

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В MATHCAD. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Н. Е. Каменская

(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»,
кафедра математики и информатики)

Рассматривается проблема оценки погрешности при численном решении задач в Mathcad на примере решения нелинейного уравнения.

Неотъемлемой частью численного решения задачи является оценка погрешности результата. Если приближенный результат получен, но нельзя сказать, с какой погрешностью, то его нельзя считать решением исходной задачи. Зачастую анализ погрешности численного метода оказывается сложнее реализации самого численного метода. Реализация численного метода в интерактивной системе, такой как Mathcad, усложняет эту проблему. Рассмотрим ее на примере одной из типовых задач – решения нелинейного уравнения [1, с. 2].

Задача. Пусть нелинейное уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень c , значение которого необходимо найти с заданной точностью ε , $\varepsilon > 0$.

Численное решение нелинейного уравнения сводится к вычислению элементов итерационной последовательности x_n , сходящейся к искомому корню c . Вычисления следует завершить тогда, когда расстояние от вычисленного элемента x_n до искомого корня c окажется меньше требуемой точности ε :

$$|x_n - c| < \varepsilon$$

Чтобы удовлетворить это требование, используют полученное теоретически оценочное соотношение. Для метода Ньютона оно имеет вид

$$|x_n - c| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|,$$

где

$$M_2 \geq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad 0 < m_1 \leq \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

то есть требуемая точность ε будет достигнута, если

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{2m_1}{M_2} \varepsilon.$$

Чтобы воспользоваться этим соотношением, необходимо подобрать числа m_1 и M_2 , что на практике, как правило, вызывает затруднение. При использовании численных методов подобные затруднения возникают часто.

При решении уравнения в Mathcad проблема оценки погрешности усугубляется. Ни одна из предлагаемых для этого функций не требует указывать точность результата. Точность результата регулируется системной (встроенной) переменной TOL. Вычисления завершаются, когда невязка – результат подстановки в уравнение очередного вычисленного элемента итерационной последовательности – станет меньше текущего значения переменной TOL. Чем меньше значение этой переменной, тем точнее найденное функцией приближенное значение корня. Для уравнения вида $f(x) = 0$ невязка равна $|f(r)|$, r – приближенное значение корня. В общем случае, нельзя утверждать, что, если невязка меньше TOL, то и погрешность найденного приближенного значения корня меньше TOL. Так, для функции $f(x)$ с малым угловым коэффициентом касательной в окрестности искомого корня это утверждение неверно.

Литература

1. Каменская, Н. Е. Численное решение нелинейных уравнений и систем: теория и практика : методические рекомендации / Н. Е. Каменская. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2015. – 24 с.