

Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Могилев 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. Кулешова»

Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методические материалы



Могилев 2011

ББК 22.1
УДК 511 (075.8)
Л54

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук доцент,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»
В.Г. Иванов;

кандидат педагогических наук доцент кафедры
математики и методики преподавания математики
УО «Мозырского государственного педагогического университета
им. И.П. Шамякина» *Л.А. Иваненко*

Лещенко, Л.В.

Л54 Целые неотрицательные числа: учебно-методические материалы / Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич. — Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. — 56 с.: ил.

Материалы содержат теоретические сведения, методически подобранные наборы задач для аудиторных и домашних заданий по следующим разделам математики: теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел, аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел, системы счисления, делимость целых неотрицательных чисел.

Предназначены для студентов педагогического факультета.

**ББК 22.1
УДК 511 (075.8)**

© Лещенко Л.В., Гостевич Т.В., 2011
© Оформление. УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011

Тема 1. Теоретико-множественный подход
к построению множества целых неотрицательных чисел

1.1. Равномощные множества. Понятие целого неотрицательного числа. Отношения «равно», «меньше», «больше» на множестве целых неотрицательных чисел

Определение. Два множества A и B называются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию). Обозначение: $A \sim B$.

Определение. Общее свойство класса конечных равномощных множеств называется **целым неотрицательным числом**.

Множество целых неотрицательных чисел обозначается N_0 .

Число, соответствующее конечному множеству A (мощность множества A), обозначается $a = m(A)$.

Определение. Число **нуль** – мощность пустого множества $\emptyset$, это значит $0 = m(\emptyset)$.

Определение. Если $A \sim B$ (множества A и B принадлежат одному классу равномощных множеств), то $a = b$, где $m(A) = a$, $m(B) = b$.

Определение 1. Целое неотрицательное число a **меньше** целого неотрицательного числа b (целое неотрицательное число b **больше** целого неотрицательного числа a), тогда и только тогда, когда множество A равномощно собственному подмножеству множества B , где $m(A) = a$, $m(B) = b$.

$$a < b \equiv A \sim B_1 \wedge B_1 \subset B \wedge B_1 \neq B \wedge B_1 \neq \emptyset \wedge m(A) = a \wedge m(B) = b.$$

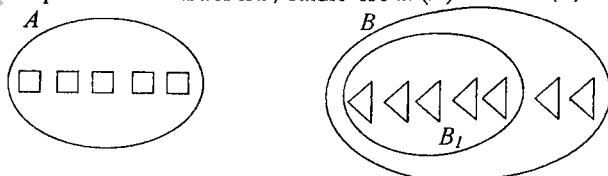
Определение 2. Целое неотрицательное число a **меньше** целого неотрицательного числа b (целое неотрицательное число b **больше** целого неотрицательного числа a), тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число k , что $b = a + k$.

$$a < b \equiv \exists k \in N (b = a + k).$$

Пример 1. Объясните, почему $5 < 7$.

Решение. 1) Воспользуемся определением 1.

Рассмотрим множества A и B , такие что $m(A) = 5 \wedge m(B) = 7$.



Во множестве B можно выделить собственное подмножество B_1 , которое равномощно множеству A , поэтому $5 < 7$.

2) Воспользуемся определением 2. В качестве k возьмем число 2. Тогда $5 < 7 \equiv 7 = 5 + 2$.

Задания

1. Равномощны ли множества A и B , если:

- а) A – множество квадратов;
 B – множество прямоугольников;
- б) A – множество жильцов в доме;
 B – множество квартир в доме;
- в) A – множество натуральных чисел;
 B – множество четных натуральных чисел;
- г) A – множество натуральных чисел;
 B – множество целых неотрицательных чисел, кратных 11.

2. Приведите примеры таких различных множеств A и B , что $m(A) = 4$ и $m(B) = 4$. В каком отношении находятся множества A и B ?

3. Приведите примеры множеств, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, а также множеств, между элементами которых нельзя установить взаимно однозначное соответствие.

4. Приведите примеры множеств, равномощных:

- а) множеству A глаз у человека;
- б) множеству B землян, побывавших на Марсе;
- в) множеству C пальцев на руке;
- г) множеству D медиан треугольника;
- д) множеству E целых неотрицательных чисел на промежутке $[3; 6]$.

Назовите общее свойство класса множеств, представителем которого является множество $A(B, C, D, E)$.

5. В нашей семье, которая живет в отдельной квартире, пятеро детей: два мальчика и три девочки. Мой брат Андрей составил из членов нашей семьи четыре множества: A – множество детей, живущих в нашей квартире; B – множество братьев и сестер Андрея; C – множество сыновей и дочерей моих родителей; D – множество моих братьев и сестер. Есть ли среди этих множеств равномощные множества?

6. Пусть A – множество месяцев в году. Назовите еще три множества, равномощных множеству A . Какое натуральное число является общим свойством класса множеств, равномощных A ?

7. Найдите $m(A)$, если A :

- а) множество граней куба;
- б) множество ребер куба;
- в) множество вершин куба.

8. Сколько элементов содержит каждое из следующих множеств:

$$A = \{x \mid x \in N_0, x < 8\};$$

$$B = \{x \mid x \in N_0, x < 1\};$$

$$C = \{x \mid x \in N_0, 0 < x < 5\};$$

$$D = \{x \mid x \in N_0, x \leq 0\}?$$

9. Сформулируйте определения отношения «меньше или равно» между целыми неотрицательными числами, аналогичные определениям 1 и 2 отношения «меньше».

10. Пусть $m(A) = 1$. Придумайте множество B , если известно, что:

а) $m(B) < m(A)$;

б) $m(B) \leq m(A)$.

11. Множество A содержит 3 элемента и равномощно множеству C , которое является собственным подмножеством множества $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Укажите среди следующих ответов верные:

а) $C = \{0, 1, 3\}$; б) $C = \{1, 3, 5, 7\}$; в) $C = \{3, 7, 9\}$; г) $C = \{1, 3, 5\}$.

12. Множество A равномощно собственному подмножеству множества B , множество B равномощно собственному подмножеству множества C : $m(A) = a$; $m(B) = b$; $m(C) = c$. Укажите истинные суждения:

а) $a < b < c$; б) $a < c$; в) $b < c$; г) $c = b$.

13. Объясните, почему $0 < 2$, $5 > 2$, $3 \leq 9$, $7 \leq 18$, $17 \geq 8$.

1.2. Операции над целыми неотрицательными числами

Сложение

Определение. Суммой двух целых неотрицательных чисел a и b называется мощность объединения непересекающихся множеств A и B , таких что $m(A) = a$, $m(B) = b$.

$$a + b = m(A \cup B) = m(A) + m(B), \text{ где } A \cap B = \emptyset.$$

Числа a и b называются **слагаемыми**. Операция, с помощью которой находится сумма, называется **сложением**.

Свойства сложения:

1. Сумма $a + b$ не зависит от выбора множеств A и B , которые не пересекаются, таких что $a = m(A)$, $b = m(B)$.

2. Сумма двух целых неотрицательных чисел существует и единственна.

3. $\forall a \in N_0 (a + 0 = a)$ – Число 0 является нейтральным элементом по сложению.

4. $\forall a, b \in N_0 (a + b = b + a)$ – коммутативный (переместительный) закон.

5. $\forall a, b, c \in N_0 ((a + b) + c = a + (b + c))$ – ассоциативный (сочетательный) закон.

Вычитание

Определение 1. Разностью двух целых неотрицательных чисел a и b называется мощность разности множеств A и B (дополнения множества B до множества A), таких что $m(A) = a$, $m(B) = b$ и $B \subseteq A$.

$$a - b = m(A \setminus B) = m(\bar{B}_A) = m(A) - m(B).$$

Определение 2. Разностью двух целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c , сумма которого с числом b есть число a : $c = a - b \equiv a = c + b$.

Число a называется **уменьшаемым**, b – **вычитаемым**. Операция, с помощью которой находится разность, называется **вычитанием**.

Свойства вычитания:

1. Разность $a - b$ не зависит от выбора множеств A и B таких, что $B \subseteq A$ и $m(A) = a$, $m(B) = b$.

2. Разность $a - b$ двух целых неотрицательных чисел a и b существует и единственна тогда и только тогда, когда $a \geq b$.

Справедливы **равенства**, выражающие связь операций сложения и вычитания. Приведем 2 из них:

$$\forall a, b, c \in N_0 (a \geq c \supset (a + b) - c = (a - c) + b);$$

$$\forall a, b, c \in N_0 (b \geq c \supset (a + b) - c = (b - c) + a).$$

На этих равенствах основано правило вычитания числа из суммы, применяемое в начальных классах.

Умножение

Определение 1. Произведением двух целых неотрицательных чисел a и b называется мощность декартова произведения множеств A и B , таких что $m(A) = a$, $m(B) = b$.

$$a \cdot b = m(A \times B) = m(A) \cdot m(B).$$

Определение 2. Произведением двух целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число $c = a \cdot b$, которое удовлетворяет трем условиям:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}$ при $b > 1$;

2) $a \cdot 1 = a$;

3) $a \cdot 0 = 0$.

Числа a и b называют **множителями**. Операция, с помощью которой находят произведение, называется **умножением**.

Свойства умножения:

1. Произведение целых неотрицательных чисел существует и единственно.

2. $\forall a, b \in N_0 (a \cdot b = b \cdot a)$ – коммутативный (переместительный) закон.

3. $\forall a, b, c \in N_0 ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$ – ассоциативный (сочетательный) закон.

4. $\forall a, b, c \in N_0 ((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$ – дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения.

5. $\forall a, b, c \in N_0 (a \geq b \supset (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c)$ – дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно вычитания.

- $$\left. \begin{array}{l} 1) \forall a, b \in N_0 \quad \forall c \in N \quad (a < b \supset ac < bc) \\ 2) \forall a, b, c, d \in N_0 \quad (a < b \wedge c < d \supset ac < bd) \end{array} \right\} \text{монотонность умножения}$$

Деление целого неотрицательного числа на натуральное число

Определение 1. Пусть $a = m(A)$ и множество A разбито на равно-мощные попарно не пересекающиеся подмножества (классы).

Тогда если b — мощность каждого класса, то частным от деления a на b называется количество классов в этом разбиении.

Если b — количество равно-мощных классов, то частным чисел a и b называется мощность каждого класса.

Определение 2. Частным целого неотрицательного числа a и натурального числа b называется целое неотрицательное число c , произведение которого и числа b равно a :

$$a : b = c \equiv a = c \cdot b.$$

Число a — делимое, b — делитель. Операция отыскания частного целого неотрицательного числа a и натурального числа b называется делением a на b .

Свойства деления:

1. Деление целого неотрицательного числа a на натуральное число b выполнимо тогда и только тогда, когда a кратно b ($a : b$).

2. Выражение $0 : 0$ не имеет смысла.

3. Деление на нуль невозможно.

4. $\forall b \in N (0 : b = 0)$.

5. Если частное при делении целого неотрицательного числа a на натуральное число b существует, то оно единственно.

Справедливы равенства, выражающие связь операции деления с умножением, сложением и вычитанием. Приведем некоторые из них:

1) $\forall a, b \in N_0 \quad \forall c \in N ((a : c) \wedge (b : c) \supset (a + b) : c = a : c + b : c)$.

2) $\forall a, b \in N_0 \quad \forall c \in N ((a : c) \wedge (b : c) \supset (a - b) : c = a : c - b : c)$ — правая дистрибутивность деления относительно сложения и вычитания.

3) $\forall a \in N_0, \forall b, c \in N ((a \cdot b) : c = a : (b : c) = (a : c) \cdot b)$.

На этих равенствах основаны правила деления суммы (разности, произведения) на число, применяемые в начальных классах.

Деление с остатком целого неотрицательного числа на натуральное число

Определение. Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r , что $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$.

$a : b = q$ (ост. r), где q — неполное частное, r — остаток.

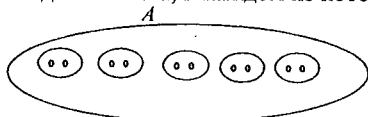
Если $a < b$, то $a : b = 0$ (ост. a).

Пример 2. Исходя из теоретико-множественного подхода к определению операций над числами, объяснить смысл равенства $10 : 2 = 5$.

Решение. Выражение $10 : 2$ – это частное чисел 10 и 2.

Вспользуемся определением 1 частного.

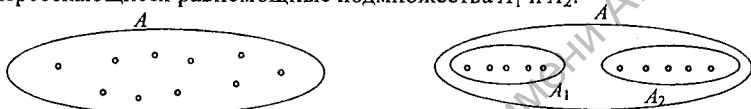
1. Разобьем множество A , где $m(A) = 10$, на непересекающиеся равномошные подмножества, в каждом из которых по два элемента.



Пересчитываем количество получившихся подмножеств. Их 5.

Значит, $10 : 2 = 5$.

2. Возьмем множество A такое, что $m(A) = 10$, и разобьем его на два непересекающиеся равномошные подмножества A_1 и A_2 :



Пересчет элементов в каждом из полученных подмножеств показывает, что $m(A_1) = m(A_2) = 5$. Значит, $10 : 2 = 5$.

По определению 2.

$10 : 2 = 5$, так как истинно равенство $5 \cdot 2 = 10$.

Пример 3. Докажите свойство сложения: $\forall a \in N_0 (a + 0 = a)$ – Число 0 является нейтральным элементом по сложению.

Решение. Возьмем множество A , такое что $m(A) = a$. Из теории множеств известно, что $A \cup \emptyset = A$.

Равные множества имеют равные мощности: $m(A \cup \emptyset) = m(A)$.

Так как $A \cap \emptyset = \emptyset$, применим к левой части равенства определение суммы, получим $m(A) + m(\emptyset) = m(A)$.

По обозначению $m(A) = a$, по определению $m(\emptyset) = 0$, после подстановки последнее равенство примет вид: $a + 0 = a$.

Пример 4. Дать теоретико-множественное обоснование равенства: $b - (a + c) = (b - a) - c$.

Решение. Требуется доказать равенство чисел $b - (a + c)$ и $(b - a) - c$.

Пусть $a = m(A)$, $b = m(B)$, $c = m(C)$. Тогда $a + c = m(A \cup C)$, если $A \cap C = \emptyset$.

$b - (a + c) = m(B \setminus (A \cup C))$, если $A \cup C \subseteq B$;

$b - a = m(B \setminus A)$, если $A \subseteq B$;

$(b - a) - c = m((B \setminus A) \setminus C)$, если $C \subseteq B \setminus A$.

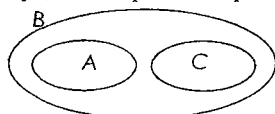
Равенство $b - (a + c) = (b - a) - c$ будет истинным, если истинно равенство $m(B \setminus (A \cup C)) = m((B \setminus A) \setminus C)$, а это будет следовать из равенства множеств $B \setminus (A \cup C)$ и $(B \setminus A) \setminus C$.

Равенство множеств установим с помощью диаграмм Венна.

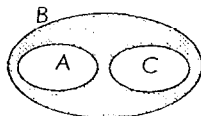
Сначала изобразим на диаграмме множества A, B, C , для которых одновременно выполняются выделенные выше условия:

$$A \cap C = \emptyset; A \cup C \subseteq B; A \subseteq B; C \subseteq B \setminus A.$$

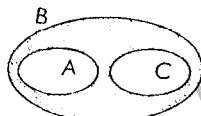
Этим условиям удовлетворяет диаграмма:



Теперь отметим штриховкой на диаграммах множества $B \setminus (A \cup C)$ и $(B \setminus A) \setminus C$.



$B \setminus (A \cup C)$



$(B \setminus A) \setminus C$

Видим, что заштрихованные области совпадают. Значит:

$$B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \setminus C;$$

$$m(B \setminus (A \cup C)) = m((B \setminus A) \setminus C);$$

$$m(B) - m(A \cup C) = m(B \setminus A) - m(C);$$

$$m(B) - (m(A) + m(C)) = (m(B) - m(A)) - m(C);$$

$$b - (a + c) = (b - a) - c.$$

Это равенство задает правило: Чтобы из числа b вычесть сумму чисел a и c , достаточно из числа b вычесть число a , затем число c .

Пример 5. Доказать равенство $cb : a = (c : a)b$.

Решение. С помощью этого равенства записано правило деления произведения на число: чтобы разделить произведение на число, достаточно на это число разделить кратный ему множитель и полученное частное умножить на оставшийся множитель.

Условие выполнимости данного равенства: $c : a$.

Для доказательства равенства будем использовать свойства:

1) $ab = ba$;

2) $(ab)c = a(bc)$;

3) если $ab = c$, то $a = c : b$ и $b = c : a$;

4) если $a : b = c$, то $a = cb$;

5) $(a : b)b = a$;

6) $(ab) : b = a$.

Докажем равенство $cb : a = (c : a)b$ двумя способами.

Первый способ. В левой части равенства записано выражение, представляющее собой частное чисел cb и a :

$$\underbrace{cb}_{\text{делимое}} : \underbrace{a}_{\text{делитель}} = \underbrace{(c : a)b}_{\text{частное}}$$

$$\text{Тогда: } cb = \overset{4}{((c : a)b)a} = \overset{1,2}{((c : a)a)b} \overset{5}{=} cb; cb = cb. \text{ Равенство доказано.}$$

Второй способ. Данное равенство имеет смысл на множестве целых неотрицательных чисел, если число c кратно числу a . Если c кратно a , то:

$$\exists k \in N_0 (c = a k) (7) \Rightarrow c : a = k (8).$$

Выполняем преобразования.

$$cb : a = ((ak)b) : a = ((kb)a) : a = kb = (c : a)b. \text{ Равенство доказано.}$$

Пример 6. Решить уравнение на основании зависимости между компонентами и результатами арифметических действий:

$$100 - (555 + x) : 40 = 75$$

Решение. 1) В левой части равенства записана разность. Неизвестно вычитаемое. Чтобы его найти, надо от уменьшаемого 100 отнять разность 75:

$$(555 + x) : 40 = 100 - 75$$

$$(555 + x) : 40 = 25$$

2) В левой части равенства записано частное. Неизвестно делимое. Чтобы его найти, надо частное 25 умножить на делитель 40:

$$555 + x = 25 \cdot 40$$

$$555 + x = 1000$$

3) В левой части равенства – сумма. Неизвестно второе слагаемое. Чтобы его найти, надо из суммы 1000 вычесть первое слагаемое 555:

$$x = 1000 - 555$$

$$x = 445.$$

Проверка. $100 - (555 + 445) : 40 = 75$

$$100 - 1000 : 40 = 75$$

$$100 - 25 = 75$$

$$75 = 75$$

Пример 7. Решите задачи и объясните в терминах теории множеств, почему задачи решаются сложением.

а) Маша сорвала 5 слив, а Дима – 4. Сколько слив сорвали дети?

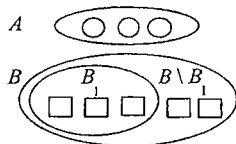
б) На столе 3 чашки, а ложек на 2 больше. Сколько на столе ложек?

Решение. а) В задаче рассматриваются 3 множества: множество A слив, сорванных Машей, множество B слив, сорванных Димой, и их объединение. Требуется найти мощность этого объединения – $m(A \cup B)$.

Из условия задачи известно, что $m(A) = 5$, $m(B) = 4$, множества A и B не пересекаются. Поэтому $m(A \cup B) = m(A) + m(B) = 5 + 4$. Сумма $5 + 4$ – математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: $5 + 4 = 9$. Следовательно, дети сорвали 9 слив.

б) В задаче речь идет о двух множествах: множестве A чашек и множестве B ложек. Известно, что $m(A) = 3$. Мощность множества B требуется найти при условии, что в нем на 2 элемента больше, чем во множестве A . Отношение «больше на 2» означает, что ложек на столе столько же, сколько чашек, и еще 2.

Выделим во множестве B подмножество B_1 , равномощное множеству A , т.е. подмножество, содержащее столько же ложек, сколько чашек на столе.



Определим мощность объединения непересекающихся множеств B_1 и $B \setminus B_1$. Для этого воспользуемся определением суммы, получаем:
 $m(B) = m(B_1 \cup (B \setminus B_1)) = m(B_1) + m(B \setminus B_1) = m(A) + m(B \setminus B_1) = 3 + 2$. Так как $3 + 2 = 5$, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 5 ложек.

Задания

14. Даны множества A и B :

- а) $A = \{+, \times, :, -\}$ и $B = \{\vee, \Rightarrow, \supset\}$;
- б) $A = \{+, \times, :, -\}$ и $B = \{+, \times\}$;
- в) $A = \{+, \times, :, -\}$ и $B = \{+, \times, \Rightarrow, \supset\}$.

Найдите:

- а) объединение множеств A и B ;
- б) разность множеств A и B ;
- в) $m(A)$, $m(B)$, $m(A) + m(B)$, $m(A \cup B)$, $m(A \setminus B)$;
- г) установите истинность равенств $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;
 $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$.

15. Какие из суждений истинны:

- а) для любых двух множеств A и B $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;
- б) для любых двух множеств A и B $m(A \cup B) \geq m(A) + m(B)$;
- в) существуют множества A и B такие, что $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;
- г) для любых двух множеств A и B $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$;
- д) существуют множества A и B такие, что $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$.

16. Дано $m(A) = 10$; $m(B) = 8$.

Задайте такие множества A и B , чтобы:

- а) $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$;
- б) $m(A) + m(B) \neq m(A \cup B)$;
- в) $m(A) + m(B) = m(A)$;
- г) $m(A) + m(B) = m(B)$;
- д) $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$;
- е) $m(A) - m(B) \neq m(A \setminus B)$.

17. Пользуясь определением суммы целых неотрицательных чисел, объясните почему: а) $5 + 2 = 7$; б) $5 + 0 = 5$; в) $2 + 5 = 7$.

18. Пользуясь определением разности целых неотрицательных чисел, объясните почему: а) $7 - 4 = 3$; б) $7 - 7 = 0$; в) $9 - 0 = 9$.

19. Между элементами множества $A = \{(3;5), (3;0), (2;1), (2;2), (4;4)\}$ и множества $B = \{3; 4; 8\}$ задано соответствие: каждой паре $(a; b) \in A$ соответствует число $(a + b) \in B$. Постройте граф этого соответствия. Является ли это соответствие отображением множества A в множество B ? Какое это отображение?

20. Является ли множество целых неотрицательных чисел замкнутым относительно операции сложения? Является ли множество целых неотрицательных чисел замкнутым относительно операции вычитания? (определены ли эти операции на множестве целых неотрицательных чисел).

21. Какие из следующих суждений истинны?

а) для любых целых неотрицательных чисел a и b верно неравенство $a + b > a$;

б) для любых натуральных чисел a и b верно неравенство $a + b > a$;

в) для любых целых неотрицательных чисел a и b верно неравенство $a + b \geq a$.

22. При каком условии:

а) сумма двух натуральных чисел равна одному из них;

б) сумма двух целых неотрицательных чисел равна одному из них;

в) сумма двух целых неотрицательных чисел равна нулю?

23. При каком условии:

а) разность двух натуральных чисел есть число натуральное;

б) разность двух натуральных чисел есть целое неотрицательное число;

в) разность двух целых неотрицательных чисел равна уменьшаемому;

г) разность двух целых неотрицательных чисел равна вычитаемому?

24. На основании свойств операции объединения множеств докажите коммутативность и ассоциативность сложения целых неотрицательных чисел.

25. Сумму $a + b + c$ запишите различными способами, пользуясь законами сложения.

26. Вычислите удобным способом и дайте обоснование:

а) $571 + 4854 + 429$;

б) $3027 + 4650 + 1073 + 7350$;

в) $10802 + 7499 + 3501 + 4098$;

г) $(3459 + 1252) + 1541$;

д) $7425 + (3810 + 2575)$;

е) $(4578 + 3560) + (3422 + 6440 + 1121)$;

ж) $68005 + 17983 + 1995 + 12017$.

27. Начертите треугольник. Около каждой вершины его запишите какое-нибудь число. Возле каждой стороны треугольника запишите число, равное сумме чисел, стоящих у ее концов. Каждое число, записанное у

вершины, сложите с числом, стоящим около противоположащей стороны. Сравните полученные числа. Объясните результат сравнения.

28. Сумма двух натуральных чисел увеличилась на 6 единиц. Как при этом могли измениться слагаемые?

29. Сумма двух натуральных чисел увеличилась в 3 раза. Как при этом могли измениться слагаемые?

30. Разность двух натуральных чисел увеличилась на 6 единиц. Как при этом могли измениться уменьшаемое и вычитаемое?

31. Укажите условия, при которых будут истинными следующие равенства, если $a, b, c \in N_0$:

1) $(a + b) - c = (a - c) + b$;

2) $(a + b) - c = (b - c) + a$;

3) $a - (b + c) = (a - c) - b$;

4) $a - (b + c) = (a - b) - c$;

5) $(a - c) - b = (a - b) - c$;

6) $a - (b - c) = (a + c) - b$;

7) $a - (b - c) = (a - b) + c$.

32. Как называются правила, которые выражаются равенствами из предыдущего задания? Сформулируйте эти правила, дайте им теоретико-множественную интерпретацию. Докажите эти свойства.

33. Вычислите удобным способом. Дайте обоснование:

а) $(458 + 1257) - 657$; д) $2583 - (694 + 306)$;

б) $878 + (122 - 81)$; е) $5331 - (597 + 4331)$;

в) $(1459 - 743) + 343$; ж) $(657 - 353) - 247$;

г) $2944 - (2523 - 1056)$; з) $89274 - (2100 - 726)$.

34. Вставьте слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно», чтобы получилось истинное суждение:

а) для того чтобы сумма двух чисел была четным числом, ..., чтобы каждое число было четным;

б) для того, чтобы сумма двух чисел была больше 20, ..., чтобы по крайней мере одно из слагаемых было больше 10;

в) для того, чтобы сумма двух чисел была равна второму слагаемому, ..., чтобы первое слагаемое было равно нулю;

г) для того, чтобы сумма $a + a$ была больше 4, ..., чтобы a было больше 2.

35. Найдите сумму:

а) наименьшего однозначного натурального, наименьшего двузначного и наибольшего четырехзначного чисел;

б) наибольшего двузначного, наибольшего пятизначного и наименьшего шестизначного чисел.

36. Распределите числа 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 в клетках прямоугольника так, чтобы:

а) сумма чисел в каждом столбце была одной и той же;

б) сумма чисел в каждой строке была одной и той же.

37. Составьте из чисел, входящих в данные равенства, другие истинные равенства:

а) $4762 - 789 = 3973$;

б) $757 + 575 = 1332$.

38. Выполните вычитание:

а) $6097342 - 589423$;

б) $10078563 - 6346935$;

в) $6345002 - 4909335$;

г) $43040506 - 26305678$.

Проверьте вычитание сложением.

39. Исходя из определения 2 разности двух целых неотрицательных чисел, сформулируйте правила нахождения неизвестных компонентов операций сложения и вычитания.

40. Решите уравнения, используя зависимость между компонентами и результатом действия:

а) $(x + 25) + 70 = 220$;

г) $(x - 15) - 60 = 90$;

б) $(x + 15) - 60 = 90$;

д) $160 - (x + 15) = 90$;

в) $(x - 15) + 60 = 90$;

е) $160 - (x - 15) = 90$.

41. На рисунке 1 изображен граф отношения «равно» в множестве числовых выражений. Правильно ли построен граф? Сформулируйте свойства отношения «равно».

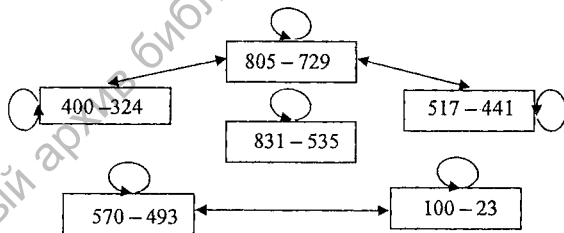


Рис. 1

42. Постройте граф отношения «меньше» на множестве числовых выражений: $76655 - 7766$; $53895 - 44996$; $1933 + 5398$; $67348 - 58349$; $100306 - 95472$; $999 + 6999$. Сформулируйте свойства отношения «меньше».

43. Решите задачи. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества, о которых говорится в задачах. Объясните решение, пользуясь теоретико-множественными понятиями.

а) Около дома 10 уток и кур. Уток 8. Сколько кур у дома?

б) На экскурсию поехало 15 учителей математики и 8 учителей физики. Из них 6 человек преподавали физику и математику. Сколько учителей поехало на экскурсию?

в) Юра поймал утром 8 окуней и 9 карасей. Сколько рыбок поймал Юра?

г) В лесуросло 19 осин. 4 осины спилили. Сколько осин осталось расти в лесу?

д) Миша нашел 37 белых грибов, а Коля на 18 грибов меньше, чем Миша. Сколько грибов нашел Коля?

е) Мне 8 лет. Я моложе мамы на 25 лет. Сколько лет маме?

44. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, б, в, г\}$. Найдите $A \times B$ и $B \times A$. Укажите истинное суждение: а) $A \times B = B \times A$; б) $m(A \times B) = m(B \times A)$.

45. Решите задачи. Объясните решения, пользуясь теоретико-множественными понятиями:

а) Сколько можно составить двузначных чисел, в которых единицы записаны одной из цифр 0, 1, 2, 3, 4, а десятки – цифрой 8 или 9?

б) Волшебник приказал кузнецу сделать для его двorca 9 замков и к каждому замку 3 ключа: медный, серебряный и золотой. Сколько ключей должен сделать кузнец?

в) Четверо ребят пришли в гости к дедушке. Каждому из них он разрешил сорвать по одному яблоку с восьми яблонь. Сколько яблок сорвали ребята?

46. Запишите сумму в виде произведения:

а) $42 + 42 + 42 + 42 + 42$;

б) $(12 + 28) + (12 + 28) + (12 + 28) + (12 + 28)$;

в) $a + a + a + a + a + a + a + a$;

г) $(a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b)$.

47. Запишите произведение в виде суммы:

а) $576 \cdot 5$;

г) $y \cdot 4$;

б) $1 \cdot 13$;

д) $(x + y) \cdot 3$;

в) $0 \cdot 8$;

е) $a \cdot 1$.

48. Между элементами множества $A = \{(2;1), (2;0), (0;2), (1;2), (5;2)\}$ и множества $B = \{0; 1; 2; 10\}$ задано соответствие: каждой паре $(a; b) \in A$ соответствует число $(a \cdot b) \in B$. Постройте граф этого соответствия. Является ли это соответствие отображением множества A в множество B ? Какое это отображение?

49. Приведите 2 доказательства дистрибутивности умножения относительно сложения, исходя из определений 1 и 2 произведения.

50. Вычислите удобным способом и дайте обоснование:

а) $25 \cdot 379 \cdot 4$;

д) $(125 \cdot 15) \cdot 32$;

б) $5 \cdot 42 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 25$;

е) $4 \cdot 125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 351$;

в) $(56 \cdot 25) \cdot 40$;

ж) $596 \cdot 32$.

г) $7 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 0$;

з) $2 \cdot 2 \cdot 126 \cdot 2 \cdot 5$.

51. Заполните таблицу (найдите произведение чисел верхней строки на числа левого столбца):

1	67	24	85	145
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

52. Пользуясь таблицей, найдите произведения:

а) $67 \cdot 56$;

г) $24 \cdot 125$;

ж) $145 \cdot 113$;

б) $67 \cdot 107$;

д) $85 \cdot 103$;

з) $145 \cdot 1001$;

в) $24 \cdot 93$;

е) $145 \cdot 34$;

и) $145 \cdot 2104$.

53. Какие из суждений истинны:

а) для любых двух целых неотрицательных чисел a и b число ab есть целое неотрицательное;

б) существуют целые неотрицательные числа a и b , произведение которых равно 0;

в) для любых двух целых неотрицательных чисел a и b произведение ab равно a ;

г) произведение любых двух натуральных чисел больше каждого из них.

54. Сравните значение выражений, используя свойства умножения:

а) $987 \cdot 58 \cdot 987 \cdot 57$;

б) $987 \cdot 58 \cdot 987 \cdot 50 + 37 \cdot 58$;

в) $987 \cdot 58 \cdot 988 \cdot 58$.

55. Вычислите устно: а) $35 \cdot 11$; б) $321 \cdot 11$; в) $48 \cdot 99$; г) $81 \cdot 101$.

56. Множество A , состоящее из 8 элементов, разбито на классы, в каждом из которых по 2 элемента. На сколько классов разбито множество A ?

57. Множество $A = \{a, b, c, d, p, l, m, n\}$ разбито на k попарно непересекающихся равномощных подмножеств. Сколько элементов в каждом подмножестве?

58. Укажите условия, при которых следующие равенства истинны:

1) $(a + b) : c = a : c + b : c$;

2) $(a - b) : c = a : c - b : c$;

3) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$;

$$4) (a \cdot b) : c = (b : c) \cdot a;$$

$$5) a : (b \cdot c) = (a : b) : c;$$

$$6) a : (b : c) = (a : c) : b;$$

$$7) a : (b : c) = (a \cdot c) : b;$$

$$8) a : (b : c) = (a : b) \cdot c;$$

$$9) (a : b) : c = (a : c) : b.$$

59. Дайте названия правилам, которые выражаются равенствами из предыдущего задания. Сформулируйте эти правила и докажите их.

60. Вычислите удобным способом:

$$а) (390 + 39) : 13;$$

$$з) (480 \cdot 360) : (80 \cdot 90);$$

$$б) (253 + 487) : 37;$$

$$и) (350 \cdot 420) : (60 \cdot 175);$$

$$в) 14883 : 123 + 108117 : 123;$$

$$к) 9600 : (25 \cdot 48);$$

$$г) (78 \cdot 137) : 39;$$

$$л) 4200 : (70 \cdot 4);$$

$$д) (138 \cdot 640) : 32;$$

$$м) 2700 : (9 \cdot 25);$$

$$е) (225 \cdot 5 \cdot 3) : 15;$$

$$н) 360 : (12 : 6);$$

$$ж) (440 \cdot 8) : 11;$$

$$с) (300 : 15) \cdot 5.$$

61. Найдите ошибку в «доказательстве»:

Равенство $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$ верное. В левой части вынесем за скобки общий множитель a , правую часть разложим на множители как разность квадратов. Получим равенство: $a(a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$. Разделим обе части равенства на одно и то же число $a - a$. Получим равенство $a = a + a$, то есть $a = 2a$. Если $a = 2$, то получаем $2 = 4$.

62. Верно ли решение уравнения:

$$5x^2 + 6x = 16x$$

$$5x + 6 = 16$$

$$x = 2?$$

Где ошибка?

63. Обоснуйте приемы устного деления:

$$а) (2 \cdot 163 \cdot 125 \cdot 4) : 25;$$

$$б) 64 : (32 : 8);$$

$$в) 777 : 37;$$

$$г) 156 : (13 \cdot 12).$$

64. Решите задачи и объясните в терминах теории множеств, почему задача а) решается умножением, а задачи б) и в) – делением.

а) Для засолки в 5 банок положили по 8 огурцов. Сколько огурцов было в этих банках?

б) В гараже стояло 20 машин, по 10 машин в каждом ряду. Во сколько рядов были поставлены машины?

в) На две стройки отправили 12 подъемных кранов, поровну на каждую. Сколько кранов отправили на каждую стройку?

65. Исходя из определения частного, сформулируйте правила нахождения неизвестных компонентов операций умножения и деления.

66. Решите уравнения на основании зависимости между компонентами и результатом действия:

- а) $(x \cdot 5) \cdot 8 = 400$; г) $(x \cdot 8) : 5 = 16$;
б) $(x \cdot 5) : 8 = 20$; д) $80 : (x \cdot 5) = 16$;
в) $(x : 5) \cdot 8 = 64$; е) $8 : (x : 5) = 4$.

67. Укажите число цифр в частном. Выполните деление. Сделайте проверку умножением:

- а) 735545 : 937; в) 8273262 : 534;
б) 2798784 : 576; г) 7294545 : 937.

68. Составьте выражения и найдите их значения:

- а) сумму 369 и 471 разделите на разность 872 и 837;
б) произведение чисел 38 и 48 разделите на сумму 39 и 37.

69. Выполните действия:

- а) $56407200 - (((27776320 : 4576 + 63980) \cdot 3080 - 215683940) \cdot 805) + 1100$;
б) $4877070 - (29651000 : 3725 + (28880100 - (10010 - 5920) \cdot 7060) : 100) \cdot 609$;
в) $2 - (280 + ((102010000 : 10000 - 9298) \cdot 1000 + 97080) : 1389) : 1000$;
г) $1001010 - (9989 + (399 + (408 \cdot 100000 - 39809901) : 99) : 1000) \times \times 100$;
д) $100102 - ((7801 + (333667 \cdot 30 - 7940910) : 900) : 100 + 98906) + 5$;
е) $1 + (100 + ((38574600 : 478 + 620280) \cdot 9005 - 6268280900) : 440 - -90200) : 10000$;
ж) $(27438582 + ((26550000 : 375 + 9290) \cdot 7080 - 80900 \cdot 7006) : 100) : 685 - 39980$;
з) $10 + (5677001070 - (70810 + (574601220 : 9465 + 2292) : 700) \times \times 80070) : (1000 - 577) + 10$;
и) $20 + ((487707200 - (467225620 : 7684 + 96) \cdot (10000 - 1993)) \cdot (5099 + + 3981) - 733862080) : 3944$;
к) $1000 - (705 \cdot (72544380 - (689602900 : 7658 - 9990) \cdot 905) - -63405400) : 1000$.

Ответы: 10000; 807; 1; 1010; 1100; 2; 80; 110; 200; 899.

70. Решите уравнение, используя правила нахождения неизвестных компонентов арифметических операций:

- а) $x \cdot 153 + 846 = 4671$; г) $14 \cdot x + 2543 = 8101$;
б) $(x - 18901) \cdot 43 = 24768$; д) $6 \cdot x + 12805 = 82405$;
в) $(1003 - x) \cdot 80 = 52000$; е) $8111 - 36 \cdot x = 7895$.

71. Укажите неполное частное и остаток:

- а) 25 : 38; в) 189 : 19;
б) 2401 : 12; г) 165245 : 876.

72. Найдите число, при делении которого на 15421 получается неполное частное 246 и остаток 6273.

73. По делимому a и остатку r найдите неполное частное q и делитель b , если:

а) $a = 100; r = b;$

г) $a = 35; r = 11;$

б) $a = 148; r = 37;$

д) $a = 199; r = 12;$

в) $a = 497; r = 16;$

е) $a = 157; r = 19.$

74. Число 653 при делении на b дало в частном 31 и некоторый остаток r . Найти числа b и r .

75. По делимому a и неполному частному q найдите делитель b и остаток r , если:

а) $a = 371; q = 14;$

в) $a = 13127; q = 121;$

б) $a = 3129; q = 37;$

г) $a = 42157; q = 231.$

76. Найти наибольшее число, дающее при делении с остатком на 15 неполное частное 16.

77. Определите, образует ли группу множество целых неотрицательных чисел относительно: а) сложения; б) умножения.

78. Есть ли нейтральные элементы относительно операций деления и вычитания? Ответ обоснуйте.

79. Укажите истинные суждения:

а) $\forall a, b \in N(a : b = b : a \equiv a = b)$ – некоммутативность деления;

б) $\exists a, b, c \in N((a : b) : c \neq a : (b : c))$ – неассоциативность деления;

в) $\exists a, b \in N(a : b = b : a \equiv a = b)$ – некоммутативность деления;

г) $\forall a, b, c \in N((a : b) : c \neq a : (b : c))$ – неассоциативность деления.

Тема 2. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел

2.1. Аксиоматический метод построения теории. Аксиомы Пеано

Аксиоматический метод построения теории состоит в следующем:

1. Выделяются некоторые исходные (неопределяемые) понятия, отношения теории.

2. Формулируются некоторые исходные суждения – *аксиомы*, которые неявно определяют исходные понятия (их истина принимается без доказательства).

Все остальные понятия этой теории определяются через исходные, все остальные предложения (*теоремы*) выводятся из аксиом.

Возьмем неопределяемое исходное понятие «целое неотрицательное число», исходное бинарное отношение «число y непосредственно следует за числом x » ($y = x'$).

Тогда множество, элементами которого являются целые неотрицательные числа (среди них имеется *начальный* элемент 0 (нуль) и в котором задано отношение «непосредственно следовать за» ($y = x'$), назовем множеством целых неотрицательных чисел. Обозначим его N_0 .

Множество N_0 с выделенным начальным элементом 0 и заданным бинарным отношением $y = x'$ характеризуется **аксиомами Пеано**:

А 1. Число ноль непосредственно не следует ни за каким целым неотрицательным числом:

$$\neg (\exists x \in N_0) (x' = 0) \text{ или } \forall x \in N_0 (x' \neq 0).$$

А 2. Для любого целого неотрицательного числа существует только одно целое неотрицательное число, непосредственно следующее за ним:

$$\forall x, y \in N_0 (x = y \supset x' = y').$$

А 3. Любое целое неотрицательное число следует не более чем за одним целым неотрицательным числом:

$$\forall x, y \in N_0 (x' = y' \supset x = y).$$

А 4. Аксиома индукции.

Формулировка на языке множеств: Если подмножество A множества N_0 содержит 0 и вместе с каждым элементом x содержит и элемент x' , непосредственно следующий за ним, то A совпадает с N_0 :

$$A \subseteq N_0 \wedge 0 \in A \wedge \forall x (x \in A \supset x' \in A) \supset A = N_0.$$

Формулировка на языке свойств: Если число 0 обладает свойством P и для любого целого неотрицательного числа x из того, что число x обладает свойством P , следует, что и x' обладает свойством P , то свойством P обладают все целые неотрицательные числа:

$$P(0) \wedge \forall x (P(x) \supset P(x')) \supset \forall y P(y).$$

Аксиомы А 1—А 4 характеризуют структуру множества N_0 только с точки зрения отношения «непосредственно следовать за». Элементы множества N_0 — целые неотрицательные числа — обозначим цифрами:

$$0 = 0, 0' = 1, 0'' = 2, 0''' = 3 \text{ и т. д.}$$

$$\text{Тогда } N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Множество $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество **натуральных чисел**. Здесь роль выделенного начального элемента играет 1 (единица).

Пример 8. Отношение « y следует за x » задано на множестве стрелкой (см. рис. 2). Удовлетворяет ли это множество аксиомам Пеано? Какое условие нарушено?

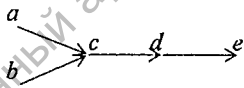


Рис. 2

Решение. На рисунке 2 изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 4, но элемент c непосредственно следует как за элементом a , так и за элементом b . Таким образом, аксиома 3 не выполняется.

Задания

80. Пусть множество $K = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$, множество $P = \{0, 00, 000, 0000, \dots\}$. Удовлетворяют ли множества K и P аксиомам Пеано? Как определено здесь отношение « y следует за x »?

81. Отношение «у следует за х» задано на некотором множестве стрелкой (см. рис. 3). Удовлетворяет ли каждое из этих множеств аксиомам Пеано? Какое условие нарушено?

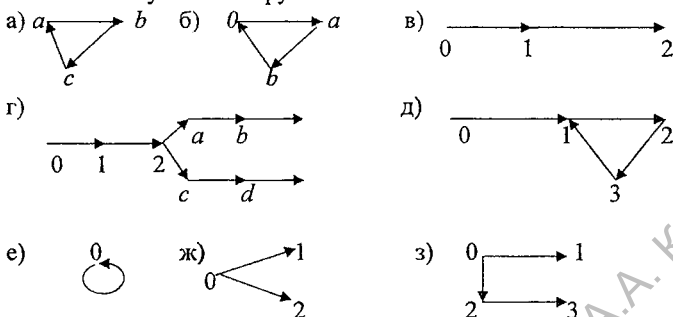
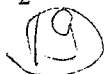
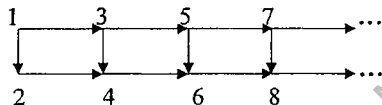


Рис. 3

82. Удовлетворяет ли аксиомам Пеано множество чисел $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, если отношение следования в нем задано так:



2.2. Метод математической индукции

Аксиома индукции служит формальной основой метода доказательства, который называется **методом математической индукции**. Схема доказательства методом математической индукции такова:

Пусть надо доказать истинность предложения $P(x)$ для всех целых неотрицательных чисел.

- 1) **Проверяем** истинность $P(0)$ (или $P(1)$);
- 2) **Предполагаем** истинность предположения $P(x)$ для произвольного числа k , т.е. $P(k)$ истинно;
- 3) **Доказываем** истинность $P(k')$, учитывая предположение 2;
- 4) **Делаем вывод** на основании аксиомы индукции и п.п. 1–3, что предложение $P(x)$ верно для любого целого неотрицательного числа (натурального числа).

Пример 9. Доказать, что для всех натуральных чисел n выполняется равенство: $P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. 1) **Проверяем** истинность равенства для $n = 1$, т.е.

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}; 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}; 1 = 1. P(1) - \text{истинно.}$$

2) **Предполагаем** истинность этого равенства для $n = k$.

$$P(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} - \text{истинно.}$$

3) **Доказываем** истинность равенства для $n = k'$, т. е. $P(k')$, на основании того, что $P(k)$ истинно.

$$\text{Пусть } P(k'): 1 + 2 + 3 + \dots + k + k' = \frac{k'(k'+1)}{2}.$$

Так как $k' = k + 1$, то получаем:

$$P(k'): 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

$$\begin{aligned} P(k'): \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{по п. 2}) \end{aligned}$$

Мы доказали истинность равенства $P(k')$, используя при этом истинность равенства $P(k)$.

4) На основании аксиомы индукции и п.п. 1–3 **делаем вывод**, что данное равенство истинно для всех натуральных чисел.

Задания

83. Пользуясь методом полной индукции (перебрав все случаи), докажите, что: а) каждое четное натуральное число, большее 2, но меньшее 40, можно представить в виде суммы двух простых чисел; б) квадрат любого натурального числа не оканчивается цифрой 7.

84. Справедливо ли утверждение « $n^2 + n + 17$ – простое число» при любом натуральном n ? Проверьте при $n = 1, 2, 3, \dots, 15, 16$.

85. Запишите k -й, $(k + 1)$ -й элементы последовательности, которая задана формулой ее n -ого члена:

- а) $n(n+1)$; б) $n(n+1)(n+2)$; в) n^2 ; г) $n^2(n+1)^2$; д) 2^{n-1} ; е) $n^3 + 5n$;
ж) $7^n + 3n + 1$; з) $n(2n-1)(2n+1)$.

86. Докажите методом математической индукции следующие равенства:

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

в) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

г) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

д) $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

е) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$;

$$\text{ж)} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1};$$

$$\text{з)} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2;$$

$$\text{и)} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{2n+1};$$

$$\text{к)} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1};$$

$$\text{л)} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1};$$

$$\text{м)} \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)} = \frac{n}{7n+1};$$

$$\text{н)} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\text{о)} -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n \cdot (2n-1) = (-1)^n \cdot n.$$

87. Докажите следующие неравенства методом математической индукции:

а) $2^n > n$;

б) $2^n > 2n + 1$, если $n \geq 3$;

в) если $a < b$, то $a^n < b^n$.

88. Найдите множество натуральных решений неравенства:

а) $2^n > n^2$;

б) $2^n > n^3$.

89. Докажите, пользуясь методом математической индукции, что при любом натуральном n : а) $n^3 + 11n$ делится на 6; б) $7^n - 1$ кратно 6.

90. Докажите, что n различных точек, лежащих на прямой, делят ее на $n + 1$ интервалов (из которых 2 интервала бесконечны).

91. Докажите, что число диагоналей любого выпуклого n -угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

92. Докажите, что сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $2d(n-2)$.

2.3. Сложение и умножение целых неотрицательных чисел

Определение. Знак «+» обозначает отображение $N_0^2 \rightarrow N_0$, сопоставляющее с каждой парой целых неотрицательных чисел (x, y) целое неотрицательное число, которое называется суммой чисел x и y , обозначается $x + y$ и удовлетворяет двум аксиомам:

А 5. $\forall x (x + 0 = x)$ – Сумма любого целого неотрицательного числа и нуля равна самому этому числу.

А 6. $\forall x, y (x + y' = (x + y)')$ – Сумма любого целого неотрицательного числа x и числа, которое следует за любым целым неотрицательным числом y , равна числу $(x + y)'$, которое следует за суммой $x + y$.

Определение. Знак « $\cdot$ » обозначает отображение $N_0^2 \rightarrow N_0$, сопоставляющее с каждой парой $(x; y)$ целых неотрицательных чисел целое неотрицательное число, которое называется произведением чисел x и y , обозначается $x \cdot y$ и удовлетворяет следующим двум аксиомам:

А 7. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$ – Произведение любого целого неотрицательного числа и нуля равно нулю.

А 8. $\forall x, y (x \cdot y' = xy + x)$ – Произведение любого целого неотрицательного числа x и числа, которое следует за любым целым неотрицательным числом y , равно сумме произведения чисел x и y и числа x .

Свойства операций сложения и умножения целых неотрицательных чисел:

$$1. \forall x \in N_0 (x' = x + 1).$$

$$2. \forall x, y \in N_0 (x' + y = (x + y)').$$

3. Существует только одно отображение $N_0^2 \rightarrow N_0$, которое удовлетворяет аксиомам сложения **А 5** и **А 6**.

$$4. \forall x \in N_0 (0 + x = x).$$

$$5. \forall x, y \in N_0 (x + y = y + x).$$

$$6. \forall x, y, z \in N_0 ((x + y) + z = x + (y + z)).$$

$$7. \forall x, y, z \in N_0 (x = y \supset x + z = y + z).$$

$$8. \forall x, y \in N_0 (x' y = xy + y).$$

9. Существует только одно отображение типа $N_0^2 \rightarrow N_0$, которое удовлетворяет **А 7** и **А 8**.

$$10. \forall x \in N_0 (0 \cdot x = 0).$$

$$11. \forall x \in N_0 (x \cdot 1 = x).$$

$$12. \forall x, y \in N_0 (x y = y x).$$

$$13. \forall x, y, z \in N_0 (x (y + z) = xy + xz).$$

$$14. \forall x, y, z \in N_0 ((x y) z = x (y z)).$$

$$15. \forall x, y, z \in N_0 (x = y \supset x z = y z).$$

Любое из этих свойств можно доказать, используя аксиомы **А 1**—**А 8** или ранее доказанные утверждения.

Пример 10. Доказать свойство сложения 7.

Решение. Надо доказать, что $\forall x, y, z \in N_0 (x = y \supset x + z = y + z)$.

Индукцию проведем по z . Пусть $P(z): x = y \supset x + z = y + z$.

1). **Проверяем** истинность утверждения для $z = 0$, т. е.

$$P(0): x = y \supset x + 0 = y + 0.$$

Согласно **А 5**, $x + 0 = x$ и $y + 0 = y$. Следовательно, утверждение $P(0)$ истинно.

2). **Предполагаем**, что предложение $P(k): x = y \supset x + k = y + k$ — истинно.

3). **Докажем** на основании п. 2, что истинно предложение

$$P(k'): x = y \supset x + k' = y + k'.$$

По предположению п. 2 имеем: $x = y \supset x + k = y + k$ — истинно

$$\begin{aligned} & \Downarrow (\text{по } A_2) \\ (x + k)' &= (y + k)' \\ & \Downarrow A_6 \quad \Downarrow \quad \Downarrow A_6 \\ x + k' &= y + k'. \end{aligned}$$

Получили, что $P(k): x = y \supset x + k' = y + k'$ — истинно.

4). **Делаем вывод**, что по аксиоме индукции и п.п. 1–3 утверждение $P(z)$ истинно для любого $z \in N_0$.

Так как x и y мы брали произвольные, то

$$\forall x, y, z \in N_0 (x = y \supset x + z = y + z).$$

Сумма любых двух однозначных чисел записывается в таблицу, которая называется **таблицей сложения**. Таблица сложения составляется на основании аксиом A_5 и A_6 . Например:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0; \\ 0 + 1 &= 0 + 0' = (0 + 0)' = 0' = 1; \\ 1 + 0 &= 1; \\ 1 + 1 &= 1 + 0' = (1 + 0)' = 2; \\ 1 + 2 &= 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3; \end{aligned}$$

Произведение однозначного числа на однозначное записывается в таблицу, которая называется **таблицей умножения**. Таблица умножения составляется на основании аксиом A_7 , A_8 и таблицы сложения:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \cdot 0' = 1 \cdot 0 + 1 = 1; \\ 1 \cdot 2 &= 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

✓ **Пример 11.** Вычислить произведение $4 \cdot 3$, исходя из аксиоматического подхода к построению множества целых неотрицательных чисел. Записать аксиомы, определения, свойства, которые при этом использовались.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 4 \cdot 3 &\stackrel{1}{=} 4 \cdot 2' \stackrel{A_8}{=} 4 \cdot 2 + 4 \stackrel{1}{=} 4 \cdot 1' + 4 \stackrel{A_8}{=} (4 \cdot 1 + 4) + 4 \stackrel{1}{=} \\ &= (4 \cdot 0' + 4) + 4 \stackrel{A_8}{=} ((4 \cdot 0 + 4) + 4) + 4 \stackrel{A_7}{=} ((0 + 4) + 4) + 4 \stackrel{3}{=} 12; \\ 4 \cdot 3 &= 12. \end{aligned}$$

При вычислениях использованы:

- 1) запись целых неотрицательных чисел: $0' = 1, 1' = 2, 2' = 3, \dots$;
- 2) аксиомы умножения: $A_7: \forall x (x \cdot 0 = 0); A_8: \forall x, y (x \cdot y' = x \cdot y + x)$;
- 3) таблица сложения.

Задания

93. Докажите методом математической индукции свойство 1, исходя из аксиом A_3 , A_5 и A_6 .

94. Докажите методом математической индукции свойства 2, 4, 5, 6, исходя из аксиом A_5 и A_6 .

95. Докажите методом математической индукции свойства 10–14, исходя из аксиом А 7 и А 8.

96. Запишите и докажите методом математической индукции свойство сложения, обратное свойству 7.

97. Запишите и докажите методом математической индукции свойство сложения, обратное свойству 15.

98. Составьте таблицу сложения на 5.

99. Составьте таблицу умножения на 5.

100. Вычислите сумму $7 + 5$:

а) опираясь на аксиомы сложения и таблицу сложения на 3;

б) опираясь только на аксиомы сложения.

101. Вычислите произведение $6 \cdot 6$:

а) опираясь на аксиомы умножения и таблицу умножения на 3;

б) опираясь на аксиомы умножения и знание таблиц сложения.

102. Сформулируйте аксиомы Пеано для множества натуральных чисел. Какие из аксиом будут сформулированы иначе, чем во множестве целых неотрицательных чисел?

Тема 3. Системы счисления

3.1. Позиционные и непозиционные системы счисления.

Запись чисел в позиционных системах счисления

Определение. Системой счисления называется язык для наименования, записи чисел и выполнения операций над ними.

Все системы счисления делятся на **позиционные** и **непозиционные**.

В **непозиционной** системе счисления каждый знак обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа.

В **позиционной** системе счисления числовое значение каждой цифры в записи числа зависит от ее места (позиции) в записи числа.

Примером непозиционной является **римская** система счисления. В этой системе счисления для записи чисел используются следующие знаки: I, V, X, L, C, D, M, которым соответствуют числа: 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000. Записи всех остальных чисел получаются из основных при помощи двух арифметических действий: сложения и вычитания.

Наибольшее распространение среди позиционных систем счисления получила **десятичная**, связанная со счетом на пальцах. Основанием этой системы счисления является число 10. Ее алфавит состоит из 10 знаков (цифр): $A_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Определение. Десятичной записью натурального числа n называется представление его в виде суммы степеней числа 10:

$$n = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \text{ где } 0 \leq a_i \leq 9 \text{ и } a_n \neq 0.$$

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ принято записывать коротко $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.

Основанием системы счисления может быть любое натуральное число $p > 1$. Тогда система счисления называется *p-ичной* (двоичной, троичной, восьмеричной и т.д.).

Определение. Записью натурального числа n в *p-ичной* системе счисления называется представление его в виде суммы степеней числа p :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_p, \text{ где } 0 \leq a_i \leq p-1 \text{ и } a_n \neq 0.$$

Алгоритм 1. Для перехода от записи числа n в *p-ичной* системе счисления к *десятичной* записи этого числа достаточно число n представить в виде суммы степеней числа p и вычислить эту сумму по правилам, принятым в десятичной системе.

Алгоритм 2. Для перехода от записи числа n в *p-ичной* системе счисления к *десятичной* записи этого числа:

- 1) умножим первую цифру в *p-ичной* записи числа на основание системы счисления p ;
- 2) к полученному произведению прибавим вторую цифру *p-ичной* записи числа;
- 3) полученную сумму вновь умножим на основание системы счисления p ;
- 4) операции умножения и сложения выполняем до тех пор, пока не будет прибавлена последняя цифра *p-ичной* записи числа n .

Алгоритм 3. Для перехода от *десятичной* записи числа n к записи этого числа в *p-ичной* системе счисления:

- 1) разделим с остатком число n на p (основание новой системы счисления) по правилам деления, принятым в десятичной системе счисления. Полученный остаток – последняя цифра в записи числа n в *p-ичной* системе счисления;
- 2) полученное неполное частное вновь разделим с остатком на p . Полученный остаток – предпоследняя цифра в записи числа n в *p-ичной* системе счисления;
- 3) процесс деления неполных частных на p продолжаем до тех пор, пока на получим частное, равное 0;
- 4) выписываем остатки от последнего к первому и получаем запись числа в *p-ичной* системе счисления.

Чтобы перейти от записи числа в *p-ичной* системе счисления к записи его в *k-ичной* системе, надо сначала перейти от *p-ичной* записи к *десятичной*, потом от *десятичной* записи к *k-ичной*.

В практике работы ЭВМ важную роль играет перевод из двоичной системы счисления в восьмеричную и обратно. Каждая цифра восьмеричной системы счисления заменяется двоичной *триадой*:

В восьмеричной	0	1	2	3	4	5	6	7
В двоичной	000	001	010	011	100	101	110	111

Пример 11. Запишите арабскими цифрами следующие числа: DCXXIII; MXCIV.

Решение. $DCXXIII = 500 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 623$;

$MXCIV = 1000 + (100 - 10) + (5 - 1) = 1094$.

Пример 12. Запишите римскими цифрами следующие числа: 37; 1990.

Решение. $37 = 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = XXXVII$;

$1990 = 1000 + (1000 - 10) = MXM$.

Пример 13. Запишите следующие числа в виде суммы степеней основания системы счисления (развернутая запись числа): 45648, 257011₈.

Решение. $45648 = 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$.

$257011_8 = 2 \cdot 8^5 + 5 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8 + 1$.

Пример 14. Запишите число 45123₆ в десятичной системе счисления.

Решение. Переход к шестеричной записи числа можно осуществить, используя алгоритмы 1 или 2.

1) $4512_6 = 4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 2 = 864 + 180 + 6 + 2 = 6315_{10}$

2) По алгоритму 2 выполним умножение (в столбик) и сложение (в строчку):

$\times 4512_6$

$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 24 + 5 = \end{array} \times 29$

$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 174 + 1 = \end{array} \times 175$

$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 1050 + 2 = \end{array} \times 1052$

$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 6312 + 3 = 6315_{10} \end{array}$

$4512_6 = 6315_{10}$

Пример 15. Запишите 1241 в пятеричной системе счисления.

Решение. Выполним деление данного числа на 5 с остатком:

$1241 : 5 = 248 \text{ (ост. 1)}$

$248 : 5 = 49 \text{ (ост. 3)}$

$49 : 5 = 9 \text{ (ост. 4)}$

$9 : 5 = 1 \text{ (ост. 4)}$

$1 : 5 = 0 \text{ (ост. 1)}$

Запишем остатки от последнего к первому, получим:

$1241_{10} = 14431_5$

Последовательное деление проще выполнять и записывать в виде последовательного деления углом:

$$\begin{array}{r}
 1241 \overline{) 5} \\
 \underline{10} \\
 24 \\
 \underline{20} \\
 41 \\
 \underline{40} \\
 1
 \end{array}$$

Значит, $1241_{10} = 14431_5$

Пример 16. В десятичной системе счисления число записано в виде 26. В какой системе счисления оно запишется в виде 101?

Решение. По условию примера можно составить уравнение:

$$101_x = 26,$$

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 26;$$

$$x^2 + 1 = 26;$$

$$x^2 = 25;$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5.$$

$x = -5$ условию задачи не удовлетворяет.

$$101_5 = 26.$$

Ответ: в пятеричной системе счисления.

Задания

103. Прочитайте и запишите арабскими цифрами следующие числа: IV, VI, VII, IX, XI, XIV, XXI, XXIV, XXXVIII, XLIV, LIX, LXXVII, XCIX, CIV, CX, CCII, CCXX, CDI, CDVI, DXC, CMVC, CMVI, MCCXIX, MCDI, MCMIL, MCMLI.

104. Запишите римскими цифрами следующие числа: 6, 9, 12, 17, 29, 39, 46, 58, 89, 96, 109, 194, 306, 406, 499, 506, 790, 860, 909, 1002, 1020, 1200, 1708, 1904, 1917, 1941, 1958, 2004, 1040, 2090.

105. Определите, к каким векам относятся следующие годы: 174, 208, 460, 832, 948, 1020, 1248, 1404, 1635, 1854, 1903, 1957, 2000.

106. Ниже записаны неверные равенства, выложенные с помощью спичек. Как можно получить из них верные равенства, если разрешается переложить с одного места на другое только одну спичку?

$$VII - V = XI$$

$$IX - V = VI$$

$$VI - IX = III$$

$$VIII - III = X$$

107. Сколько в десятичной системе счисления

а) однозначных чисел;

б) двузначных чисел;

в) трехзначных чисел?

108. Перечислите по порядку основные названия натуральных чисел, с помощью которых можно назвать любое натуральное число до миллиона включительно.

109. Напишите цифрами число:

а) десять тысяч десять;

б) триста две тысячи пятьсот восемь.

110. Прочитайте числа: 40083601; 2002002; 635001.

111. Сколько натуральных чисел между числами 5 и 20; 2 и 96; 100 и 1000?

112. Выпишите последовательно все натуральные числа от 1 до 50. Сколько выписано десятков? Сколько раз написана цифра 3?

113. В книге 145 страниц. Сколько потребуется литер, чтобы пронумеровать все страницы? (На каждой литере 1 цифра, литера используется 1 раз).

114. В книге 300 страниц. Сколько потребуется литер, чтобы пронумеровать все страницы?

115. Сколько страниц в книге, если для перенумерации ее страниц потребовалось 657 литер? 2529 литер?

116. Сколько единиц содержит наибольшее однозначное число:

а) в 5-ичной системе счисления;

б) в 3-ичной системе счисления;

в) в 12-ичной системе счисления?

117. Сколько надо взять:

1) единиц первого разряда, чтобы получить 1 единицу второго разряда в семеричной системе счисления;

2) единиц третьего разряда, чтобы получить 1 единицу четвертого разряда в четверичной системе счисления?

118. Запишите числа 5768 , 3975643 , 245_6 , 1372_8 , 11001_2 в виде суммы степеней основания системы счисления.

119. Какие числа записаны в пятеричной системе счисления следующим образом:

а) $3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2$; в) $5^7 + 5^6 + 5^5 + 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5$;

б) $4 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^2 + 2$; г) $2 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^2 + 4$;

120. Запишите числа:

а) 3 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 в троичной системе счисления;

б) 5 ; 5^2 ; 5^3 ; 5^4 в пятеричной системе счисления.

121. Напишите первые 20 чисел натурального ряда:

а) в двоичной системе счисления;

б) в восьмеричной системе счисления;

в) в пятеричной системе счисления;

г) в двенадцатеричной системе счисления.

Указание. Для записи чисел в системе счисления с основанием 12 нужно 12 цифр. Поэтому, кроме обычных цифр от 0 до 9, возьмите еще цифры α (10) и β (11).

122. Какие числа записаны правильно, а какие нет: а) 3114_5 , б) 3115_5 ; в) 121211_2 ; г) 12101_3 ; д) 3756_8 ; е) 11911_9 ?
123. Запишите в десятичной системе счисления: а) 537_8 ; б) 1111_2 ; в) 6421_8 ; г) $32\ 134_5$; д) 40203_5 ; е) 3010_6 ; ж) 1010101_2 ; з) $\alpha\ 481_{12}$ ($\alpha = 10$, $\beta = 11$).
124. Запишите число 35921 :
а) в двоичной системе счисления;
б) в 6-ичной системе счисления;
в) в 8-ичной системе счисления;
г) в 12-ичной системе счисления.
125. Запишите числа:
а) 70532_8 и 160345_8 в двоичной системе счисления;
б) 100111010_2 и 1100010101110_2 в восьмеричной системе счисления.
126. Сколько единиц содержит: а) наибольшее двузначное число в семеричной системе счисления; б) наименьшее трехзначное число в шестеричной системе счисления; в) наибольшее пятизначное число в пятеричной системе счисления?
127. Какое из чисел больше:
а) 3 или 3_8 ;
б) 14_5 или 14_8 ;
в) 111_2 или 111_8 ;
г) 157_9 или 1101011_2 ?
128. Что больше:
а) единица III разряда 5-ричной системы счисления или единица IV разряда 4-ричной системы счисления;
б) 2 единицы III разряда 8-ричной системы счисления или 2 единицы VI разряда троичной системы счисления?
129. В десятичной системе счисления число записывается в виде 33. В какой системе оно запишется в виде: а) 53; б) 45; в) 201; г) 36?
130. Запишите число 784_9 в пятеричной системе счисления; 1125_6 в восьмеричной системе счисления.
131. Укажите, какие из следующих равенств являются истинными:
а) $4_{10} = 4_5$; г) $10 = 20_5$;
б) $4_{10} = 4_3$; д) $10 = 15_5$;
в) $4_{10} = 10_4$; е) $8_{10} = 22_3$.
132. В какой системе счисления истинны равенства:
а) $63_x = 45$; в) $87 = 106_x$;
б) $70 = 154_x$; г) $23_x = 12$?
133. В каких системах счисления возможны равенства:
а) $14 + 12 = 30$; д) $54 - 38 = 17$;
б) $3 + 4 = 10$; е) $5 \cdot 3 = 23$;
в) $15 + 16 = 33$; ж) $2 \cdot 3 = 12$;
г) $236 - 145 = 61$; з) $4 \cdot 4 = 31$?

134. Найдите основание системы счисления:

а) $122_x + 201_x = 36$;

в) $31_x \cdot 22_x = 130$;

б) $212_x - 101_x = 13$;

г) $43_x : 13_x = 3$.

135. В какой системе счисления число 46 изобразится теми же цифрами, но в обратном порядке?

136. Найдите в десятичной системе счисления двузначное число, которое будучи записано в семеричной системе счисления, дает число, записанное теми же цифрами, что и искомое число, но в обратном порядке.

137. Найдите двузначное число, которое в 10-ичной и 4-ичной системах счисления записывается одними и теми же цифрами, но в обратном порядке.

138. Докажите, что число 1331 является кубом натурального числа в любой системе счисления с основанием, большим, чем 3.

139. Докажите, что число 144 является квадратом натурального числа в любой системе счисления с основанием, большим, чем 4.

140. Сумма цифр двузначного числа, записанного в десятичной системе счисления, равна 7. Если к каждой цифре прибавить 2, то получится число, которое на 3 меньше удвоенного первоначального числа. Найдите это число.

141. Трехзначное число уменьшается на 99, если его цифры записать в обратном порядке. Сумма цифр числа равна 14, средняя цифра равна сумме остальных цифр. Найдите трехзначное число.

142. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найдите все такие числа.

3.2. Операции над числами в позиционных системах счисления

Операции над целыми неотрицательными числами в недесятичных позиционных системах счисления выполняются по правилам, аналогичным принятым в десятичной системе счисления. Надо только знать таблицы сложения и умножения однозначных чисел в соответствующих системах счисления. (Эти же таблицы используются и при вычитании и делении).

Однако не всегда будут даны таблицы сложения или умножения в r -ичных системах счисления. В этом случае рассуждают, используя таблицы в десятичной системе счисления, затем полученные числа устно переводят в указанную в задании систему, и результат записывают в недесятичной системе счисления.

Пример 17. Составьте таблицы сложения и умножения в пятеричной системе счисления.

Решение. Алфавит пятеричной системы счисления состоит из цифр 0, 1, 2, 3, 4. Сначала составим таблицы сложения и умножения, записывая результаты в десятичной системе счисления:

+	1	2	3	4
0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	12
4	0	4	8	12	16

Переведем все числа в пятеричную систему счисления

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Пример 18. Пользуясь таблицей сложения, вычислите $432_5 + 331_5$.

Решение.

$$\begin{array}{r}
 + 432_5 \\
 331_5 \\
 \hline
 1313_5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2 + 1 = 3 \\
 3 + 3 = 11 \text{ (1 пишем, 1 запоминаем)} \\
 4 + 3 + 1 = 4 + 4 = 13
 \end{array}$$

Сумма равна 1313_5 .

Пример 19. Не пользуясь таблицей сложения, вычислите $543_6 + 442_6$.

Решение.

$$\begin{array}{r}
 + 543_6 \\
 442_6 \\
 \hline
 1425_6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3 + 2 = 5 \\
 4 + 4 = 8_{10} = 1 \cdot 6 + 2 = 12_6 \text{ (2 пишем, 1 запоминаем)} \\
 5 + 4 + 1 = 10_{10} = 1 \cdot 6 + 4 = 14_6 \text{ (2 пишем, 1 запоминаем)}
 \end{array}$$

ем)

Сумма равна 1425_6 .

Пример 20. Выполните действия: а) $751_8 - 174_8$; б) $423_6 \cdot 53_6$;

в) $751_8 : 3_8$.

Решение.

а) ...

$$\begin{array}{r}
 751_8 \\
 - 174_8 \\
 \hline
 555_8
 \end{array}$$

От 1 отнять 4 нельзя, берем 1 единицу во II разряде $10_8 = 8_{10}$
 $(8+1) - 4 = 5$

Во II разряде было 5, осталось 4. От 4 отнять 7 нельзя,
берем 1 единицу в III разряде
 $(8+4) - 7 = 5$

$$6 - 1 = 5$$

Разность равна 555_8 .

$$\begin{array}{r}
 6) \times 423_6 \\
 \underline{53_6} \\
 + 2113 \\
 \underline{3403} \\
 41143_6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 6 + 3 = 13_6 \text{ (3 пишем, 1 запоминаем)} \\
 2 \cdot 3 + 1 = 7 = 1 \cdot 6 + 1 = 11_6 \text{ (1 пишем, 1 запоминаем)} \\
 4 \cdot 3 + 1 = 13 = 2 \cdot 6 + 1 = 21_6 \\
 \text{Получили первое неполное произведение } 2113_6 \\
 3 \cdot 5 = 15 = 2 \cdot 6 + 3 = 23_6 \text{ (3 пишем, 2 запоминаем)} \\
 2 \cdot 5 + 2 = 12 = 2 \cdot 6 + 0 = 20_6 \text{ (0 пишем, 2 запоминаем)} \\
 4 \cdot 5 + 2 = 22 = 3 \cdot 6 + 4 = 34_6
 \end{array}$$

Получили второе неполное произведение 3403_6

Складываем неполные произведения в 6-ричной системе счисления.

Произведение равно 41143_6 .

в) *Первый способ.* Составим таблицу умножения на 3 в 8-ричной системе счисления: $1 \cdot 3 = 3$; $2 \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 3 = 9 = 11_8$; $4 \cdot 3 = 12 = 14_8$; $5 \cdot 3 = 15 = 17_8$; $6 \cdot 3 = 18 = 22_8$; $7 \cdot 3 = 21 = 25_8$.

Образует неполное делимое. Записав неполное делимое, находим в составленной таблице самое близкое к нему (но меньшее его) произведение. Делим. Произведение вычитаем из неполного делимого в 8-ричной системе счисления и т.д.

$$\begin{array}{r}
 \underline{501_8} \overline{) 3} \\
 \underline{3} \overline{) 153_8} \\
 \underline{20} \\
 \underline{17} \\
 \underline{11} \\
 \underline{11} \\
 0
 \end{array}$$

Например, второе неполное делимое 20_8 . В таблице $3 \cdot 5 = 17_8$. В частном пишем 5. Вычитаем $20_8 - 17_8 = 3$.

б) *Второй способ.* Будем рассуждения вести в десятичной системе счисления.

$$\begin{array}{r}
 \underline{501_8} \overline{) 3} \\
 \underline{20} \overline{) 153_8} \\
 \underline{11} \\
 0
 \end{array}$$

Первое неполное делимое 5.

Делим с остатком в десятичной системе счисления. $5 : 3 = 1$ (ост. 2) (1 пишем в частном, 2 под чертой под первым неполным делимым).

Второе неполное делимое $20_8 = 16_{10}$.

Делим с остатком в десятичной системе счисления. $16 : 3 = 5$ (ост. 1) (5 пишем в частном, 1 под чертой под вторым неполным делимым).

Третье неполное делимое $11_8 = 9_{10}$.

Делим с остатком в десятичной системе счисления. $9 : 3 = 3$ (3 пишем в частном, 0 под чертой под третьим неполным делимым).

Частное равно 153_8 .

Пример 21. Вычислите значение выражения в указанной системе счисления. Сделайте проверку, выполнив вычисления в десятичной системе счисления: $(2145_6 - 1255_6) \cdot 13_6$.

Решение. 1. Выполним действия в 6-ой системе счисления:

$$\begin{array}{r} 1) \quad - 2145_6 \\ \quad \underline{1255_6} \\ \quad \quad 450_6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2) \quad \times 450_6 \\ \quad \quad \underline{13_6} \\ \quad \quad + 223 \\ \quad \quad \underline{45} \\ \quad 11130_6 \end{array}$$

2) Перейдем к записи чисел 2145_6 , 1255_6 , 13_6 в десятичной системе счисления и выполним действия:

$$2145_6 = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 5 = 432 + 36 + 29 = 497;$$

$$1255_6 = 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 5 = 216 + 72 + 35 = 323;$$

$$13_6 = 1 \cdot 6 + 3 = 9.$$

$$\text{Получаем выражение: } (497 - 323) \cdot 9 = 174 \cdot 9 = 1566.$$

3) Сравним полученные результаты 11130_6 и 1566 . Для этого можно число 11130_6 перевести в десятичную систему счисления или число 1566 – в шестеричную систему счисления. Сделаем второе: будем выполнять последовательное деление на 6 и выделять остатки:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} \overline{)1566} \\ \underline{-12} \\ 36 \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{)261} \\ \underline{-24} \\ 21 \\ \underline{-18} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{)43} \\ \underline{-42} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{)7} \\ \underline{-6} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{)6} \\ \underline{-1} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{)6} \\ \underline{-0} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

←

Записываем остатки в обратном порядке и получаем: $1566 = 11130_6$.
Таким образом, $(2145_6 - 1255_6) \cdot 13_6 = 11130_6$.

Задания

143. Сформулируйте алгоритмы сложения и вычитания многозначных чисел в десятичной системе счисления.

144. Вычислите значения выражений в строчку с полным обоснованием (указанием свойств операций, понятий позиционной системы счисления, правил выполнения операций): а) $2374 + 1566$; б) $326 - 187$; в) $203 - 189$.

145. Составьте таблицу сложения в восьмеричной системе счисления.

146. Найдите значения выражений:

а) $231_5 + 102_5$; г) $4444_5 + 4444_5$;

б) $1254_6 + 442_6$; д) $12002_3 + 2211_3$;

в) $4084_9 + 5671_9$; е) $7724_8 + 235_8$.

Проверьте правильность вычислений в десятичной системе счисления.

147. Вычислите в обеих системах счисления и сравните полученные суммы:

а) $2344_5 + 231_4$;

б) $11011111_2 + 325_8$.

148. Выполните вычитание:

а) $18236 - 12864$;

б) $100101 - 86734$;

в) $37886_9 - 2455_9$;

г) $4725_8 - 647_8$;

д) $1100011101_2 - 1001100111_2$;

е) $210211_5 - 14321_5$;

ж) $4731_8 - 10011011101_2$.

149. Выполните вычитание: $\beta 917_{\alpha_{12}} - \alpha 6835_{12}$. Сделайте проверку:

а) с помощью сложения; б) выполнив вычитание в десятичной системе счисления.

150. Выполните действие в 5-ричной системе счисления и проверьте правильность вычислений в десятичной системе счисления: $13441_5 - 20203_4$.

151. Установите, в какой системе счисления выполнены действия и найдите неизвестные цифры:

а) $\begin{array}{r} + 21*02 \\ *12*2 \\ \hline 12*021 \end{array}$	б) $\begin{array}{r} + *123 \\ 422* \\ \hline *34*1 \end{array}$	в) $\begin{array}{r} _1536 \\ *42 \\ \hline 67* \end{array}$	г) $\begin{array}{r} _ *0*10 \\ 111*1 \\ \hline 3103 \end{array}$	д) $\begin{array}{r} + 23*5* \\ 1*642 \\ \hline 42423 \end{array}$	е) $\begin{array}{r} _ 61*6 \\ *50* \\ \hline 2411 \end{array}$
---	--	---	--	--	--

152. Сформулируйте алгоритмы умножения и деления многозначных чисел в десятичной системе счисления.

153. Составьте таблицу сложения и умножения в восьмеричной системе счисления.

154. Вычислите значения выражений с полным обоснованием (указанием свойств операций, понятий позиционной системы счисления, правил выполнения операций): а) $15836 \cdot 1000$; б) $5937 \cdot 5$; в) $1734 : 8$; г) $1623 : 45$; д) $7549 : 37$.

155. Определите первое неполное делимое и количество цифр в частном при делении:

а) $12371 : 9$; б) $587125 : 27$; в) $359041 : 94$; г) $1153_6 : 3_6$;

д) $231441_5 : 14_5$; е) $34546_7 : 54_7$.

156. В десятичной системе счисления дописали к числу 2 нуля справа. Во сколько раз увеличилось число?

157. Во сколько раз увеличится число 356_7 , если дописать справа 1 ноль, 2 нуля?

158. Что произойдет с числом в десятичной системе счисления, если отбросить 4 нуля справа в записи числа?

159. Во сколько раз уменьшится число 2123000_4 , если отбросить справа 2 нуля, 4 нуля?

160. Выполните указанные действия:

- а) $203_5 \cdot 41_5$; в) $187_9 \cdot 24_9$;
 б) $144_5 \cdot 13_5$; г) $22120_3 \cdot 201_3$.

161. Выполните деление:

- а) $124335 : 303$; д) $121343_5 : 4_5$;
 б) $424_5 : 3_5$; е) $2153_8 : 47_8$;
 в) $31021_7 : 4_7$; ж) $3346_7 : 13_7$.
 г) $45223_6 : 3_6$;

Результат проверьте следующим образом: 1) умножением в данной системе счисления; 2) делением в десятичной системе счисления.

162. Вычислите значение выражения в указанной системе счисления.

Сделайте проверку, выполнив вычисления в десятичной системе счисления:

- а) $(563_8 + 217_8) \cdot 15_8 + (2365_8 - 636_8) : 17_8$;
 б) $212012_3 \cdot 201_3 + 22120_3 \cdot 111_3$;
 в) $236_8 + 154_8 : (764_8 - 753_8) \cdot 15_8$;
 г) $(835_9 + 223_9) \cdot (121_9 - 1040_9 : 10_9)$;
 д) $24_6 \cdot 15_6 + 112_6 : (21_6 - 13_6)$.

163. (Задача Я.И. Перельмана) В бумагах одного чудака-математика была найдена его автобиография: «Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет – способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $\frac{1}{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 рублей в месяц» и т.д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

164. Установите, в какой системе счисления выполнены действия и найдите неизвестные цифры:

а) $\begin{array}{r} \times \quad **2 \\ *2 \\ \hline + **0* \\ ***1 \\ \hline ****1 \end{array}$	б) $\begin{array}{r} \times *3* \\ *3 \\ \hline + **4* \\ **** \\ \hline ***13 \end{array}$	в) $\begin{array}{r} \times *2 \\ 2* \\ \hline + ** \\ **1 \\ \hline *0*2 \end{array}$
---	---	--

Тема 4. Делимость целых неотрицательных чисел

4.1. Отношение делимости на множестве N_0 и его свойства.

Признаки делимости

Определение. Целое неотрицательное число a делится на натуральное число b тогда и только тогда, когда существует такое целое неотрицательное число n , что $a = b \cdot n$.

$$a : b \equiv \exists n \in N_0 (a = bn).$$

Число a называется *кратным*, b – *делителем*.

Отношение делимости – бинарное отношение в множестве N_0 , т.е. представляет собой множество пар, первый элемент которых делится на второй.

Свойства отношения делимости

1. Число 0 делится на любое натуральное число.

$$\forall a \in N (0 : a)$$

2. Любое целое неотрицательное число делится на число 1.

$$\forall a \in N_0 (a : 1)$$

3. Делитель натурального числа не превышает само это число.

4. Отношение делимости рефлексивно.

$$\forall a \in N (a : a)$$

5. Отношение делимости антисимметрично.

$$\forall a, b \in N (a : b \wedge a \neq b \supset \neg (b : a))$$

6. Отношение делимости транзитивно.

$$\forall a, b, c \in N (a : b \wedge b : c \supset a : c)$$

7. Делимость суммы:

$$\forall a, b, m, n \in N_0 \forall c \in N (a : c \wedge b : c \supset (am + bn) : c).$$

8. Делимость разности:

$$\forall a, b, m, n \in N_0 \forall c \in N (a : c \wedge b : c \wedge am \geq bn \supset (am - bn) : c).$$

9. Делимость произведения. Если один из множителей произведения делится на натуральное число b , то и все произведение делится на это число b .

10. Если в произведении $a \cdot b$ множитель a делится на n , а множитель b делится на m , то произведение $a \cdot b$ делится на произведение $m \cdot n$.

11. Если в сумме одно слагаемое не делится на натуральное число b , а все остальные слагаемые делятся на b , то вся сумма не делится на число b .

Признак делимости – это правило, позволяющее по записи числа установить, делится оно или нет на натуральное число a , не производя самого деления.

Признак делимости на 2 (5): Число x делится на 2 (5) тогда и только тогда, когда последняя цифра его десятичной записи делится на 2(5).

Признак делимости на 4 (25): Число x делится на 4 (25) тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4 (25).

Признак делимости на 8 (125): Число x делится на 8 (125) тогда и только тогда, когда три его последние цифры образуют трехзначное число, делящееся на 8 (125).

Признак делимости на 3 (9): Число x делится на 3 (9) тогда и только тогда, когда сумма цифр десятичной записи числа x делится на 3 (9).

Признак делимости на 11: Число x делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

Пример 21. Докажите делимость суммы (свойство 7).

Решение.

$$a : c \Rightarrow a = ck \ (k \in N_0);$$

$$b : c \Rightarrow b = cp \ (p \in N_0) \text{ — по определению отношения делимости}$$

Тогда имеем: $am + bn = (ck)m + (cp)n = c(km) + c(pn) = c(km + pn)$ — по свойствам ассоциативности умножения и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Тогда $(am + bn) : c$, так как $\exists s \in N_0 \ (am + bn = c \cdot s)$, где $s = km + pn$.

Пример 22. Докажите методом полной индукции, что для любого целого неотрицательного числа n разность $n^5 - n$ делится на 5.

Решение. Представим разность $n^5 - n$ в виде произведения:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) \cdot (n^2 + 1) = n(n+1) \cdot (n-1) \cdot (n^2 + 1).$$

По свойству 9 это произведение делится на 5, если один из множителей делится на 5.

Возможны следующие случаи:

1) $n : 5$, т.е. $n = 5k$, тогда $(n^5 - n) : 5$ (по определению делимости);

2) n при делении на 5 дает остаток 1, т.е. $n = 5k + 1$.

В этом случае множитель $n - 1 = 5k + 1 - 1 = 5k$ делится на 5, а значит $(n^5 - n) : 5$ (по определению делимости);

3) $n = 5k + 2$, тогда $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1) : 5$ (по свойству 9 делимости), а значит $(n^5 - n) : 5$;

4) $n = 5k + 3$, тогда $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$ делится на 5 (по свойству 9 делимости), а значит $(n^5 - n) : 5$;

5) $n = 5k + 4$, тогда $n + 1 = 5k + 4 + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$ делится на 5 (по определению делимости), а значит $(n^5 - n) : 5$.

Мы рассмотрели все возможные случаи, и в каждом из них $(n^5 - n) : 5$, поэтому для любого целого неотрицательного числа n разность $(n^5 - n) : 5$.

Пример 23. Докажите, что четырехзначное натуральное число вида $\overline{5a5a}$ делится на 101.

Решение. Запишем четырехзначное число в виде суммы степеней числа 10: $\overline{5a5a} = 5 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + a = 5050 + 101a = 101(50 + a)$. Это произведение делится на 101 (по свойству 9 делимости).

Пример 24. Докажите методом математической индукции, что сумма $(n^3 + 5n)$ делится на 6 для любого натурального числа n .

Решение. Обозначим через $P(n)$ предложение « $n^3 + 5n$ делится на 6».

1). **Проверяем** истину этого предложения при $n = 1$, т.е. $P(1) = И$:

$$1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6 - \text{делится на } 6.$$

2). **Предполагаем**, что истинно предложение $P(k)$, т.е. сумма $k^3 + 5k$ делится на 6.

3). **Доказываем**, что истинно предложение $P(k')$: «сумма $(k')^3 + 5k'$ делится на 6».

Выполняем преобразования, учитывая, что $k' = k + 1$:

$$(k')^3 + 5k' = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = \\ = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6.$$

Видим, что последняя сумма состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое $(k^3 + 5k)$ делится на 6 по предположению 2; второе слагаемое $(3k(k+1))$ делится на 6, так как оно делится на 3 и делится на 2 (произведение $k \cdot (k+1)$ — четное); третье слагаемое (6) делится на 6. Значит, сумма этих трех слагаемых делится на 6 (по свойству 7 делимости), т.е. сумма $(k')^3 + 5k'$ делится на 6.

4). **Делаем вывод**: по аксиоме индукции из п.п. 1–3 следует, что сумма $(n^3 + 5n)$ делится на 6 при любом натуральном n .

Пример 25. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n $5^{2n-1} + 2$ при делении на 6 дает остаток 1.

Решение. Первый способ. Предложение «натуральное число при делении на 6 дает остаток 1», означает, что это число можно записать в виде: $6m + 1$, где $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $P(n)$ предложение: « $5^{2n-1} + 2 = 6m + 1$ »,

1) **Проверяем** истину этого предложения при $n = 1$, т.е. $P(1) = И$:

$$5^{2 \cdot 1 - 1} + 2 = 7 = 6 \cdot 1 + 1 - \text{истинно } (m = 1).$$

2) **Предполагаем**, что истинно предложение $P(k)$, т.е. $5^{2k-1} + 2 = 6m + 1$ — истинно.

3) **Доказываем**, что истинно предложение $P(k')$: « $5^{2k'-1} + 2 = 6t + 1$ » ($t \in \mathbb{N}$). Для этого выполняем преобразования, учитывая, что $k' = k + 1$:

$$5^{2k'-1} + 2 = 5^{2(k+1)-1} + 2 = 25 \cdot 5^{2k-1} + 2 = 25 \cdot (6m + 1) + 2 = 150m + \\ + 24 + 1 = 6(25m + 4) + 1 = 6t + 1.$$

4) **Делаем вывод**: по аксиоме индукции из п.п. 1–3 следует, что значение выражения $5^{2n-1} + 2$ при делении на 6 дает остаток 1 при любом натуральном числе n .

Второй способ. Утверждение «при $\forall n \in \mathbb{N}$ значение выражения $5^{2n-1} + 2$ при делении на 6 дает остаток 1» равносильно утверждению «при $\forall n \in \mathbb{N}$ значение выражения $5^{2n-1} + 1$ делится на 6». Обозначим через $P(n)$ предложение: « $5^{2n-1} + 1$ делится на 6».

1) **Проверяем** истину этого предложения при $n = 1$, т.е. $P(1) = И$:

$$5^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 6 - \text{делится на } 6.$$

2) **Предполагаем**, что истинно предложение $P(k)$, т.е. $(5^{2k-1} + 1) : 6$ — истинно.

а) произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2;

б) $(n^3 - n)$ делится на 3 для любого целого неотрицательного числа n ;

в) $n^2(n^2 - 1)$ делится на 4 для любого целого неотрицательного числа n .

175. Докажите, что произведение двух последовательных четных натуральных чисел делится на 8.

176. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

177. Докажите, что сумма кубов двух любых целых неотрицательных чисел делится на сумму этих чисел.

178. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

179. Выясните, будут ли истинными суждения:

а) $(17^3 + 17^4)$ делится на 18;

б) $(71^6 - 71^5)$ делится на 35;

в) $(23^{n+1} - 23^n)$ делится на 22, где n — любое натуральное число.

180. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных степеней числа 3 делится на 13.

181. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 7.

182. Докажите, что разность любого трехзначного числа и трехзначного числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 9.

183. Докажите, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

184. Докажите, что четырехзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами, делится на 101.

185. Докажите, что сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 11.

186. Докажите, что если сумма двух трехзначных чисел делится на 37, то и шестизначное число, составленное приписыванием одного из них ко второму, тоже делится на 37.

187. Докажите, что если в трехзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то число делится на 7.

188. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном числе n :

а) $n^4 + 4 \div 5$;

г) $7^n - 1 \div 6$;

ж) $10^n + 18n - 28 \div 27$;

б) $n^3 + 11n \div 6$;

д) $4^n - 1 \div 3$;

з) $4^n + 15n - 1 \div 9$;

в) $(n^3 - 7n + 6) \div 6$;

е) $5^{2n} - 1 \div 24$;

и) $3^{2n+1} + 40n - 3 \div 64$.

189. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном числе n :

а) $7^n + 3n$ при делении на 9 дает в остатке 1;

б) $3 \cdot 6^n + 4$ при делении на 5 дает в остатке 2;

в) $8^n - 7n + 2$ при делении на 7 дает в остатке 3.

190. Докажите признаки делимости на 4 (25), 3(9).

191. Даны числа: 68415, 123456, 345678, 135790, 246870, 789516, 2732805, 6697328, 4387296, 886325. На какие числа по признакам делимости делится каждое из них?

192. Високосный ли год: 192, 1056, 1314, 1565, 1616, 1732, 1862, 1886, 1978, 1994?

193. Вместо звездочек поставьте цифры так, чтобы полученное число делилось:

а) на 5: 483^* ; 234^*0 ; 25^*31 ;

б) на 3: 24^* ; 31^*42 ; 128^*3 ; 1^*807 ;

в) на 8: 257^*4 ; 63^*22 ; 14355^* ;

г) на 9: 179^* ; 54^*7 ; 5^*24 ;

д) на 11: 2033^* ; 171^*85 ; 601^* ; 861^*4 ; 52^*56 ; 3^*272 .

194. Запишите все четырехзначные числа вида:

а) $\overline{8ху7}$, которые делятся на 9;

б) $\overline{5хбу}$, которые делятся на 4.

195. К каждому из следующих чисел прибавьте такое наименьшее число, чтобы получилось число, кратное:

а) 9: 3856, 2874, 43862, 58178, 70142;

б) 5: 131, 286, 1543, 3208, 60749.

196. Не выполняя деления, найдите остаток от деления на 3, на 4 и на 5 следующих чисел: 36026, 69734, 38763, 481957, 1806420, 417585, 739552.

197. Числа 4373 и 826 разделили на одно и то же натуральное число и получили в остатках соответственно 8 и 7. На какое число делили?

198. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на 2, 3, 5 в остатке получается 1.

199. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на 4, 5, 8 в остатке получается 3.

200. Сформулируйте необходимое и достаточное условие делимости суммы двух натуральных чисел a и b на натуральное число c , если слагаемые a и b не делятся на c .

201. Сформулируйте необходимое и достаточное условие делимости разности двух натуральных чисел a и b на натуральное число c , если числа a и b не делятся на c .

202. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она:

а) на 3: $124341 + 1705248 + 794201$;

$1325202 + 844323 + 529512 + 467193$;

$28825 + 49436 + 18225$;

б) на 4: $187560 + 1497344 + 781516$;

$346712 + 5186528 + 765464 + 93926$;

$78452 + 951915 + 18737$.

203. Не находя разности чисел, установите, делится ли она:

а) на 5: $16285 - 14010$;

$27425 - 13184$;

$49201 - 7176$;

б) на 9: $56403 - 37162$;

$78624 - 46215$;

$623856 - 17832$.

204. Пользуясь признаками делимости, проверьте правильность вычислений:

а) $3493 \cdot 471 = 1646143$;

б) $4732 \cdot 352 = 1664644$;

в) $71539 \cdot 24 + 53448 - 9784 \cdot 13 + 1267 = 1157822$.

205. Сумма цифр двузначного натурального числа равна 7. Если между цифрами этого числа вставить цифру 4, то число увеличится на 220. Найдите это двузначное число.

206. Трехзначное натуральное число заканчивается нулем. Если его поделить на цифру сотен, то получится частное 126 и остаток 2; если его поделить на цифру десятков, то получится частное 47 и остаток 4. Найдите это трехзначное число.

4.2. Простые и составные числа. Канонический вид числа

По числу делителей множество N_0 разбивается на 4 класса:

$$N_0 = \Pi \cup C \cup \{1\} \cup \{0\},$$

где Π – множество простых чисел, C – множество составных чисел.

Определение. Натуральное число, большее единицы, называется **простым**, если оно имеет ровно два делителя: единицу и себя.

Определение. Число, которое имеет более двух, но конечное число делителей, называется **составным**.

Число 1 имеет только один делитель.

Число 0 имеет бесконечно много делителей.

Теорема Евклида. Множество простых чисел бесконечно.

Таблицу простых чисел можно составить с помощью метода, который называется **решето Эратосфена**. Этот метод позволяет отсеивать одно за другим составные числа.

Теорема. Если число n не делится ни на одно из простых чисел, не превышающих $\sqrt{n}$, то n – **простое число**.

Основная теорема арифметики. Любое составное натуральное число единственным образом с точностью до порядка следования множителей записывается в виде произведения простых чисел.

Представление натурального числа n в виде произведения степеней простых чисел называется **каноническим разложением или каноническим видом числа n** .

Пример 26. С помощью решета Эратосфена найдите все простые числа, которые есть в натуральном ряду до 40.

Решение. Запишем все натуральные числа от 2 до 40. Число 1 не рассматриваем, так как оно не является ни простым, ни составным.

	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	⑳	24	25	26	27	28	㉑	30
㉓	32	33	34	35	36	㉗	38	39	40

Теперь будем «отсеивать» простые числа, т.е. последовательно вычеркивать числа, не являющиеся простыми. Число 2 по свойству 3 делимости может иметь делители, которые меньше его или равны ему, т.е. числа 1 и 2. Значит, число 2 имеет точно 2 делителя и является простым. Оставляем число 2 (обводим кружком) и вычеркиваем все числа, кратные двум (четные). Снова переходим к началу ряда. Первое не вычеркнутое число – 3. У него могут быть (по свойству 3) делителями числа 1, 2, 3. Если бы 2 было делителем числа 3, то мы бы вычеркнули число 3 раньше. Так как оно не вычеркнуто, то 2 не является делителем числа 3. Значит, у числа 3 точно два делителя: 1 и 3, и поэтому число 3 – простое. Обводим его кружком, а дальше вычеркиваем все числа, кратные трем. Аналогично рассуждая, обосновываем, что число 5 – простое, и вычеркиваем числа, кратные 5, и т.д. Некоторые числа окажутся зачеркнутыми несколько раз.

Процесс вычеркивания облегчается следующими утверждениями:

1) вычеркивание чисел, кратных простому числу p , следует начинать с числа p^2 , потому что в этот момент между числами p и p^2 все составные числа уже вычеркнуты, как кратные простым числам, меньшим p ;

2) если $p^2 > n$, то процесс окончен, и в таблице остались только простые числа (Например, в нашей таблице вычеркивание заканчивается после вычеркивания составных чисел, кратных числу 5, так как для следующего простого числа 7 имеем $7^2 = 49 > 40$).

Числа, которые обведены, являются простыми, т.е. числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Пример 27. Не пользуясь таблицей простых чисел, определите, является ли простым число 137.

Решение. $\sqrt{137} \approx 12$. Простые числа, меньшие 12, – это 2, 3, 5, 7, 11. Число 137 не делится ни на одно простое число, меньшее 12. Поэтому число 137 простое.

Пример 28. Найдите канонический вид числа 2520.

Решение. Найти канонический вид числа – это значит разложить его на простые множители. Это удобно записывать так:

2520	5
504	2
252	2
126	2
63	7
9	3
3	3
1	

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Задания

207. а) Сколько существует четных простых чисел? Сколько нечетных?

б) Могут ли два соседних натуральных числа быть простыми?

в) Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом? Для каких простых чисел это возможно? Для каких невозможно?

г) Может ли сумма двух составных чисел быть простым числом?

208. Найдите простые числа p , такие что $p + 10$ и $p + 14$ также являются простыми.

209. Найдите натуральные числа n , при которых все три числа n , $n + 4$ и $n + 14$ являются простыми.

210. Проверьте для всех чисел от 20 до 40 правильность утверждения, что любое число, большее 6, можно представить в виде суммы трех простых чисел.

211. Проверьте для четных чисел от 30 до 50, что каждое четное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

212. Отвечая на вопрос, является ли число 991 простым, студент показал, что оно не делится на следующие простые числа: 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 31. Надо ли дальше продолжать проверку? Почему?

213. Не пользуясь таблицей простых чисел, определите, являются ли простыми следующие числа: 385; 176; 187; 487; 613; 327; 471; 463; 571; 613; 299.

214. Методом решета Эратосфена составьте таблицу простых чисел, меньших 200.

215. Используя составленную в предыдущем задании таблицу простых чисел, выпишите:

а) семь идущих подряд составных чисел;

б) простые числа-близнецы;

в) наибольшее и наименьшее простое двузначное число;

г) наибольшее и наименьшее составное двузначное число;

д) все простые числа первого, шестого, одиннадцатого, пятнадцатого десятков.

216. Используя составленную таблицу простых чисел, подсчитайте количество простых чисел на промежутках от 2 до 39 включительно; от 80 до 129, от 160 до 199. Какой вывод можно сделать?

217. Сколько натуральных чисел, меньших 200, не делятся ни на 2, ни на 3?

218. Определите, при каком наименьшем натуральном числе n число $2^{2^n} + 1$ является составным.

219. Найдите канонический вид следующих чисел: 216, 360, 480, 774, 1155, 1515, 4608, 5385, 7248, 8415, 1875, 24894, 13464, 67004.

220. Сколько натуральных делителей имеют числа p^2 ; p^3 ; p^4 ; p^m , где p – простое число, m – натуральное число?

221. Пользуясь каноническим разложением числа и соответствующим признаком делимости, запишите все натуральные делители чисел: 72, 360, 576, 1800, 2187, 2304.

4.3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Взаимно простые числа. Алгоритм Евклида

Определение. Общим кратным натуральных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ называется всякое натуральное число a , которое делится на каждое из этих чисел: $a : b_1, a : b_2, \dots, a : b_n$.

Определение. Наименьшим общим кратным называется наименьшее число из всех общих кратных данных чисел: НОК ($b_1, b_2, \dots, b_n$) = m , где $m = \min(a_i)$.

Определение. Общим делителем натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется всякое натуральное число b , на которое делятся все числа $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 : b, a_2 : b, \dots, a_n : b.$$

Определение. Наибольшим общим делителем называется наибольшее число из всех общих делителей данных чисел: НОД ($a_1, a_2, \dots, a_n$) = d , где $d = \max(b_i)$.

Свойства НОД и НОК

1) Любое общее кратное натуральных чисел делится на их наименьшее общее кратное:

$$\text{ОК}(a, b) : \text{НОК}(a, b).$$

2) НОД натуральных чисел делится на любой общий делитель данных чисел.

$$\text{НОД}(a, b) : \text{ОД}(a, b).$$

3) Если a кратно b , то $\text{НОД}(a, b) = b$, $\text{НОК}(a, b) = a$

4) Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b$.

5) Если числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно взаимно простые, то их НОК равен их произведению.

6) Общий множитель можно выносить за знак НОД и НОК:

- $\text{НОД}(ma_1, ma_2, \dots, ma_n) = m \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n);$
 $\text{НОК}(ma_1, ma_2, \dots, ma_n) = m \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n).$
 7) $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(\text{НОД}(a, b); c);$
 $\text{НОК}(a, b, c) = \text{НОК}(\text{НОК}(a, b); c).$
 8) $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b.$

Признак делимости на составное число. Пусть составное число n разложено в произведение двух взаимно простых чисел a и b ($n = a \cdot b$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$). Для того чтобы натуральное число x делилось на составное число n , необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на число a и на число b .

С помощью канонического разложения чисел можно находить НОД и НОК чисел.

Правило нахождения НОД чисел, заданных в каноническом виде. Каноническое разложение **наибольшего общего делителя** чисел содержит **общие простые множители**, входящие в разложения данных чисел, причем каждый из них надо взять с **наименьшим показателем**, с каким он входит в эти разложения.

Правило нахождения НОК чисел, заданных в каноническом виде. Каноническое разложение **наименьшего общего кратного** чисел содержит **все простые множители**, входящие в разложения данных чисел, причем каждый из них надо взять с **наибольшим показателем**, с каким он входит в эти разложения.

Второй способ отыскания НОД чисел называется **алгоритмом Евклида**. Он основан на следующих утверждениях:

- 1) Если $a : b$, то $\text{НОД}(a, b) = b$;
- 2) Если $a = bq + r$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Отыскание НОД (a, b) с помощью **алгоритма Евклида** сводится к последовательному делению с остатком.

Последний, не равный 0, остаток в алгоритме Евклида и есть $\text{НОД}(a, b)$.

Пример 29. Найдите НОД и НОК чисел 525 и 630 с помощью их канонического разложения.

Решение. Разложим числа 525 и 630 на простые множители.

525	5	630	2
105	3	315	5
35	5	63	3
7	7	21	7
1		3	3
		1	

$$525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7;$$

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

$$\text{НОД}(525; 630) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$\text{НОК}(525; 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$$

Пример 30. Найдите НОД (846; 246) с помощью алгоритма Евклида.

Решение. Будем выполнять последовательное деление с остатком:

$$846 : 246 = 3 \text{ (ост. } 108)$$

$$246 : 108 = 2 \text{ (ост. } 30)$$

$$108 : 30 = 3 \text{ (ост. } 18)$$

$$30 : 18 = 1 \text{ (ост. } 12)$$

$$18 : 12 = 1 \text{ (ост. } 6)$$

$$12 : 6 = 2 \text{ (ост. } 0).$$

Получаем: $\text{НОД}(846; 246) = \text{НОД}(246; 108) = \text{НОД}(108; 30) = \text{НОД}(30; 18) = \text{НОД}(18; 12) = \text{НОД}(12; 6) = 6$, где 6 – последний остаток, не равный нулю. Поэтому $\text{НОД}(846; 246) = 6$.

Процесс последовательного деления удобнее выполнять «углом» и записывать так:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 846 \overline{) 246} \\ \underline{738} \\ 718 \\ \underline{462} \\ 256 \\ \underline{162} \\ 94 \\ \underline{62} \\ 32 \\ \underline{24} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 2 \\ \underline{0} \end{array} \end{array}$$

6 – последний остаток, не равный нулю. Поэтому $\text{НОД}(846; 246) = 6$.

Чтобы вычислить НОК (a ; b) с помощью алгоритма Евклида, применяем формулу: $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$.

$$\text{НОК}(846, 246) = \frac{846 \cdot 246}{6} = 34686.$$

Пример 31. Докажите, что для любого натурального числа n $\text{НОД}(2n, 2n + 2) = 2$.

Решение. Пусть d – общий делитель ($2n, 2n + 2$).

Тогда $2n : d$ и $(2n + 2) : d$, а значит по свойству делимости разность $(2n + 2 - 2n) : d$, т.е. $2 : d$. Отсюда следует, что $d = 1$ или $d = 2$.
 $\text{НОД}(2n, 2n + 2) = 2$.

Пример 32. Найдите все натуральные пятизначные числа вида $43a2b$, которые делятся на 36.

Решение. На основании признака делимости на составное число, натуральное число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится и на 4 и на 9.

Искомое число делится на 4 при $b = 0, 4, 8$. Далее имеем:

Числа, делящиеся на 4		Числа, делящиеся на 9	
$b = 0$	$\overline{43a20}$	$a = 0$	43020
		$a = 9$	43920
$b = 4$	$\overline{43a24}$	$a = 5$	43524
$b = 8$	$\overline{43a28}$	$a = 1$	43128

Ответ: 43020, 43920, 43524, 43128.

Пример 33. Докажите, что при любом n значение выражения $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 60.

Решение. Для доказательства делимости на 60 надо доказать, что данное число делится на взаимно простые числа 3, 4, 5.

Преобразуем выражение $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$.

Разложим на множители выражение $n^4 - 5n^2 + 4$, для чего найдем корни уравнение $n^4 - 5n^2 + 4 = 0$.

Пусть $n^2 = y$, тогда решаем уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}, y_1 = 4, y_2 = 1, \text{ тогда } n_1 = -2, n_2 = 2, n_3 = -1, n_4 = 1.$$

Получаем:

$n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n - 2)(n - 1)(n + 1)(n + 2)$ – произведение пяти последовательных натуральных чисел. Среди них есть числа, которые делятся на 3, на 4, на 5. Поэтому все произведение, а значит и число $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ делится на 60.

Пример 34. Найдите натуральные числа x и y такие, что:

а) $xy = 750$, НОК $(x, y) = 150$;

б) НОК $(x, y) = 432$, НОД $(x, y) = 12$.

Решение. а) Используем формулу НОД $(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) = xy$.

НОД $(x, y) \cdot 150 = 750$; отсюда НОД $(x, y) = 5$.

Так как числа x и y делятся на 5, то существуют такие два взаимно простых натуральных числа k и m , что $x = 5k, y = 5m$.

$$5 \cdot 150 = 5k \cdot 5m, \text{ отсюда } k \cdot m = 30.$$

Из последнего равенства с учетом коммутативности умножения получим искомые значения k и m (и соответственно пары чисел x и y):

$k \cdot m$	k	m	$x = 5k$	$y = 5m$
30	1	30	5	150
30	2	15	10	75
30	3	10	15	50
30	5	6	25	30

б) По условию НОД $(x, y) = 12$, поэтому $x : 12$ и $y : 12$. Следовательно, существуют два взаимно простых числа k и m такие, что $x = 12k, y = 12m$.

Согласно формуле $\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) = xy$ имеем:

$12 \cdot 432 = 12k \cdot 12m$, откуда $k \cdot m = 36$.

Из последнего равенства с учетом коммутативности умножения получаем искомые значения k и m (и соответственно пары чисел x и y):

$k \cdot m$	k	m	$x = 12k$	$y = 12m$
36	1	36	12	432
36	2	18	не взаимно простые	
36	3	12	не взаимно простые	
36	4	9	48	108
36	6	6	не взаимно простые	

Ответ: а) 5 и 150, 10 и 75, 15 и 50, 25 и 30; б) 12 и 432, 48 и 108.

Задания

222. Напишите:

- а) множество всех делителей числа 144;
б) множество кратных числа 36, меньших 400.

223. Найдите пересечение множества делителей числа 180 с множеством делителей числа 240.

224. Выпишите все общие делители чисел: а) 48 и 60; б) 28 и 35; в) 18 и 72; г) 36 и 25; д) 9, 18 и 33. Найдите наибольшие общие делители этих чисел.

225. Напишите все двузначные числа, кратные 16, кратные 24. Найдите общие кратные. Найдите НОК (16, 24).

226. Найдите НОД (28, 35) и НОК (28, 35) на основе их определений.

227. Найдите НОД (24, 35). Чему равен НОК (24, 35)?

228. Может ли НОК двух чисел быть больше их произведения?

229. Существуют ли два такие натуральные числа, у которых $\text{НОД}(a, b) = 110$, а $\text{НОК}(a, b) = 2000$?

230. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное следующих чисел, записанных в каноническом виде:

- а) $a = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$ и $b = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2$;
б) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 11$ и $b = 3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$;
в) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^6$ и $b = 7 \cdot 11^3 \cdot 13^3$;
г) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

231. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное следующих чисел с помощью канонического разложения:

- а) 200 и 180; д) 405, 448 и 493;
б) 110 и 240; е) 117, 234 и 486;
в) 187 и 1771; ж) 225, 300 и 405;
г) 144 и 360; з) 24, 108, 135 и 432.

232. Пользуясь свойствами наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, упростите их нахождение для чисел:

- а) $245 \cdot 56$ и $147 \cdot 28$;
- б) $162 \cdot 87$ и $270 \cdot 87$;
- в) 4200 и 5600 ;
- г) $243 \cdot 41$ и $32 \cdot 41$.

233. Дано $2832 = 78 \cdot 36 + 24$, и НОД $(78, 24) = 6$.

- а) Что можно сказать о НОД $(2832, 78)$?
- б) Как легче найти НОД $(2832, 36)$?

234. Дано $2782 = 130 \cdot 21 + 52$ и НОД $(130, 52) = 26$.

- а) Что можно сказать о НОД $(2782, 130)$?
- б) Как легче найти НОД $(2782, 21)$?

235. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное следующих чисел с помощью алгоритма Евклида:

- а) 1960 и 588 ;
- б) 315 и 400 ;
- в) 462 и 770 ;
- г) 1960 и 988 ;
- д) 15283 и 10013 ;
- е) $350, 420$ и 700 ;
- ж) $312, 208$ и 650 ;
- з) $216, 144$ и 180 .

236. Сократите дробь: $\frac{374}{261}, \frac{21120}{30720}, \frac{9061}{10127}$.

237. Приведите дроби к общему знаменателю: $\frac{75}{2061}$ и $\frac{61}{2748}$.

238. Докажите, что два последовательных нечетных числа $2n + 1$ и $2n + 3$ взаимно просты.

239. Докажите, что числа $n, n + 1, 2n + 1$ попарно взаимно просты при любом натуральном числе N .

240. Докажите, что два последовательных натуральных числа взаимно просты.

241. Какие числа являются взаимно простыми:

- а) 18 и 241 ;
- б) 11 и 13 ;
- в) 467 и 468 ;
- г) 51 и 300 ;
- д) 117 и 120 ;
- е) 38 и 51 ;
- ж) 143 и 176 ;
- з) 110 и 130 ?

242. Выясните, истинны ли суждения:

- а) два простых числа всегда взаимно простые;
- б) каждые два взаимно простых числа всегда простые.

243. Сформулируйте признаки делимости на $6, 42, 18, 15, 36, 75$.

244. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) если число делится на 7 и на 5 , то оно делится на 35 ;
- б) если число делится на 10 и на 15 , то оно делится на 150 ;
- в) если число делится на 4 и на 8 , то оно делится на 32 ;
- г) если число не делится на 3 или на 5 , то оно не делится на 15 ;
- д) если число не делится на 15 , то оно не делится ни на 3 , ни на 5 ;

е) если число не делится на 24, то оно не делится на 12 или не делится на 8?

245. Не выполняя вычислений, определите, делятся ли данные суммы на 12, 15, 75:

- а) $60 + 120 + 24$; в) $375 + 3130 + 7125$;
б) $75 + 300 + 150$; г) $480 + 2400 + 1680$.

246. Среди чисел 1314, 552, 1035, 1512, 30750, 2628, 3240 укажите те, которые делятся: а) на 12; б) на 18; в) на 15; г) на 72; д) на 75.

247. Найдите все натуральные пятизначные числа вида:

- а) $7a35b$, которые делятся на 6;
б) $5a17b$, которые делятся на 22;
в) $43a2b$, которые делятся на 36.

248. Докажите, что при любом натуральном числе n :

- а) $(n^3 - n)$ делится на 24;
б) $(n^5 - n)$ делится на 30;
в) $(n^6 - n^2)$ делится на 60;
г) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24;
д) $n^2(n^2 - 1)$ делится на 12.

249. Найдите a и b , если известно, что:

- а) $a : b = 11 : 13$, НОД (a, b) = 5;
б) $a : b = 17 : 14$, НОД (a, b) = 7;
в) $a : b = 7 : 8$, НОК (a, b) = 224;
г) $a : b = 14 : 9$, НОК (a, b) = 693;
д) НОД (a, b) = 7, $a \cdot b = 294$;
е) НОК (a, b) = 75, $a \cdot b = 375$;
ж) $a \cdot b = 972$, $a : b = 3 : 1$;
з) НОД (a, b) = 5, НОК (a, b) = 105;
и) НОД (a, b) = 3, НОК (a, b) = 915;
к) НОД (a, b) = 8, НОК (a, b) = 240.

250. Постройте блок-схему алгоритма:

- а) нахождения НОД (a, b);
б) нахождения НОД (a, b, c);
в) нахождения НОК (a, b, c).

251. Решите задачи, используя понятия НОД и НОК:

а) Имеются 320 орехов, 240 пряников, 240 конфет. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из всех этих гостинцев и сколько орехов, конфет и пряников в отдельности войдет в каждый подарок?

б) В первом поезде 792 пассажирские места, во втором – 864, в третьем – 936. Сколько вагонов имеет каждый поезд, если известно, что в каждом вагоне находится одинаковое число пассажирских мест, наибольшее из возможных.

в) В три школьных киоска завезли поровну тетрадей. В одну школу тетради завезли пачками по 100 штук в каждой, в другую – по 150 штук в пачке, а в третью – пачками по 200 штук в каждой. Сколько тетрадей завезли в каждую школу, если количество тетрадей, завезенных во все школы, больше 2000, но меньше 6000?

г) Сколько конфет лежит в коробке, если при раскладывании кучками по 2, по 3, по 4, по 6 одна конфета остается лишней, а при раскладывании по 7 лишних конфет не будет?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтина, Т.П. Раз задачка, два задачка...: пособие для учителей / Т.П. Бахтина. – Минск: ООО «Асар», 2000. – 224 с.
2. Задачник-практикум по математике: учеб. пособие / Н.Я. Виленкин [и др.]; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977. – 205 с.
3. Кожух, І.Р. Зборнік задач по матэматыцы: вучэб. дапам. для пед. ВНУ / І.Р. Кожух. – Мінск: Вышэйшая школа, 1994. – 162 с.
4. Лещенко, Л.В. Методические рекомендации к практическим занятиям по математике / Л.В. Лещенко, Л.А. Бондарева. – Могилев: МГПИ им. А.А. Кулешова, 1989. – 17 с.
5. Мазаник, А.А. Реши сам / А.А. Мазаник. – 2-е изд. – Минск: Народная асвета, 1980. – 239 с.
6. Математика: учеб. пособие / Н.Я. Виленкин [и др.]; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
7. Николаева В.В. Методические рекомендации к практическим занятиям по математике / В.В. Николаева, Л.В. Лещенко. – Могилев: МГПИ им. А.А. Кулешова, 1988. – 20 с.
8. Пакала, А.А. Курс матэматыкі ў прыкладах і задачах: вучэб. дапам. / А.А. Пакала. – Мінск: БДПУ імя М. Танка, 1998. – 220 с.
9. Практикум по математике для студентов-заочников специальности «Педагогика и методика начального обучения» / сост. Р.О. Кирбай. – Мозырь: МГПУ, 2002. – 54 с.
10. Сборник задач по математике: пособие для педучилищ / А.М. Пышкало [и др.]; под общ. ред. А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1979. – 208 с.
11. Стойлова, Л.П. Математика: учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений / Л.П. Стойлова. – М.: Издательский центр «Академия», 1999. – 424 с.
12. Столяр, А.А. Математика: учеб. пособие / А.А. Столяр, М.П. Лельчук. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 272 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел	3
Тема 2. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел	19
Тема 3. Системы счисления	26
Тема 4. Делимость целых неотрицательных чисел	37

Учебное издание

Лещенко Лариса Васильевна
Гостевич Татьяна Васильевна

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методические материалы

Технический редактор *А.Л. Позняков*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать **22.09.2011.**
Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,7. Тираж **77** экз. Заказ № **392.**

Учреждение образования «Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова», 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова». 212022, Могилев, Космонавтов, 1.