а» – 3 раза, «т» – 2 раза, буквы «и», «к», «е» – 1 раз. Так как новые множества отличаются лишь порядком элементов и среди элементов есть повторяющиеся, то эти множества являются перестановками с повторениями, а их число

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10!}{2 \cdot 3! \cdot 2} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200 . ♦$$

Определение 7. Пусть множество содержит n различных типов элементов. ***Сочетаниями с повторениями*** из n элементов по m элементов называются подмножества из m элементов, в которых элементы могут повторяться и отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^m$ из n элементов по m находится по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}.$$

Пример 3. В магазине продаются 4 вида пирожных. Сколькими способами можно выбрать 7 пирожных?

В наборах пирожных виды пирожных могут повторяться, но их порядок не важен, следовательно, эти наборы являются сочетаниями с повторениями и их число

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120. \ \blacklozenge$$

Задача 2. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что в делегацию вошли две женщины и один мужчина. Для нахождения вероятности этого события воспользуемся классическим определением вероятности.

Согласно комбинаторному правилу произведения число m благоприятствующих событию А исходов равно произведению числа способов, которыми можно выбрать 2 женщины из 5, на число способов, которыми можно выбрать 1 мужчину из 25 – 5 = 20, т.е.

$$m = C_5^2 \cdot C_{20}^1 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{20!}{1!\cdot 19!} = 10\cdot 20 = 200.$$

Число всех исходов n равно числу способов, которыми можно выбрать 3 человек из 25, т.е.

$$n = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{2\cdot 3} = 23\cdot 4\cdot 25 = 2300.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{200}{2300} = \frac{2}{23}. \ \blacklozenge$$

Задача 3. В ящике десять стандартных деталей и пять бракованных. Наугад извлекаются четыре детали. Какова вероятность того, что среди них одна или две бракованных детали?

Решение. Пусть событие А состоит в том, что из 4 извлеченных из ящика деталей одна или две бракованные. Вычислим вероятность этого события по формуле (1).

Найдем число m исходов, благоприятствующих событию А. Число способов, которыми можно выбрать 3 из 10 стандартных деталей, равно C_{10}^3; а число способов, которыми можно выбрать 1 из 5 бракованных деталей равно C_5^1. Тогда по комбинаторному правилу произведения число способов выбрать 4 детали, среди которых одна бракованная, будет

$$m_1 = C_{10}^3 \cdot C_5^1 = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!} = 10\cdot 4\cdot 3\cdot 5 = 600.$$

Аналогично тому, как это делалось при нахождении числа m_1, вычислим число m_2 способов выбрать 4 детали, среди которых две бракованных. Получим

$$m_2 = C_{10}^2 \cdot C_5^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} \cdot \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 9\cdot 5\cdot 5\cdot 2 = 450.$$

Согласно комбинаторному правилу суммы искомое число

$$m = m_1 + m_2 = 600 + 450 = 1050.$$

Число всех исходов n равно числу способов, которыми можно выбрать 4 детали из 15, т.е.

$$n = C_{15}^4 = \frac{15!}{4!\cdot 11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4} = 1365.$$

Имеем

$$P(A) = \frac{1050}{1365} \approx 0{,}7692. \ \blacklozenge$$

Замечание 2. Для перебора вариантов исходов экспериментов можно использовать дерево подсчета (см. тему 1).

Упражнения.

А1. Приведите примеры вероятностных ситуаций, удовлетворяющих классической схеме.

А2. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколькими способами они могут быть распределены между командами?

А3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждая цифра присутствовала в числе только один раз?

А4. Сколькими способами можно расставить 6 книг на книжной полке?

А5. В группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать трех человек на конференцию?

А6. С помощью классического определения вероятности, докажите ее свойства: 1) $0 \le P(A) \le 1$; 2) $P(I) = 1$, $P(O) = 0$; 3) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

В1. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков – русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих пяти языков?

В2. На окружности выбрано 10 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

В3. На книжной полке установлено 10 книг. Сколькими способами можно расположить книги на полке так, чтобы три книги одного автора стояли рядом?

В4. Номерной знак автомобиля содержит 2 латинские буквы и 4 цифры. В номере скрывшейся с места аварии машины известна одна буква и две цифры. Сколько всевозможных номеров придется проверить, чтобы найти искомый, если: 1) буквы и цифры могут повторяться; 2) буквы не могут повторяться; 3) буквы и цифры не могут повторяться?

B5. Сколько существует функций, задающих взаимнооднозначное соответствие между множеством S, содержащим n элементов, и множеством F, содержащим m элементов?

B6. Сколько существует функций из множества S, содержащим n элементов, в множество F, содержащим m элементов?

B7. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на их верхних гранях, равна 8?

B8. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут белыми; 2) шары будут разных цветов.

B9. Игральная кость бросается 1 раз. Найти вероятность следующих событий: 1) A – появление не менее 5 очков; 2) B – появление не более 5 очков. Являются ли события A и B противоположными?

B10. Бросают монету и игральную кость. Найти вероятности следующих событий: 1) A – появится герб и четное число очков; 2) B – появится нечетное число очков; 3) C – появится герб. Оказывает ли на вероятности событий B и C то обстоятельство, что кость бросают вместе с монетой? Ответ обоснуйте.

B11. После проверки контрольной работы оказалось, что 6 студентов получили отличные оценки, 10 студентов – хорошие, 9 студентов – удовлетворительные оценки и 5 студентов – плохие. Какова вероятность того, что из трех произвольно выбранных работ все имеют неудовлетворительные оценки?

B12. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Какова вероятность того, что среди этих карт будет не менее двух тузов?

B13. В олимпиаде по информатике участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 9 команд в каждой. Среди участников олимпиады имеются 5 команд экстракласса. Найти вероятность следующих событий: 1) A – все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу; 2) две команды попадут в одну из групп, а три в другую.

B14. Владелец одной карточки спортлото «6 из 49» вычеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано: 1) все шесть номеров; 2) пять или шесть номеров; 3) по крайней мере три номера?

C1. Битовая строка – это строка, состоящая из нулей и единиц. Сколько существует битовых строк длиной 5? Сколько существует битовых строк длиной k?

C2. Сколько различных слов можно образовать из слова «книга»?

C3. В группе из 25 студентов требуется выбрать старосту, культорга, физорга и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

C4. Для полета в космос необходимо укомплектовать следующий экипаж: командир, первый помощник, второй помощник, два бортинженера, один врач. Командующая тройка может быть выбрана из числа 25 готовых к полету летчиков; два бортинженера – из 20 специалистов; врач – из 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?

С5. На собрании присутствует 10 мужчин и 15 женщин. Какова вероятность того, что в результате голосования председателем выберут женщину?

С6. Группе из 25 студентов преподаватель раздал 30 задач. Каждый студент выбирает себе задачу случайно и независимо от других. Какова вероятность того, что все студенты выберут одну и ту же задачу?

С7. Имея слишком мало времени, хакер пытается взломать пароль, состоящий из 10 латинских букв. Какова вероятность того, что компьютер будет взломан?

С8. Потерян листок с двухбуквенными инициалами одного человека. Какова вероятность их угадать? Какова вероятность угадать эти инициалы, если известно, что эти буквы обозначают согласные звуки? (Указание: исключить из рассмотрения буквы «ъ» и «ь»).

С9. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

С10. Некоторое устройство содержит n одинаковых блоков. Все блоки извлекают из устройства, а затем наугад вставляют снова. Какова вероятность того, что каждый блок окажется на своем месте?

С11. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей произведение очков, выпавших на верхних гранях, будет равно 8.

С12. В одной урне – a белых и b черных шаров, во второй урне – c белых и d черных шаров. Из каждой урны вынимают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

С13. Трое друзей решили пообедать в ресторане японской кухни, который предлагает 6 вариантов бизнес-ланча. Какова вероятность того, что: 1) все они закажут наборы с разными номерами; 2) два из трех наборов будут одинаковы?

С14. Загадано некоторое натуральное число. Какова вероятность его угадать, если известно, что:

1) оно меньше 700 и делится на 8;

2) оно не больше 1000 и не делится на 5?

С15. Студент физмата выбирает книгу на полке, где находится 5 различных учебников по матанализу, 4 различных учебника по теории вероятностей и 3 различных учебника по информатике. Какова вероятность того, что из 5 взятых студентом книг две будут по матанализу, одна по теории вероятностей и две по информатике?

С16. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Какова вероятность, что среди этих карт будет: а) ровно один туз; б) ровно 2 туза; в) хотя бы один туз?

C17. В партии из 100 деталей имеется 6 дефектных. Из партии для контроля выбирается 10 деталей. Найти вероятность того, что из них ровно 2 детали дефектны.

C18. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятности того, что при наборе наугад:

1) номер будет оканчиваться на 67;

2) номер будет начинаться комбинацией 2-34, а число, составленное из двух последних цифр номера, будет делиться на 5;

3) номер будет начинаться цифрой 3, а остальные его цифры будут 5 и 6.

D1. Загадано число между 0 и 1000. Какова вероятность того, что это число содержит: 1) ровно одну цифру 6; 2) хотя бы одну цифру 6?

D2. Код сейфа состоит из пятизначной комбинации цифр и латинских букв. Какова вероятность взлома сейфа, если на подбор кода имеется три попытки? Какова будет эта вероятность, если известно, что буквы и цифры не могут повторяться?

D3. Таня и Ваня договорились встречать Новый Год в компании из 10 человек. За столом они хотели сидеть рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято распределять места по жребию?

D4. Десять шаров произвольно раскладывают по 4 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике будет 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3, в четвертом – 4?

D5. Четыре зенитных пулемета ведут огонь по трем самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Найти вероятность того, что все четыре пулемета ведут обстрел по одному самолету.

D6. Придумайте задачи, вероятность событий в которых вычислялась бы по формулам: а) $P(A)=\frac{C_{10}^{3}\cdot C_{5}^{2}}{C_{15}^{5}}$; б) $P(A)=\frac{1}{4^{3}}$.

D7. Автобусу, в котором едут 15 пассажиров, предстоит сделать 20 остановок. Предполагается, что все возможные способы распределения пассажиров по остановкам равновозможны. Найти вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одной остановке.

D8. В условии задачи С6 найти вероятность того, что все студенты выберут разные задачи.

D9. Общество из n человек садится за круглый стол. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

D10. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры кратны 3?

D11. Имеется n шариков, которые случайным образом разбрасываются по m лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет k_1 шаров, во вторую – k_2 шаров, ..., в m-ую лунку – k_m шаров, если $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

D12. Вы задались целью найти человека, день рождения которого совпадает с вашим. Сколько незнакомцев придется опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была бы не меньше, чем 0,5?

Тема 3. Статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Свойства вероятности

Пусть проводится серия испытаний из n опытов, где n достаточно большое число.

Определение 1. ***Относительной частотой (частостью)*** $W(A)$ события A называется отношение числа m появлений события A к числу n проводимых опытов, т.е.

$$W(A)=\frac{m}{n},\ 0\le m\le n. \tag{1}$$

Определение 2 (статистическое определение вероятности). ***Вероятностью*** события A называется объективно существующая величина $P(A)$, около которой группируются относительные частоты этого события при повторении длинных серий испытаний.

Согласно определению 2 имеет место приближенное равенство

$$P(A)\approx W(A)=\frac{m}{n},\ 0\le m\le n. \tag{2}$$

Задача 1. При проверке качества продукции, выпускаемой станком, установлено, что среди 1000 изделий 2 бракованных. Определить: 1) сколько бракованных изделий можно ожидать в партии из 100 000 изделий; 2) какова вероятность того, что наудачу взятое изделие браковано?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выпущенное станком изделие браковано.

1) Так как количество опытов n = 1000 изделий достаточно велико, то согласно формуле (1) относительная частота события A есть

$$W(A)=\frac{2}{1000}=0{,}002.$$

Относительная частота события – постоянная величина. Следовательно, для нахождения числа m_1 появлений события A в $n_1=100\ 000$ опытах воспользуемся формулой (1), из которой вытекает равенство

$$m_1=W(A)\cdot n_1.$$

Тогда $m_1=0{,}002\cdot 100\ 000=200$ изделий можно ожидать в партии из 100 000 изделий, выпущенных данным станком.

2) В силу соотношения (2) и найденного в п. 1) имеем

$$P(A)\approx W(A)=0{,}002.\ \blacklozenge$$

Пусть пространство элементарных событий Ω недискретно. Установим между элементарными событиями этого пространства и точками некоторой области G соответствие. Будем считать, что случайные попадания в любую точку области G равновероятны. Тогда вероятность события A, отвечающего пространству Ω, может быть найдена с помощью геометрической вероятности.

Положим, что S_G – мера области G, а S_g – мера области g, $g\subset G$, соответствующей событию A.

Определение 3 (определение геометрической вероятности). ***Вероятностью*** события А называется отношение меры m_g области g к мере m_G области G, соответствующей событию А, т.е.

$$P(A)=\frac{m_g}{m_G}. \qquad (3)$$

Замечание 1. Области g, G могут быть любого числа измерений. Для одного измерения мерой является длина отрезка, для двух измерений – площадь, для трех измерений – объем.

Задача 2. На отрезок АВ длины 10 см наугад бросают точку М. Какова вероятность того, что площадь квадрата со стороной АМ будет больше 25 см^2 и меньше 64 см^2?

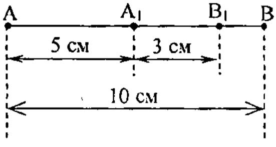

Рис. 1

Решение. Площадь квадрата со стороной АМ будет больше 25 см^2 и меньше 64 см^2, если сторона АМ имеет длину от 5 до 8 см. Поэтому будем рассматривать событие С, состоящее в том, что точка М попадает на отрезок A_1B_1 (см. рис. 1).

Для нахождения вероятности события С воспользуемся определением 3. Областью G является отрезок AB, областью g – отрезок A_1B_1. Мерами этих областей выступают их длины. Тогда по формуле (3) имеем

$$P(A)=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{3}{10}=0{,}3\,.\blacklozenge$$

В независимости от используемого определения вероятности справедливы следующие ее свойства:

1) $0\le P(A)\le 1$;

2) $P(I)=1$, $P(O)=0$;

3) $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Упражнения

А1. Используя определение геометрической вероятности, докажите свойства вероятности, приведенные выше.

А2. Можно ли для решения задачи 1 темы 2 воспользоваться статистическим определением вероятности. Ответ обоснуйте.

А3. Можно ли для решения задачи 1 темы 3 воспользоваться классическим определением вероятности. Ответ обоснуйте.

В1. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,35. Найти число годных приборов, если всего было проверено 300 приборов.

В2. В урне 100 шаров белого и черного цветов. Из урны 60 раз вынули по одному шару, каждый раз возвращая его в урну; при этом белый шар появился в 18 случаях. Какое количество белых шаров в урне наиболее правдоподобно?

В3. Отдел технического контроля обнаруживает 5 бракованных изделий в партии из 100 изделий. Найти: 1) относительную частоту изготовления бракованного изделия; 2) количество бракованных изделий в партии из 500 изделий.

В4. Электрический провод, соединяющий пункты А и В, порвался в неизвестном месте. Чему равна вероятность того, что разрыв произошел не далее 500 м от пункта А, если расстояние между пунктами 2 км?

В5. На отрезок АВ наудачу бросают точку М. Найти вероятность того, что:

1) точка М окажется ближе к точке А, чем к В;

2) расстояние от точки М до середины отрезка АВ будет меньше расстояние от точки М до ближайшего конца отрезка.

В6. На интервал (0, 2а), $a > 0$, наудачу бросают точку с координатой b. Найти вероятность того, что корень x уравнения $bx = a$ будет удовлетворять неравенству $0{,}6 < x < 0{,}8$.

В7. В квадрат с вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) наудачу брошена точка с координатами (x, y). Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.

В8. В круг радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

В9. На плоскости задана окружность радиуса R и точка А, находящаяся на расстоянии d от центра этой окружности (d > R). Найти вероятность того, что прямая, проведенная случайным образом через точку А, пересечет окружность.

В10. Из квадрата с вершинами в точках (-1, -1), (1, -1), (-1, 1), (1, 1) наудачу выбрана точка (c, q). Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + cx + q = 0$ будут: 1) действительными; 2) мнимыми; 3) положительными; 4) разных знаков; 5) одного знака.

С1. Для установления уровня знаний учащихся по математике в пяти восьмых классах различных школ была проведена контрольная работа, состоящая из трех вопросов. Из 200 учащихся, писавших работу, на первый вопрос дали верный ответ 180 учащихся, на второй – 125 и на третий – 145. Какой следует считать вероятность того, что наудачу выбранный учащийся восьмого класса городской школы верно ответит на наудачу выбранный вопрос из контрольной работы?

С2. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг.

С3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 2а. На плоскость наудачу брошена монета радиуса r < a. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

С4. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 мин, а пешеход – за 15 мин. Интервал движения автобуса – 25 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту А и отправляетесь в пункт В пешком. Что вероятнее, догонит вас в пути очередной автобус или нет?

C5. На отрезок [0, 1] наудачу бросают точку с координатой a. Найти вероятность того, что корень x уравнения $x-2a+1=0$ будет удовлетворять неравенству $|x|<\frac{1}{3}$.

C6. На шахматную доску наудачу брошена монета, диаметр которой вдвое меньше стороны каждого из квадратов шахматной доски. Какова вероятность того, что монета окажется полностью на черном поле?

C7. Точка брошена внутрь круга радиуса R. Какова вероятность того, что расстояние от точки до центра окажется меньше R/2?

C8. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых на отрезке [-1, 1] чисел больше нуля, а их произведение меньше нуля.

C9. В квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, наудачу бросают точку с координатами (p, q). Найти вероятности следующих неравенств:

1) $a_1<p<a_2$, где $a_1, a_2 \in [0, 1]$;
2) $a_1<p<a_2$, $b_1<q<b_2$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$;
3) $p+q>1$;
4) $3p+2q<1$;
5) $|p-q|<h$, где $0<h<1$;
6) $p^2+q^2<1$;
7) $4p^2+9q^2>1$.

C10. Дан квадрат ABCD и точка O – его центр. В квадрат наудачу бросают точку M. Найти вероятность того, что:
1) из четырех вершин A, B, C, D ближайшей к точке M будет вершина A;
2) из пяти точек A, B, C, D и O ближайшей к точке M будет точка O.

C11. (задача о встрече) Два лица X и Y условились встретиться в определенном месте между 11 ч и 12 ч, причем каждый пришедший должен ждать другого 20 мин. Какова вероятность того, что встреча состоялась?

D1. На одной дорожке магнитной ленты длиной 200 м записано сообщение на интервале 20 м, на второй дорожке этой ленты записано аналогичное сообщение. Определить вероятность того, что в интервале от 60 до 85 м не будет промежутка ленты, не содержащей записи, если начала обеих дорожек равновозможны в любой точке от 0 до 180 м.

D2. В изгородь, состоящую из тонких вертикальных прутьев, 50 раз брошен мяч диаметром в 10 см, причем 18 раз мяч пролетел, не задев за прутья. Найти приближенно расстояние между прутьями.

D3. На плоскости независимо друг от друга прямолинейно перемещаются точка A и центр B круга радиуса R. Скорости этих точек постоянны и равны соответственно u и v. В фиксированный момент времени расстояние AB = r (r > R), а угол между линией A и вектором v равен β. Считая все направления движения точки А равновозможными, определить вероятность попадания точки А в круг.

Тема 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1 (сложения вероятностей для двух несовместных событий). Если события А и В несовместны, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема 2 (сложения вероятностей для попарно несовместных событий). Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместные, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Задача 1. В цехе три станка. Вероятность того, что рабочий находится у первого станка равна 0,3; у второго станка – 0,2; у третьего станка – 0,5. Какова вероятность того, что рабочий находится у второго или третьего станков?

Решение. Пусть событие A_i – рабочий находится у i-ого станка, $i=\overline{1,3}$. События A_i, $i=\overline{1,3}$, попарно несовместны, а, значит вероятность события A_2+A_3, состоящего в том, что рабочий находится у второго или третьего станков, можно найти по теореме 1.

Таким образом,

$$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=0{,}2+0{,}5=0{,}7.\blacklozenge$$

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместные и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Замечание 1. Следствие 2 используют, когда вычисление вероятности события А вызывает трудности, в то время, как вероятность противоположного события $\overline{A}$ вычисляется легко. В этом случае находят вероятность $P(\overline{A})$ и применяют формулу

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \qquad (1)$$

Определение 1. ***Условной вероятностью*** $P(B|A)$ события В при условии, что событие А произошло, называется число, определяемое формулой

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема 3 (умножения вероятностей для двух событий). Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго, при условии, что первое произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Задача 2. Экзаменационный билет содержит 2 вопроса. Студент знает 35 вопросов из 40. Какова вероятность того, что он вытянет билет, который знает?

Решение. Пусть событие A – студент ответил правильно на два вопроса. Введем вспомогательные события B_i – студент ответил правильно на i-ый вопрос, $i = 1, 2$. Через них событие A выражается следующим образом $A = B_1 B_2$. Согласно теореме 3, имеем

$$P(A) = P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1).$$

По классическому определению вероятности находим

$$P(B_1) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}; \qquad P(B_2|B_1) = \frac{34}{39}.$$

Таким образом, получаем $P(A) = \frac{7}{8} \cdot \frac{34}{39} = \frac{119}{156} \approx 0{,}76$. ♦

Теорема 4 (общая теорема умножения вероятностей). Вероятность одновременного появления событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна вероятности одного из этих событий, последовательно умноженную на условную вероятность каждого из оставшихся событий, при условии, что все предыдущие события, уже вошедшие в произведение, произошли, т.е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Определение 2. Два события называются ***независимыми***, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло ли другое событие. В противном случае события A и B называются ***зависимыми***.

Из определения 2 следует, что если события A и B независимы, то выполняются равенства

$$P(A| B) = P(A), \qquad P(B| A) = P(B). \tag{2}$$

Теорема 5 (умножения вероятностей для двух независимых событий). Если события A и B независимы, то вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Определение 3. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***попарно независимыми***, если любые два из них независимы.

Определение 4. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если каждое из них и произведение любого числа остальных являются независимыми.

Теорема 6 (умножения вероятностей для независимых в совокупности событий). Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Замечание 2. Понятия независимости и несовместности событий характеризуют различные свойства случайных событий. Так, независимые события могут быть несовместными, а совместные события могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Задача 3. Техническое устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них равна соответственно $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}6$. Найти вероятность того, что отказали два элемента.

Решение. Пусть события A_i, $i=\overline{1,3}$, состоят в том, что отказал i-ый элемент. Их вероятности по условию задачи равны числам p_i. Для противоположных событий $\overline{A_i}$, $i=\overline{1,3}$, – i-ый элемент работает исправно, вероятности равны $q_i = 1-p_i$, а именно

$$q_1 = 0{,}9,\ q_2 = 0{,}7,\ q_3 = 0{,}4.$$

Представление события X – отказали два элемента – через события A_i и $\overline{A_i}$, $i=\overline{1,3}$, имеет вид $X = A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3} + A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3 + A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$. События A_i и $\overline{A_i}$, $i=\overline{1,3}$, являются независимыми в совокупности и попарно несовместными, поэтому для нахождения вероятности события X воспользуемся теоремами 2 и 6.

Таким образом, имеем

$$P(X) = P\left(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3} + A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3 + A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\right) = p_1\cdot p_2\cdot q_3 + p_1\cdot q_2\cdot p_3 + q_1\cdot p_2\cdot p_3 =$$
$$= 0{,}1\ \cdot 0{,}3\ \cdot 0{,}4 + 0{,}1\ \cdot 0{,}7\ \cdot 0{,}6 + 0{,}9\ \cdot 0{,}3\ \cdot 0{,}6 = 0{,}216. \ \blacklozenge$$

Теорема 7 (общая теорема сложения вероятностей для двух событий). Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание 3. Теорему 7 можно обобщить на случай любого числа совместных событий. Однако для числа событий большего 3 она принимает довольно сложный вид.

Задача 4. Бросаются 2 монеты. Найти вероятность выпадения хотя бы одной цифры.

Решение. Пусть событие A_i – выпадение цифры на i-ой монете, $i = 1, 2$. Тогда событие B – выпадение хотя бы одной цифры есть $A_1 + A_2$. Так как события A_i, $i = 1, 2$, совместны и независимы, то по теоремам 7 и 5 имеем

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2).$$

По классическому определению вероятности $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Таким образом, получаем

$$P(A_1 + A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Второй способ решения этой задачи заключается в использовании замечания 1. Событие $\overline{B}$ – выпадение двух гербов – противоположное событию B. Его можно записать в виде $C_1\cdot C_2$, где событие C_i – выпадение герба на i-ой монете, $i = 1, 2$. Так как события C_i, $i = 1, 2$, независимы, то по теореме 5 имеем

$$P(\overline{B})=P(C_1C_2)=P(C_1)P(C_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Тогда согласно формуле (1) получаем

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Теорема 8 (сложения для независимых в совокупности событий). Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них находится по формуле

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n}).$$

Теорема 9. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности и равновероятны, то вероятность появления хотя бы одного из них находится по формуле

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-p)^n,$$

где p – это одинаковая вероятность появления каждого из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Задача 5. Было установлено, что вероятность правильного ответа на вопросы теста по информатике для студентов физмата рана 0,9. Какова вероятность того, что хотя бы на один из 30 заданных вопросов будет получен правильный ответ?

Решение. Пусть событие A_i – студент правильно ответил на i-ый вопрос, $i=\overline{1,30}$. События A_i, $i=\overline{1,30}$, независимы в совокупности и равновероятны с вероятностью p = 0,9. Согласно теореме 9 искомая вероятность

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_{30})=1-(1-p)^{30}=1-(1-0{,}9)^{30}=1-0{,}1^{30}. \blacklozenge$$

Упражнения

А1. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

А – выпадение герба на первой монете;

D – выпадение хотя бы одного герба;

Е – выпадение хотя бы одной цифры;

С – выпадение герба на второй монете.

Определить зависимы или независимы пары событий: 1) А и Е; 2) А и С; 3) D и Е; 4) D и С. Вычислить условные и безусловные вероятности в каждой паре.

А2. Показать, что если условная вероятность $P(A|B)$ больше безусловной вероятности Р(А), то и условная вероятность $P(B|A)$ больше безусловной вероятности Р(В).

А3. Доказать справедливость равенства

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=1-P(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\ldots+\overline{A_n}).$$

А4. События А и В независимы. Доказать, что события А и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и В, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы.

А5. Если событие В представляет собой частный случай события А, зависимы ли эти события или нет? Почему?

А6. Зависимы или независимы: 1) несовместные события; 2) события, образующие полную группу; 3) равновозможные события? Ответ обоснуйте.

В1. Из колоды в 52 карты вынимается одна карта. Рассматриваются события:

А – появление туза;

В – появление карты красной масти;

С – появление бубнового туза;

D – появление десятки.

Зависимы ли следующие пары событий: 1) А и В; 2) А и С; 3) В и С; 4) В и D; 5) С и D?

В2. По каналу связи передаются только сообщения a, b, c соответственно с вероятностями 0,5; 0,3; и 0,2. Найти вероятность сообщения a или b.

В3. Производится независимый пуск двух ракет по цели. Найти вероятность поражения цели, если каждая из двух ракет поражает цель с вероятностью 0,7.

В4. Студент пришел на экзамен, зная 25 вопросов из 30. Преподаватель задает 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все три вопроса.

В5. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разных цветов.

В6. В одной урне 1 белый и 4 черных шара, в другой – 2 белых и 3 черных, в третьей – 3 белых и 2 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 1 белый и 2 черных шара.

В7. Из колоды, содержащей 52 карты, вытягивают 2 карты. Какова вероятность того, что вторая карта – валет, если известно, что первая карта – король? Какова вероятность того, что вторая карта – валет, если первая карта – король червей?

В8. Имеется две колоды по 36 карт. Из каждой колоды наудачу выбрали по карте. Найти вероятность того, что обе карты – тузы.

В9. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,3, для второго – 0,5 и для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что:

1) в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания рабочего;

2) в течение двух часов ни один станок не потребует внимания рабочего.

В10. В семье четверо детей. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди детей: 1) все мальчики; 2) все одного пола; 3) хотя бы один мальчик.

В11. Два орудия ведут стрельбу по танку. Вероятность попадания в танк для первого орудия равна 0,5, для второго – 0,4. Найти вероятность хотя бы одного попадания в танк, если из каждого орудия сделано по 3 выстрела.

В12. Уходя из квартиры n гостей, имеющие одинаковый размер обуви, надевают туфли в темноте. Гости уже не могут отличить правую туфлю от левой. Найти вероятность того, что каждый гость наденет свои туфли.

B13. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p, независимо от других циклов и других станций. За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятность следующих событий: 1) объект обнаружен хотя бы одной станцией; 2) объект обнаружен каждой станцией.

B14. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первого сорта равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовили 2 детали, на втором – 3. Найти вероятность того, что все детали первого сорта.

B15. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K или двух элементов K_1 и K_2, которые выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3, 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

B16. На участке AB для мотоциклиста имеется 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

B17. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешивают, а затем наугад извлекают по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв получится слово «ракета»?

B18. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

C1. В группе 10 студентов, среди которых 4 отличника. Наудачу выбирают 3 студента. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы один отличник.

C2. Игральная кость брошена три раза. Найти вероятность того, что все три раза выпадет 4 очка.

C3. Какова вероятность того, что 2 карты, вынутые из колоды в 36 карт, окажутся одной масти?

C4. Вычислительная машина состоит из n блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна p_1, второго – p_2 и т.д. Блоки отказывают независимо друг от друга. При отказе любого блока отказывает машина. Найти вероятность того, что машина откажет за время T.

C5. В конструируемое устройство входят два однотипных блока. Блоки берут наугад из партии, содержащей 8 исправных и 2 бракованных блока. Найти вероятность того, что устройство окажется исправным, если для этого:

1) оба блока должны быть исправны;

2) хотя бы один блок должен быть исправным;

C6. Экзаменационный билет по математическому анализу содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на эти вопросы, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что студент: 1) ответит на все три вопроса; 2) не ответит ни на один вопрос; 3) ответит только на третий вопрос; 4) не ответит только на второй вопрос.

C7. Вероятности недолета, попадания в цель и перелета при одном выстреле из орудия равны соответственно 0,2; 0,6 и 0,3. Орудие стреляет дважды. Найти вероятности следующих событий: 1) двух попаданий; 2) одного попадания и одного недолета; 3) двух перелетов.

C8. Монету бросают n раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

C9. Батарея из трех орудий ведет огонь по объекту, вероятность попадания в который при одном выстреле из первого орудия равна 0,6, из второго – 0,7 и из третьего – 0,8. Каждое орудие стреляет один раз. Найти вероятность поражения объекта, если для этого достаточно двух попаданий.

C10. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Какова вероятность того, что в мишень попали ровно две пули?

C11. Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0,95?

C12. Техническое устройство состоит из семи узлов. Каждый узел независимо от других может иметь неисправность; вероятность этого равна 0,05. Если хоть один узел неисправен, то в процессе работы устройства произойдет авария. Найти вероятность аварии.

D1. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы вероятность хотя бы однократного появления герба была больше $\frac{15}{16}$.

D2. Игральную кость бросают n раз. Каким следует выбрать n, чтобы вероятность появления хоть один раз шести очков была больше 0,99?

D3. Собрались вместе n незнакомых друг другу людей. Найти вероятность того, что хотя бы у двух из них совпадают дни рождения (т.е. приходятся на одно и то же число одного и того же месяца).

D4. Два стрелка ведут огонь по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вероятность того, что хотя бы один стрелок попал в цель – 0,94. Найти вероятность поражения цели вторым стрелком.

D5. Докажите общую теорему сложения для трех событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

D6. Стрелки A, B, C ведут огонь по цели. Вероятность попадания в цель хотя бы одним из стрелков A и B равна 0,97; вероятность попадания цель стрелком C равна 0,8. Стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок поразил цель?

D7. Два охотника Семен и Жорик отправились на охоту, увидели медведя и одновременно выстрелили по нему. Медведь был убит, и в его шкуре обнаружилась одна пробоина; кому из охотников она принадлежит неизвестно. Однако более правдоподобно, что Семену – он охотник старый, опытный, и в цель размером с медведя попадает на таком расстоянии, с которого был сделан выстрел, с вероятностью 0,8. Жорик – охотник молодой, менее опытный; для него вероятность попадания в такую цель всего 0,4. Шкуру медведя продали за 2000 у.е. Как надо по справедливости разделить эту сумму между Семеном и Жориком?

D8 (задача о четырех лгунах). Из четырех человек А, Б, В и Г один (А) получил информацию, которую в виде сигнала «да» или «нет» сообщает второму (Б), второй – третьему (В), третий – четвертому (Г), а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность того, что первый из этих лгунов сказал правду, если четвертый сказал правду?

Тема 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теорема 1. Если событие А в результате эксперимента может произойти одновременно только с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, ..., H_n$ на соответствующую условную вероятность события А, т.е.

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + ... + P(H_n)P(A|H_n). \quad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой полной вероятности***.

Задача 1. Электрические лампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй – 40% общего количества, третий – 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 85%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

Решение. Пусть событие А – купленная в магазине лампа стандартная. Гипотезы H_i состоят в том, что лампа изготовлена i-ым заводом, $i = \overline{1,3}$. По условию задачи вероятности этих гипотез

$$P(H_1) = 0{,}45; \quad P(H_2) = 0{,}4; \quad P(H_3) = 0{,}15.$$

Событие $A|H_i$ означает, что купленная в магазине лампа стандартная при условии, что она изготовлена i-ым заводом, $i = \overline{1,3}$. Вероятности этих событий

$$P(A|H_1) = 0{,}7; \quad P(A|H_2) = 0{,}8; \quad P(A|H_3) = 0{,}85.$$

Так как события H_i, $i = \overline{1,3}$, попарно несовместны и образуют полную группу, то воспользуемся формулой (1) для нахождения вероятности события А. В результате получим

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0.7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0.7563. \ \blacklozenge$$

Замечание 1. Для того чтобы определить, правильно ли сформулированы гипотезы H_i, $i=\overline{1,n}$, рекомендуется проверять равенство

$$P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1,$$

которое справедливо для попарно несовместных событий, образующих полную группу.

Это равенство, вообще говоря, не выполняется для условных вероятностей $P(A|H_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 2. Если событие А в результате эксперимента может произойти одновременно только с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность гипотезы H_k после проведения эксперимента равна отношению произведения вероятности этой гипотезы до проведения эксперимента на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло, к полной вероятности этого события, т.е.

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)}. \tag{2}$$

Формула (2) называется ***формулой Байеса***.

Замечание 2. Формула Байеса используется в том случае, когда требуется найти вероятности гипотез после проведения эксперимента, в результате которого происходит событие А. При этом вероятности гипотез изменяются и появляются условные вероятности $P(H_i|A)$.

Задача 2. В ремесленном цехе трудятся 3 мастера и 6 их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении изделия с вероятностью 0,05; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что его изготовил мастер?

Решение. Пусть событие А состоит в том, что поступившее из цеха изделие бракованное; событие H_1 – изделие изготовил мастер; событие H_2 – изделие изготовил ученик. Событие А может произойти одновременно только с одной из гипотез H_1 и H_2, которые несовместны и образуют полную группу событий. Требуется найти вероятность $P(H_1|A)$. Для ее нахождения воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}.$$

Найдем полную вероятность события А по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2).$$

Согласно условию задачи

$$P(H_1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ P(H_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ P(A|H_1)=0{,}05,\ P(A|H_2)=0{,}15.$$

Имеем

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}05+\frac{2}{3}\cdot 0{,}15=\frac{0{,}35}{3}\approx 0{,}12;$$

$$P(H_1|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}05}{0{,}12}\approx 0{,}139.\ \blacklozenge$$

Упражнения

А1. При данном эксперименте Е и событии А выделите гипотезы H_k, $k=\overline{1,n}$, с которыми событие А может произойти. Являются ли они попарно несовместными и образующими полную группу?

1) Е – для выстрела по цели выбирается один из трех стрелков, А – цель поражена;

2) Е – из одной из трех урн, содержащих разное количество белых и черных шаров, вынут шар, А – шар белый;

3) Е – на сельхозработы посылается одна из групп, выбранного наудачу курса, А – послана группа Б;

4) Е – в магазин поступают изделия, изготовленные четырьмя фабриками, А - купленное в магазине изделие стандартное.

В1. Прибор изготавливается двумя заводами. Первый завод поставляет в два раза больше изделий, чем второй. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготавливаемого первым заводом, равна 0,9; вторым – 0,95. Определить надежность прибора, поступившего на производство.

В2. В студенческом отряде две бригады первокурсников и одна второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки; а в бригаде второкурсников – 4 юноши и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбирается одна из бригад, а из нее один человек для поездки в город. Определить:

а) какова вероятность того, что выбран юноша;

б) какова вероятность того, что выбранный человек – первокурсник, если выбран юноша.

В3. Производится стрельба по цели одним снарядом. Цель состоит из трех частей, площади которых равны S_1, S_2, S_3 ($S_1 + S_2 + S_3 = S$). Для попавшего в цель снаряда вероятность попасть в ту или иную часть пропорциональна площади части. При попадании в первую часть цель поражается с вероятностью p_1; во вторую – с вероятностью p_2; в третью – с вероятностью p_3. Требуется:

а) найти вероятность поражения цели, если известно, что в нее попал снаряд;

б) снаряд попал в цель, какова вероятность того, что он попал в первую часть.

В4. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,3. После стрельбы в мишени оказалась одна пробоина. Какова вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку?

В5. Из двух колод по 36 карт и одной в 52 карты наудачу выбрана колода, а из колоды наудачу взята карта. Какова вероятность того, что это оказался туз?

В6. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, каждое из которых он посещает с равной вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, то рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте – с вероятностью p_2; на третьем месте – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

В7. По узлу связи, расположенном в укрепленном сооружении, производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5; при третьем – 0,7. Вероятность выхода из строя при попадании одного снаряда равна 0,2; при попадании двух снарядов – 0,6; три снаряда разрушают узел связи полностью. Найти вероятность того, что после трех выстрелов узел связи выведен из строя.

В8. На склад поступает продукция трех фабрик. Продукция первой фабрики составляет 20%, второй 46% и третьей 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2% и для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

В9. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. Для выстрела наугад выбирается стрелок. Найти вероятность того, что он попадет в цель.

В10. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс H_1 – мало рискует; класс H_2 – рискует средне; класс H_3 – рискует сильно. Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежит к классу H_1, 50% – к классу H_2, 20% – к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию равна 0,01; водитель класса H_2 – 0,02; водитель класса H_3 – 0,08. Водитель В застраховал свой автомобиль и в течение года попал в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_3.

В11. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

В12. В ящике 15 теннисных мячей, из которых девять новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи для второй игры новые.

В13. 15 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов.

Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

В14. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. ОТК признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.

В15. Группа студентов состоит из 10 отличников, 6 хорошо успевающих и 4 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки, хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки, слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается один студент. Найти: 1) вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку; 2) вероятность получить отличную оценку для хорошо успевающего студента.

В16. В четырех ящиках находятся годные и бракованные блоки, внешне неразличимые. В первом ящике находятся 8 годных и 2 бракованных блока, во втором – 10 годных, в третьем и четвертом по 9 годных и 1 бракованному. Из наугад взятого ящика вытащили наудачу 2 блока. Найти вероятность того, что блоки были извлечены из первого ящика, если известно, что:

1) оба вынутых блока оказались годными;

2) вынуты один годный, один бракованный блоки.

В17. В урне находятся 3 белых и 3 черных шара. Из урны наугад извлекают 2 шара, цвет которых остается неизвестным, и откладывают их в сторону. Третий шар, вынутый наудачу, белый. Какими, вероятнее всего, были два первых шара?

В18. Батарея состоит из двух орудий. Вероятности недолета, попадания в цель и перелета при одном выстреле из первого орудия равны соответственно 0,1; 0,7; 0,2, при одном выстреле из второго орудия – 0,2; 0,6; 0,2. Наугад выбранное орудие выстрелило трижды. Были отмечены одно попадание, один недолет и один перелет. Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

С1. 70% деталей, поступающих на сборку, изготовлены автоматом, дающим 2% брака, а 30% – автоматом, дающим 5% брака. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена первым автоматом?

С2. По линии связи передается два сигнала a и b с вероятностями 0,84 и 0,16 соответственно. Из-за помех 1/6 сигналов a искажается и принимается как сигнал b, а 1/8 сигналов b принимается как сигнал a. Найти:

а) вероятность того, что был получен сигнал a;

б) если известно, что принят сигнал a, вероятность того, что он был передан.

С3. Имеется две партии однотипных изделий. Первая партия содержит 8 годных и 2 бракованных изделия, вторая – 9 годных и одно бракованное изделие. Из наугад выбранной партии наудачу вынимают три изделия. Найти вероятность того, что все изделия будут годными.

С4. Два завода выпускают однотипные детали. Вероятность оказаться бракованной для детали, изготовленной на первом заводе, равна 0,2, на втором – 0,1. Из ящика, содержащего 60 деталей, сделанных на первом заводе, и 40 деталей, сделанных на втором заводе, наудачу извлекают одну деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

С5. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4.

1) Что вероятнее, попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет?

2) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее, принадлежал он к двум первым или к трем последним стрелкам?

С6. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075; на втором – 0,090. Производительность второго автомата в 2 раза больше первого. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь: 1) стандартна; 2) нестандартна.

С7. На сборку поступают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2% и третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего 2500 изделий.

С8. Имеется 5 винтовок, из которых 3 с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом составляет для данного стрелка 0,95, без оптического прицела – 0,8. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу выбранной винтовки.

С9. Качество изготовленной детали проверяется двумя контролерами. Вероятность попадания детали к первому контролеру равна 0,6; ко второму – 0,4. Вероятность признать деталь качественной для первого контролера равна 0,94; для второго – 0,18. Готовая деталь признана качественной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

С10. Из урны, содержащей 1 белый и 3 черных шара, переложен 1 шар в урну с 1 черным и 3 белыми шарами, после чего из второй урны был вынут 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар оказался белым?

С11. При обследовании больного имеется подозрение на одно из двух заболеваний B_1 и B_2. Их вероятности в данных условиях соответственно равны 0,6 и 0,4. Для уточнения диагноза назначается анализ, результат которого является положительным или отрицательным. В случае болезни B_1 вероятность положительной реакции 0,9; в случае болезни B_2 – положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ произвели дважды и оба раза реакция была отрицательной. Найти вероятность каждого заболевания после проведенных анализов.

С12. В левом кармане m_1 монет по 3 коп. и n_1 монет по 20 коп., а в правом кармане – m_2 монет по 3 коп. и n_2 монет по 20 коп. Из левого кармана наудачу переложили в правый одну монету. После этого из правого кармана наудачу извлекли одну монету; она оказалась 20-копеечной. Какова вероятность того, что была переложена 20-копеечная монета?

С13. Двое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь был убит первым или вторым охотником, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,4 и 0,6.

С14. На наблюдательной станции установлено 4 радиолокатора различной конструкции. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора – 0,86; второго – 0,90; третьего – 0,92; четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Найти:

1) вероятность обнаружения цели?

2) вероятность того, что был включен первый локатор, если цель была обнаружена.

С15. По некоторому объекту произвели пуск двух ракет. Вероятность попадания в него первой ракеты равна 0,8, второй ракеты – 0,7. Вероятность уничтожения объекта при попадании в него одной ракеты равна 0,6, двух ракет – 0,9. В результате пуска обеих ракет объект был уничтожен. Найти вероятность того, что в объект попали обе ракеты.

С16. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, три подготовлены отлично, четыре – хорошо, два – посредственно и 1 плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен; 1) отлично; 2) плохо.

D1. Для поисков пропавшего самолета выделено 10 вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных регионов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по регионам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в регионе поиска самолет с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поисков.

D2. При переливании крови нужно учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему IV группу крови, можно перелить кровь любой группы. Человеку со II и III группами крови можно перелить кровь или той же группы, или первой. Человеку с I группой крови можно перелить кровь только первой группы. Среди населения 33,7% имеет первую группу крови, 33,5% – вторую, 24,9% – третью, 7,9% – четвертую. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

Тема 6. Формула Бернулли и ее предельные выражения

Определение 1. Несколько испытаний называются *независимыми* относительно события А, если вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Определение 2. Эксперимент, состоящий из нескольких независимых испытаний, проводимых в одинаковых условиях, называется *схемой Бернулли*.

Замечание 1. В схеме Бернулли событие А, происходящее в испытаниях, имеет одинаковую вероятность в каждом из испытаний.

Теорема 1. Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p и не появляется с вероятностью q = 1 – p. Вероятность $P_{m,\,n}$ того, что событие А произошло ровно m раз в этих n испытаниях, можно вычислить по *формуле Бернулли*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Замечание 2. События, которым соответствуют вероятности $P_{0,\,n}$, $P_{1,\,n}$, …, $P_{n,\,n}$, являются попарно несовместными и образуют полную группу событий. В силу этого для них выполняется равенство

$$\sum_{m=0}^{n} P_{m,n} = 1, \tag{2}$$

которое может оказаться полезным при решении задач со схемой Бернулли.

Из равенства (2) также следует, что число n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньшей P можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}, \tag{3}$$

где p – вероятность появления этого события в каждом опыте.

Задача 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет: а) одно попадание, б) не менее трех попаданий.

Решение. Пусть событие А – попадание в цель при одном выстреле. По условию вероятность p этого события постоянна и равна 0,8. Вероятность непоявления этого события $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Так как все испытания независимы и проводятся в одинаковых условиях, то вероятность того, что событие А произойдет в n испытаниях ровно m раз найдем по формуле (1).

а) Вероятность одного попадания (m = 1) при 4 выстрелах (n = 4) равна

$$P_{1,4} = C_4^1 (0{,}8)^1 (0{,}2)^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}008 = 0{,}00256.$$

б) Событие В, состоящее в том, что при 4 выстрелах произошло не менее трех попаданий, можно представить в виде суммы двух событий – при 4 выстрелах произошло 3 попадания в цель и при 4 выстрелах произошло 4 попадания в цель. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей для двух несовместных событий вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Таким образом, имеем

$$P(B) = P_{3,4} + P_{4,4} = C_4^3(0,8)^3 \cdot 0,2 + C_4^4(0,8)^4(0,2)^0 = 4 \cdot 0,512 \cdot 0,2 + 0.4096 = 0,8192 . \blacklozenge$$

Определение 3. ***Наивероятнейшей частотой*** m_0 события А в схеме Бернулли называется такая частота этого события, при которой вероятность $P_{m,n}$ наибольшая.

Наивероятнейшая частота определяется неравенствами

$$np - q \le m_0 \le np + p . \qquad (4)$$

Задача 2. Вероятность изготовления детали первого сорта на данном предприятии равна 0,78. Чему равно наивероятнейшее число изделий первого сорта в случайно отобранной партии из 150 изделий?

Решение. Пусть событие А – деталь первого сорта. Вероятность этого события постоянна и равна p = 0,78. Тогда вероятность непоявления события А будет

$$q = 1 - p = 1 - 0,78 = 0,22.$$

Число независимых испытаний n = 150. В силу соотношений (4) получаем

$$150 \cdot 0,78 - 0,22 \le m_0 \le 150 \cdot 0,78 + 0,78,$$

$$116,78 \le m_0 \le 117,78. \blacklozenge$$

Таким образом, наивероятнейшее число изделий первого сорта в случайно отобранной партии из 150 изделий составляет 117 изделий.

Теорема 2. Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p и не появляется с вероятностью q = 1 – p. Если вероятность $p \to 0$ при $n \to \infty$, но так, что величина $np \to \lambda$ при $n \to \infty$, где λ – некоторое постоянное число, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие А произошло ровно m раз в этих n испытаниях, можно вычислить по *формуле Пуассона*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} . \qquad (5)$$

Замечание 3. Формулой Пуассона удобно пользоваться тогда, когда вероятность p близка к нулю, а число испытаний n очень велико.

Задача 3. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 4 бракованных.

Решение. Все испытания независимы и их число n = 1000 велико. Так как вероятность p события А – деталь бракована в каждом испытании мала и равна 0,008, причем $\lambda = np = 0,008 \cdot 1000 = 8$, то для нахождения вероятности $P_{4,1000}$ воспользуемся формулой Пуассона.

$$P_{4,1000} = \frac{8^4 \cdot e^{-8}}{4!} = \frac{4096 \cdot 0,000336}{24} \approx 0,057 . \blacklozenge$$

Теорема 3 (локальная теорема Лапласа). Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p и не появляется с вероятностью q = 1 – p. Если число испытаний n очень велико, т.е. $n \to \infty$, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие А произошло ровно m раз в этих n испытаниях, можно вычислить по *формуле Лапласа*

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \tag{6}$$

Замечание 4. Для нахождения значений функции $\varphi(x)$ существуют специальные таблицы значений этой функции (см. приложение 1). Эти таблицы составлены для неотрицательных значений x. При отрицательных значениях x пользуются свойством четности функции $\varphi(x)$, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Задача 4. По данным ОТК завода 0,8 всего объема выпускаемых изделий – первого сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 400 изделий 80 будет не первого сорта.

Решение. Событие А состоит в том, что изделие не первого сорта. Вероятность этого события р = 1 – 0,8 = 0,2 постоянна в каждом из n = 400 независимых испытаний и близка к нулю, поэтому для нахождения вероятности $P_{80,\,400}$ воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

$$x = \frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = \frac{0}{8} = 0.$$

По таблице из приложения 1 находим $\varphi(0) = 0{,}3989$. Применяя формулу (6), имеем

$$P_{80,\,400} = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot 0{,}3989 = \frac{0{,}3989}{8} = 0{,}0499. \ ♦$$

Теорема 4 (интегральная теорема Лапласа). Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью р и не появляется с вероятностью q = 1 – р. Если число испытаний n очень велико, т.е. $n \to \infty$, то вероятность $P_n(a \le m \le b)$ того, что событие А произошло m раз, где $a \le m \le b$, в этих n испытаниях, можно вычислить по ***интегральной формуле Лапласа***

n – большое
5 ≤ m ≤ 100

$$P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad \beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}, \quad \alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}. \tag{7}$$

Замечание 5. Для применения интегральной формулы Лапласа обязательно должны выполняться два условия: 1) число испытаний n очень велико; 2) число появлений события А изменяется в пределах от a до b. Если первое из этих условий не выполняется, то применяют формулу Бернулли и замечание 2.

Замечание 6. Для нахождения значений функции Лапласа $\Phi(x)$ существуют специальные таблицы значений этой функции (см. приложение 2). Эти таблицы составлены для неотрицательных значений x, $0 \le x < 5$. При отрицательных значениях x пользуются свойством нечетности функции Лапласа, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при $x \ge 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Замечание 7. Под очень большим числом испытаний n в теоремах 2 – 4 понимают такое число, при котором использование формулы Бернулли (в силу быстро накапливающейся погрешности вычислений) становится нецелесообразным.

Задача 5. Вероятность нарушения стандарта при выпуске изделий равна 0,3. Найти вероятность того, что из 800 изделий число бракованных изделий будет от 225 до 250.

Решение. Вероятность р появления события А – изделие бракованно в каждом испытании постоянна и равна 0,3. Все испытания независимы и проводятся в одинаковых условиях, следовательно, имеет место схема Бернулли. Так как число испытаний n = 800 велико, а число m появлений события А заключено в пределах от a = 225 до b = 250, то вероятность $P_{800}(225 \le m \le 250)$ найдем по формуле (7).

$$\alpha = \frac{225 - 800 \cdot 0{,}3}{\sqrt{800 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} = -\frac{1{,}5}{12{,}96} \approx -1{,}157,$$

$$\beta = \frac{250 - 800 \cdot 0{,}3}{\sqrt{800 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} = \frac{10}{12{,}96} = 0{,}77.$$

По таблице значений функции Лапласа из приложения 2 находим

$$\Phi(\alpha) = \Phi(-1{,}157) = -\Phi(1{,}157) = -0{,}3770,$$

$$\Phi(\beta) = \Phi(0{,}77) = 0{,}2794.$$

Тогда по формуле (4) имеем

$$P_{800}(225 \le m \le 250) = \Phi(0{,}77) - \Phi(-1{,}157) = 0{,}2794 + 0{,}3770 = 0{,}6564. \blacklozenge$$

Определение 4. ***Отклонение частоты от вероятности*** есть величина $\left|\frac{m}{n} - p\right|$, где m – число появлений события А в схеме Бернулли, n – число независимых испытаний, р – вероятность события А в отдельно взятом испытании.

Теорема 5. Вероятность отклонения относительной частоты события А от вероятности появления этого события в n независимых испытаниях, если это отклонение не превосходит заданного положительного числа ε, вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \quad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}. \tag{8}$$

Задача 6. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота выпадения герба отклонится от 0,5 не менее, чем на 0,01?

Решение. Событие А – выпадение герба на верхней грани монеты при одном подбрасывании имеет вероятность р = 0,5. Требуется найти число n испытаний при данных условиях. Воспользуемся для этого формулой (8), в которой ε = 0,01, p = q = 0,5, $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| \le 0{,}01\right) = 0{,}95$.

При $\sigma = \sqrt{\frac{0{,}25}{n}}$ имеем $2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{0{,}5}\right) = 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) = 0{,}95$ или $\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) = 0{,}475$.

По таблице значений функции Лапласа находим $0{,}02\sqrt{n} = 1{,}96$. Отсюда получаем, что n = 9604. ♦

Упражнения

А1. Приведите примеры вероятностных ситуаций, описываемых схемой Бернулли.

B1. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет ровно 5 раз?

B2. Найти наиболее вероятное число выпадений цифры 1 при 40 бросаниях игральной кости.

B3. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник бракован, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

B4. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном; с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из 6 человек. Найти вероятности следующих событий:

A – в составе группы не меньше четырех блондинов;

B – в составе группы хотя бы один рыжий;

C – в составе группы равное число блондинов и шатенов.

B5. Знаменитый футболист забивает пенальти с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что из 10 пенальти он забьет не более 8?

B6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

B7. Найти вероятность того, что в 243 испытаниях событие A наступит ровно 80 раз, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

B8. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

B9. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 90 будут бракованными.

B10. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится 3 раза.

B11. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления этого события при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

B12. Предполагается, что вероятность поступления в продажу бракованного изделия равна 0,1. С какой вероятностью можно ожидать не более 20 бракованных изделий среди 100 проданных?

B13. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

B14. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1 000 изделий не выдержит испытаний не менее двух изделий.

B15. В результате проведения опыта событие A появляется с вероятностью 0,001. Опыт повторяется 2000 раз. Какова вероятность того, что событие A появится не менее двух и не более четырех раз?

B16. Батарея дала 6 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который при каждом выстреле 1/3. Найти вероятность разрушения объекта обстрела, если для этого требуется не меньше двух попаданий.

B17. Производится 500 испытаний, при каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,3. Какова вероятность того, что частота наступления события A отклонится от его вероятности меньше, чем на 0,05?

B18. Игральная кость подброшена 200 раз. Найти вероятность того, что цифра 6 выпала больше 30 раз, но меньше 40 раз.

C1. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и более элементов за год?

C2. Среди 1000 человек приблизительно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

C3. Предполагается, что вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

C4. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

C5. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0,03 и 0,02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших лотерейных билетов, выбранных из разных серий.

C6. Аппаратура содержит 2 000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа каждого из которых равна p = 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

C7. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 секунд, в течение которых телефонист отлучился, не будет ни одного вызова?

C8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 и не менее 30 раз.

C9. По каналу связи передали независимым образом 100 знаков. Вероятность искажения любого передаваемого знака равна 0,2. Какова вероятность получения 16 искажений?

C10. В ОТК завода поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 изделий стандартными окажутся не менее 34.

C11. Вероятность случайного события равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие произойдет в большинстве случаев при 60 испытаниях?

С12. Фабрика выпускает 70% продукции высшего сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий высшего сорта будет заключено между 652 и 760?

С13. Вероятность появления события А в каждом испытании равна 0,3. Найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью 0,98 можно утверждать, что относительная частота события А отклонится от вероятности его появления по абсолютной величине не более, чем на 0,01.

С14. Вероятность появления события А в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие А наступит: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

С15. Вероятность р того, что деталь нестандартная, равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности р = 0,1 не более чем на 0,03?

С16. Для данного студента вероятность ответить правильно на вопрос теста равна 0,6. Задано 20 вопросов. Найти наивероятнейшее число правильных ответов и соответствующую ему вероятность.

С17. Найти наивероятнейшие числа m_0 и m_1 соответственно отрицательных и положительных ошибок и соответствующие этим числам вероятности при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной – 1/3.

D1. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз по одному извлекаются шары, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше 0,5.

D2. По некоторой цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i-ом выстреле равна p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. При вычислении вероятности хотя бы одного попадания различные вероятности p_i осредняют и заменяют их средней арифметической

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}.$$

Увеличится или уменьшится от такого осреднения вероятность хотя бы одного попадания?

D3. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой в крейсер равна 0,75. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, который в результате попадания наполняется водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера?

Ответы

Тема 1. C5. 1) число заканчивается на 5; 2) $A\overline{B}=O$; 3) 1 или 3 машины сломаны; 4) 2 пиковых и 1 трефовая (или червонная, или бубновая) карта. **C6.** 1) $A_1A_2A_3$; 2) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=B$; 3) $A_1+A_2+A_3$; 4) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; 5) $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3=C$; 6) $B+C+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$. **C7.** 1) $(K_1K_2+K_1K_3+K_2K_3)\cdot(G_1+G_2)=A$, где события K_i, $i=\overline{1,3}$, – взята i-ая книга, G_i, $i=1,2$, – взят i-ый журнал; 2) $A+K_1K_2K_3$; 3) $A+(K_1+K_2+K_3)G_1G_2=B$; 4) B. **C8.** 1) выбрана хотя бы одна партия товаров хотя бы одной из трех групп; 2) выбрана хотя бы одна партия товаров каждой из трех групп; 3) выбрана одна партия товаров первой группы и / или три партии товаров второй группы; 4) выбраны две партии товаров второй группы и четыре партии товаров первой группы; 5) выбраны две партии товаров первой группы и хотя бы одна партия товаров третьей группы или выбрана хотя бы одна партия товаров третьей группы. **C9.** Указание: используйте дерево подсчета. **C10.** Да. Указание: используйте дерево подсчета. **C11.** $C=A\cdot(B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3)$, $\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3+B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1B_2\overline{B}_3$. **D1, D2.** Указание: используйте дерево подсчета. **D4.** $X=B$.

Тема 2. A2. 3360. **A3.** 120. **A4.** 720. **A5.** 2300. **B1.** 20. **B2.** 45; 120. **B3.** 241 920. **B4.** 1) 2600; 2) 2500; 3) 1456. **B5.** 0, если $n>m$, A_n^m, если $n\le m$. **B6.** m^n. **B7.** 5/36. **B8.** 3/28; 15/28. **B9.** 1) 1/3; 2) 5/6. **B10.** 1) 0,25; 2) 0,5; 3) 0,5. **B11.** 0,0025. **B12.** 0,1625. **B13.** 1) 0,0147; 2) 0,3529. **B14.** 1) $0{,}7151\cdot 10^{-9}$; 2) $0{,}1852\cdot 10^{-6}$; 3) 0,0186. **C1.** 32; 2^k. **C2.** 120. **C3.** 303 600. **C4.** 20 976 000. **C5.** 0,6. **C6.** $\frac{2\cdot 25!\cdot 29!}{54!}$. **C7.** $\frac{1}{26^{10}}$. **C8.** $\frac{1}{31^2}$; $\frac{1}{21^2}$. **C9.** $\frac{1}{6}$. **C10.** $\frac{1}{n!}$. **C11.** 0,056. **C12.** $\frac{ac}{(a+b)(c+d)}$. **C13.** 1) 0,56; 2) 0,14. **C14.** 1) 0,125; 2) 0,8. **C15.** 0,152. **C16.** а) 0,4241; б) 0,1431; в) 0,5866. **C17.** 0,0965. **C18.** 1) $\frac{180}{5^{10}}$; 2) $\frac{20}{5^{10}}$; 3) $\frac{16}{5^{10}}$. **D1.** 1) 0,2162; 2) 0,4955. **D2.** $\frac{1}{3\cdot(36^5-1)}$; $\frac{1}{3\cdot(A_{36}^5-1)}$. **D3.** $\frac{4}{9!}$. **D4.** 0,0053. **D7.** $\frac{C_{20}^{15}}{20^{15}}$. **D10.** 0,0027. **D12.** не менее 253.

Тема 3. B1. 105. **B2.** 30. **B3.** 1) 0,05; 2) 25. **B4.** 0,25. **B5.** 1) 0,5; 2) 0,5. **B6.** ~~5/24~~ 1/10. **B7.** 0,75. **B8.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **B9.** $\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{R}{d}$. **B10.** 1) 13/24; 2) 11/24; 3) 1/48; 4) 0,5; 5) 1/48. **C1.** 0,75. **C2.** $\frac{r^2}{R^2}$; **C3.** $\frac{a-r}{r}$. **C4.** вероятнее, что догонит. **C5.** $\frac{1}{3}$. **C6.** $\frac{1}{8}$. **C7.** $\frac{1}{4}$. **C8.** $\frac{1}{4}$. **C9.** 1) a_2-a_1; 2) $(a_2-a_1)(b_2-b_1)$; 3) 0,5; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $h(2-h)$; 6) $\frac{\pi}{4}$; 7) $1-\frac{\pi}{24}$. **C10.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **C11.** $\frac{5}{9}$. **D1.** $\frac{1}{144}$. **D2.** 15,625 см.

Тема 4. В1. 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет. Указание: для проверки воспользоваться равенствами (2) темы 4. **В2**. 0,8. **В3**. 0,91. **В4**. 0,57. **В5**. $\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$. **В6**. $\frac{58}{125}$. **В7**. $\frac{8}{51}$; $\frac{8}{51}$. **В8**. $\frac{1}{81}$. **В9**. 1) 0,86; 2) 0,0081. **В10**. 1) 0,0677; 2) 0,1253; 3) 0,9423. **В11**. 0,973. **В12**. $\frac{2n}{(2n)!}$. **В13**. 1) $1-(1-p)^{mn}$. 2) $\left(1-(1-p)^n\right)^m$. **В14**. 0,25088. **В15**. 0,314. **В16**. 0,197. **В17**. 1/360. **В18**. 0,3; 0,6. **С1**. 5/6. **С2**. 1/216. **С3**. 0,2286. **С4**. $1-p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_n$. **С5**. 1) 28/45; 2) 44/45. **С6**. 1) 0,504; 2) 0,006; 3) 0,054; 4) 0,126. **С7**. 1) 0,36; 2) 0,24; 3) 0,09. **С8**. $1-\frac{1}{2^m}$. **С9**. 0,788. **С10**. 0,44. **С11**. 5. **С12**. 0,3017. **D1**. не менее 5. **D2**. не менее 3. **D3**. $1-\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-(n-1)}{365}$. **D4**. 0,8. **D6**. 0,994. **D7**. 1714,286 у.е. Семену и 285,714 у.е. Жорику. **D8**. 13/41.

Тема 5. А1. 1) H_k – выбран k-ый стрелок, $k=\overline{1,3}$; 2) H_k – выбрана k-ая урна, $k=\overline{1,3}$; 3) H_k – выбран k-ый курс, $k=\overline{1,5}$; 4) H_k – изделие изготовлено k-ой фабрикой, $k=\overline{1,4}$. **В1**. 0,92. **В2**. а) 0,58; б) 0,71. **В3**. а) $\frac{S_1p_1+S_2p_2+S_3p_3}{S}$; б) $\frac{S_1p_1}{S_1p_1+S_2p_2+S_3p_3}$. **В4**. 0,78. **В5**. 0,09. **В6**. $\frac{p_1(1-p_1)^2}{p_1(1-p_1)^2+p_2(1-p_2)^2+p_3(1-p_3)^2}$. **В7**. 0,458. **В8**. 0,32. **В9**. 0,68. **В10**. 0,55. **В11**. 0,09. **В12**. 0,089. **В13**. 0,936. **В14**. 0,9979. **В15**. 1) 0,93; 2) 0,093. **В16**. 1) 28/145; 2) 8/17. **В17**. 1 белый, 1 черный шары. **В18**. 7/19. **С1**. 0,48. **С2**. а) 0,72; б) 0,97. **С3**. 19/24. **С4**. 0,16. **С5**. 1) вероятнее не попал; 2) одинаково вероятно. **С6**. 1) 0,92; 2) 0,08. **С7**. 0,0309. **С8**. 0,89. **С9**. 0,887. **С10**. 13/20. **С11**. вероятность первого заболевания 0,057; второго – 0,943. **С12**. $\frac{n_1(n_2+1)}{m_1n_1+n_1(n_2+1)}$. **С13**. для первого стрелка вероятность 0,228, для второго – 0,771. **С14**. 1) 0,9075; 2) 0,237. **С15**. 42/61. **С18**. 1) 0,584; 2) 0,002. **D1**. 8 вертолетов в первый регион, 2 – во второй. **D2**. 0,4553.

Тема 6. В1. 7/32. **В2**. 6. **В3**. 0,0378. **В4**. P(A) = 0,455, P(B) = 0,468, P(C) = 0,181. **В5**. 0,264. **В6**. 0,093.**В7**. 0,001. **В8**. 0,4938. **В9**. 0,0288. **В10**. 0,181. **В11**. 0,2. **В12**. 0,9992. **В13**. 0,143. **В14**. 0,0616. **В15**. 0,5414. **В16**. 0,649. **В17**. 0,986. **В18**. 0,898. **С1**. 0,264. **С2**. 0,4493. **С3**. 83. **С4**. 0,17. **С5**. 0,557. **С6**. 0,63. **С7**. 0,61. **С8**. 0,123. **С9**. 0,0605. **С10**. 0,99957. **С11**. 0,90619. **С12**. 0,99952. **С13**. 11522. **С14**. а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5. **С15**. 400. **С16**. 12 ответов; 0,1821. **С17**. $m_1 = 3$, $P_{m_1,4}=0{,}3951$; $m_0 = 1$, $P_{m_0,4}=0{,}3951$. **D1**. 7. **D2**. уменьшится. **D3**. 0,92359.

Вопросы для дискуссии

Эти вопросы, предназначены для осмысления основных категорий теории вероятностей. Попробуйте ответить на них уже после изучения первой темы. Обсудить же ответы лучше после изучения всех тем этого пособия. Конечно, вопросов, подобных заданным здесь, возникает гораздо больше, поэтому читателю предлагается продолжить их список.

1. Каждый человек в силу своих знаний, опыта или каких-либо других причин судит о степени возможности осуществления события. Можно ли, исходя из этого, утверждать, что вероятность субъективна? Ответ обоснуйте.

2. В результате тасования колоды из 36 карт выпадает определенный порядок расположения карт. Посчитайте сколько таких порядков возможно и какова вероятность отдельно взятого порядка.

В этой задаче вероятность выпадения каждого порядка очень мала. Можно ли сказать, что это событие практически невозможно?

Объясните, почему при каждом тасовании появляется определенный порядок размещения карт в колоде, т.е. каждый раз происходит маловероятное событие.

3. В науке основополагающей аксиомой является принцип причинности, согласно которому в природе течение явлений точно определено совокупностью факторов, оказывающих на них влияние, и одинаковые причины приводят к одинаковым следствиям. Не противоречит ли этот принцип утверждению о вероятностном характере явлений окружающей нас действительности?

4. Как вы думаете, есть ли в реальном мире достоверные события. Если есть, то назовите их. Ответ обоснуйте.

5.

6.

7.

...

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 366 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.
3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 400 с.
4. Коваленко, И.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов / И.Н. Коваленко, А.А. Филиппова. – М.: Высш. шк. 1973. – 368 с.
5. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для экон. специальностей вузов / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский; под ред. В.А. Колемаева. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
6. Мостеллер, Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас; под ред. И.М. Яглома. – М.: МИР, 1969. – 431 с.
7. Нейман, Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики / Ю. Нейман. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
8. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
9. Савич, Л.К. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов эконом. специальностей учреждений, обеспечивающих получение высш. образования / Л.К. Савич, Н.А. Смольская; науч. ред. О.И. Лаврова. – Мн.: Адукація і выхаванне, 2006. – 208 с.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632 с.
11. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах / В. Феллер. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 738 с.

Книги для чтения

1. Реньи, А. Письма о вероятности / А. Реньи. – М.: Мир, 1970. – 96 с.
2. Тарасов, Л.В. Мир, построенный на вероятности / Л.В. Тарасов. – М.: Просвещение, 1984. – 191 с.
3. Тутубалин, В.Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности) / В.Н. Тутубалин. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0199	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0,0000	0,48	0,1844	0,96	0,3315	1,44	0,4251	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2.88	0,4980
0,01	0,0040	0,49	0,1879	0,97	0,3340	1,45	0,4265	1,93	0,4732	2,41	0,4920	2,89	0,4981
0,02	0,0080	0,50	0,1915	0,98	0,3365	1,46	0,4279	1,94	0,4738	2,42	0,4922	2,90	0,4981
0,03	0,0120	0,51	0,1950	0,99	0,3389	1,47	0,4292	1,95	0,4744	2,43	0,4925	2,91	0,4982
0,04	0,0160	0,52	0,1985	1,00	0,3413	1,48	0,4306	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,92	0,4982
0,05	0,0199	0,53	0,2019	1,01	0,3438	1,49	0,4319	1,97	0,4756	2,45	0,4929	2,93	0,4983
0,06	0,0239	0,54	0,2054	1,02	0,3461	1,50	0,4332	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,94	0,4984
0,07	0,0279	0,55	0,2088	1,03	0,3485	1,51	0,4345	1,99	0,4767	2,47	0,4932	2,95	0,4984
0,08	0,0319	0,56	0,2123	1,04	0,3508	1,52	0,4357	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2.96	0,4985
0,09	0,0359	0,57	0,2157	1,05	0,3531	1,53	0,4370	2,01	0,4778	2,49	0,4936	2,97	0,4985
0,10	0,0398	0,58	0,2190	1,06	0,3554	1,54	0,4382	2,02	0,4783	2,50	0,4938	2,98	0,4986
0,11	0,0438	0,59	0,2224	1,07	0,3577	1,55	0,4394	2,03	0,4788	2,51	0,4940	2,99	0,4986
0,12	0,0478	0,60	0,2257	1,08	0,3599	1,56	0,4406	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,00	0,4987
0,13	0,0517	0,61	0,2291	1,09	0,3621	1,57	0,4418	2,05	0,4798	2,53	0,4943	3,01	0,4987
0,14	0,0557	0,62	0,2324	1,10	0,3643	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,02	0,4987
0,15	0,0596	0,63	0,2357	1,11	0,3665	1,59	0,4441	2,07	0,4808	2,55	0,4946	3,03	0,4988
0,16	0,0636	0,64	0,2389	1,12	0,3686	1,60	0,4452	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,04	0,4988
0,17	0,0675	0,65	0,2422	1,13	0,3708	1,61	0,4463	2,09	0,4817	2,57	0,4949	3,05	0,4989
0,18	0,0714	0,66	0,2454	1,14	0,3729	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,06	0,4989
0,19	0,0753	0,67	0,2486	1,15	0,3749	1,63	0,4484	2,11	0,4826	2,59	0,4952	3,07	0,4989
0,20	0,0793	0,68	0,2517	1,16	0,3770	1,64	0,4495	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,08	0,4990
0,21	0,0832	0,69	0,2549	1,17	0,3790	1,65	0,4505	2,13	0,4834	2,61	0,4955	3,12	0,4991
0,22	0,0871	0,70	0,2580	1,18	0,3810	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,62	0,4956	3,14	0,4992
0,23	0,0910	0,71	0,2611	1,19	0,3830	1,67	0,4525	2,15	0,4842	2,63	0,4957	3,18	0,4993
0,24	0,0948	0,72	0,2642	1,20	0,3849	1,68	0,4535	2.16	0,4846	2,64	0,4959	3,22	0,4994
0,25	0,0987	0,73	0,2673	1,21	0,3869	1,69	0,4545	2,17	0,4850	2,65	0,4960	3,27	0,4995
0,26	0,1026	0,74	0,2704	1,22	0,3888	1,70	0,4554	2.18	0,4854	2,66	0,4961	3,33	0,4996
0,27	0,1064	0,75	0,2734	1,23	0,3907	1,71	0,4564	2,19	0,4857	2,67	0,4962	3,39	0,4997
0,28	0,1103	0,76	0,2764	1,24	0,3925	1,72	0,4573	2,20	0,4861	2,68	0,4963	3,49	0,49976
0,29	0,1141	0,77	0,2794	1,25	0,3944	1,73	0,4582	2,21	0,4864	2,69	0,4964	3,60	0,499841
0,30	0,1179	0,78	0,2823	1,26	0,3962	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,70	0,4965	3,61	0,499847
0,31	0,1217	0,79	0,2852	1,27	0,3980	1,75	0,4599	2,23	0,4871	2,71	0,4966	3,62	0,499853
0,32	0,1255	0,80	0,2881	1,28	0,3997	1,76	0,4608	2,24	0,4875	2,72	0,4967	3.63	0,499858
0,33	0,1293	0,81	0,2910	1,29	0,4015	1,77	0,4616	2,25	0,4878	2,73	0,4968	3,64	0,499864
0,34	0,1331	0,82	0,2939	1,30	0,4032	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,74	0,4969	3,65	0,499869
0,35	0,1368	0,83	0,2967	1,31	0,4049	1,79	0,4633	2,27	0,4884	2,75	0,4970	3,66	0,499874
0,36	0,1406	0,84	0,2995	1,32	0,4066	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,76	0,4971	3,67	0,499879
0,37	0,1443	0,85	0,3023	1,33	0,4082	1,81	0,4649	2,29	0,4890	2,77	0,4972	3,68	0,499883
0,38	0,1480	0,86	0,3051	1,34	0,4099	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,78	0,4973	3,69	0,499888
0,39	0,1517	0,87	0,3078	1,35	0,4115	1,83	0,4664	2,31	0,4896	2,79	0,4974	3,70	0,499892
0,40	0,1554	0,88	0,3106	1,36	0,4131	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,80	0,4974	3,75	0,499912
0,41	0,1591	0,89	0,3133	1,37	0,4147	1,85	0,4678	2,33	0,4901	2,81	0,4975	3,80	0,499928
0,42	0,1628	0,90	0,3159	1,38	0,4162	1,86	0,4686	2,34	0,4904	2,82	0,4976	3,90	0,499952
0,43	0,1664	0,91	0,3186	1,39	0,4177	1,87	0,4693	2,35	0,4906	2,83	0,4977	4,00	0,499968
0,44	0,1700	0,92	0,3212	1,40	0,4192	1,88	0,4699	2,36	0,4909	2,84	0,4977	4,30	0,499991
0,45	0,1736	0,93	0,3238	1,41	0,4207	1,89	0,4706	2,37	0,4911	2,85	0,4978	4,50	0,499997
0,46	0,1772	0,94	0,3264	1,42	0,4222	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,86	0,4979	4,70	0,499999
0,47	0,1808	0,95	0,3289	1,43	0,4236	1,91	0,4719	2,39	0,4916	2,87	0,4979	5,00	0,500000

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Марченко Ирина Васильевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические рекомендации

В двух частях

Часть 1

Технический редактор *А.Л. Позняков*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать 2.11.2011 г.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,3. Тираж 52 экз. Заказ № 452.

Учреждение образования «Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова», 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова». 212022, Могилев, Космонавтов, 1.