

БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИВЕРГЕНЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕНТРА

Н. П. Морозов

(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»,
кафедра математики и информатики)

Возможные бифуркации квадратичной системы изучены и наиболее полно представлены в [1]. Целью данного исследования является изучение влияния преобразования подобия на принятую в [5] при вычислении фокусных величин структуру параметров системы. Изучается также роль параметров дивергенции при глобальных бифуркациях, определены бифуркационные значения этих параметров и рассмотрена динамика бифуркаций квадратичной системы в одном из случаев наличия у системы состояний равновесия типа центр.

Представим квадратичную систему (см. [2], [3])

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) \end{cases} \quad (1)$$

в следующем виде ($H - \sigma$ вид)

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + x\sigma(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + y\sigma(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

Здесь естественный гамильтониан квадратичной системы

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + y^2) + \frac{1}{6}(a_{02}y^3 + \mu_{10}x^2y + \mu_{01}xy^2 - b_{20}x^3),$$

а величина $\sigma(x, y) = \frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)$ определяется по дивергенции системы. Пусть гамильтониан изначально имеет канонический вид $\mu_{00} = 0$, $a_{01} = 1$, $b_{10} = -1$. В развернутом $H - \sigma$ виде квадратичная система (2) запишется так

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{6}(3a_{02}y^2 + \mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right), \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{6}(-3b_{20}x^2 + 2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right) \end{cases} \quad (3)$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов системы (3):

$$b_{20} = \gamma \cos \beta, \quad a_{02} = \gamma \sin \beta, \quad \mu_{01} = 3b_{20} + \lambda \sin \alpha, \quad \mu_{10} = -3a_{02} + \lambda \cos \alpha, \quad \sigma_{10} = r \cos \theta, \quad \sigma_{01} = r \sin \theta.$$

Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{\gamma}{2} \sin \beta (y^2 - x^2) + \gamma \cos \beta xy + \lambda \left(\frac{1}{3} y x \sin \alpha + \frac{1}{6} x^2 \cos \alpha \right) + x \left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right), \\ \dot{y} = -x + \frac{\gamma}{2} \cos \beta (x^2 - y^2) + \gamma \sin \beta xy - \lambda \left(\frac{1}{3} \cos \alpha xy + \frac{1}{6} \sin \alpha y^2 \right) + y \left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right) \end{cases} \quad (4)$$

В работе [4] описан алгоритм вычисления фокусных величин полиномиальных систем, в основе которого лежит специальное их представление в виде (2). В работе [5] для системы (4) вычислены три фокусные величины. В данной работе изучается зависимость параметров системы (4) и фокусных величин при преобразовании поворота на угол τ . Доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Преобразование поворота на угол τ не меняет принятой структуры коэффициентов системы

(4). При этом новые значения параметров имеют вид: $\bar{a}_{02} = \gamma_1 \sin \beta_1$, $\bar{b}_{20} = \gamma_1 \cos \beta_1$, $\bar{\mu}_{01} = 3\bar{b}_{20} + \lambda_1 \sin \alpha_1$, $\bar{\mu}_{10} = -3\bar{a}_{02} + \lambda \cos \alpha_1$, $\bar{\sigma}_{10} = r_1 \cos \theta_1$, $\bar{\sigma}_{01} = r_1 \sin \theta_1$. Здесь

$$\begin{aligned} \bar{a}_{02} &= \gamma_1 \sin \beta_1 = \gamma \cos(\tau + \beta) \sin 2\tau + (\gamma \sin(\tau + \beta) - \frac{1}{2}\lambda \cos(\tau + \alpha)) \cos 2\tau, \\ \bar{b}_{20} &= \gamma_1 \cos \beta_1 = \gamma \cos(\tau + \beta) \cos 2\tau - (\gamma \sin(\tau + \beta) - \frac{1}{2}\lambda \cos(\tau + \alpha)) \sin 2\tau, \\ \bar{\mu}_{01} &= 3\bar{b}_{20} + \lambda \sin(\alpha - \tau), \quad \bar{\mu}_{10} = -3\bar{a}_{02} + \lambda \cos(\alpha - \tau), \\ \alpha_1 &= \alpha - \tau, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad r_1 = r, \quad \theta_1 = \theta + \tau, \quad \cos \beta_1 = \frac{\bar{b}_{20}}{\gamma_1}, \quad \sin \beta_1 = \frac{\bar{a}_{02}}{\gamma_1}, \quad \beta_1 = 2\tau + \bar{\beta}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \cos \bar{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma_1} \cos(\tau + \beta), \quad \sin \bar{\beta} = \frac{\gamma \sin(\tau + \beta) - \lambda \frac{1}{2} \cos(\tau + \alpha)}{\gamma_1}.$$

В частности при $\lambda = 0, \gamma_1 = \gamma, \beta_1 = \beta + 3\tau$.

Лемма 2. После преобразования поворота на угол τ фокусные величины примут вид:

1) $\sigma_{00} = 0, L_1 = -\frac{\pi}{24} r \lambda \sin(\theta + \alpha);$

2) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\lambda = 0$) $\Rightarrow L_2 = -\frac{\pi}{216} \gamma r^3 \cos(\beta - 3\theta);$

3) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = 0$ (при $\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi, k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3\} \Rightarrow L_n = 0$ при $n \geq 3$.

4) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$) \Rightarrow

$$L_2 = -\frac{\pi}{\kappa_{012}} r(8r^2 + 14r\lambda + 5\lambda^2)(4\gamma_1 \cos(3\theta + \tau - \beta) - \lambda \sin(4\theta + 4\tau));$$

5) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $4\gamma_1 \cos(3\theta + \tau - \beta) - \lambda \sin(4\theta + 4\tau) = 0$) $\Rightarrow L_n = 0$ при $n \geq 3$; – центр.

6) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$) \Rightarrow

$$L_3 = -\frac{25\pi\gamma_1\lambda^3}{65536} (4\gamma_1 \cos(3\theta + \tau - \beta) - \lambda \sin(4\theta + 4\tau)) (2\gamma_1 - \lambda \sin(\theta + 3\tau + \bar{\beta})).$$

7) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$) $L_3 = 0$,

(при $2\gamma_1 - \lambda \sin(\theta + 3\tau + \bar{\beta}) = 0$) $\Rightarrow L_n = 0$ при $n \geq 3$; – центр.

8) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{1}{2}\lambda$) $\Rightarrow L_3 = 0$.

Особый интерес представляет случай, когда $\tau = -\theta$.

Лемма 3. После преобразования поворота на угол $\tau = -\theta$ параметр θ переходит в гамильтониан. Фазовый портрет гамильтоновой системы при увеличении параметра θ и фиксированных остальных параметрах вращается по часовой стрелке. Дисперсия зависит при этом только от параметра r (при $\sigma_{00} = 0$). Фокусные величины после преобразования поворота на угол $\tau = -\theta$ в случаях 1) – 3) леммы 2 остаются неизменными, а в остальных случаях принимают вид:

4) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $\Rightarrow L_2 = -\frac{\pi\gamma_1}{1728} r(8r^2 + 14r\lambda + 5\lambda^2) \cos \beta_1$;

5) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $\gamma_1 \cos \beta_1 = 0$) $\Rightarrow L_n = 0$ при $n \geq 3$; – центр.

6) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$) \Rightarrow

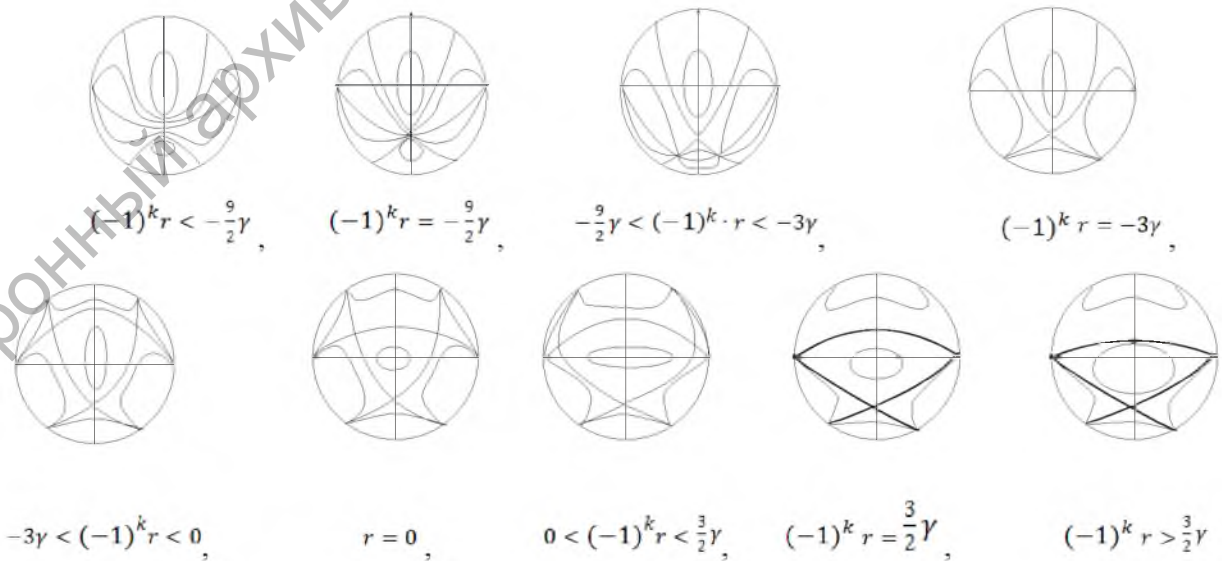
$$L_3 = -\frac{25\pi\gamma_1^2\lambda^3}{13884} \cos \beta_1 (2\gamma_1 - \lambda \sin \beta_1);$$

7) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$), $L_3 = 0$,

(при $2\gamma_1 - \lambda \sin \beta_1 = 0$) $\Rightarrow L_n = 0$ при $n \geq 3$; – центр.

8) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\alpha = -\theta$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{1}{2}\lambda$) $\Rightarrow L_3 = 0$.

Теорема. Пусть $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = 0$ (при $\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi, k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3\}$). Состояние равновесия $O(0; 0)$ системы (4) является центром. Система имеет три глобальных бифуркационных значения параметра дивергенции r : $(-1)^k r = -\frac{9}{2}\gamma$, $(-1)^k r = -3\gamma$, $(-1)^k r = \frac{3}{2}\gamma$. Смена фазовых портретов для четного k при изменении параметра r от $-\infty$ до $+\infty$ показана на рисунке. При k нечетном следует повернуть все фазовые портреты относительно центра круга Пуанкаре на угол π .



Литература

1. Reyn, J. Phase Portraits of planar quadratic systems / J. Reyn. – Springer. – 2007. – 333 с.
2. Морозов, Н. П. О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.
3. Морозов, Н. П. Приведение автономных систем на плоскости к специальному виду. Естественный гамильтониан системы / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2016. – № 1(47). – С. 32–42.
4. Морозов, Н. П. Вычисление фокусных величин полиномиальных систем в обобщенных полярных координатах / Н. П. Морозов // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания : сборник научных статей науч.-практ. конф., посвященной 100-летию МГУ имени А. А. Кулешова, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2013. – С. 92–94.
5. Морозов, Н. П. Интегралы квадратичной системы в случае центра / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2013. – № 2(42). – С. 45–56.