УДК 517.925.42

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С НЕЛИНЕЙНОЙ СИЛОЙ ТРЕНИЯ И МАКСИМАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА»

И. Н. Сидоренко
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра математики и информатики)

В данной работе рассмотрено решение ослабленной проблемы Гильберта для семейства систем Льенара с нелинейным трением и восстанавливающей силой в виде полинома пятой степени. Предложен алгоритм построения систем с заданным

распределением предельных циклов «нормального размера». Для построения систем с заданным количеством предельных циклов используется прогнозный метод [1] *и метод возмущения кратного фокуса* [2]. *Получены системы со следующими распределениями предельных циклов* (((1,0),1),1), (((0,0),1),1), (((0,0),2),0), (((0,0),0),2), (((0,0),0),3), (((0,0),0),4).

В работе рассматривается система Льенара:

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y, \tag{1}$$

где $f(x)$ – полином степени k = 1, 2, 3, 4, а

$$g(x)=x(1-x)(1-Kx)(1-Lx)(1-Mx),\ \ -1<L<0,\ \ 0<K<M<1.$$

При таких значениях параметров рассматриваемая система имеет три антиседла и два седла. Результаты исследований [1, 2, 3] можно естественным образом обобщить на случай пяти особых точек. Метод основан на гипотезе Смейла, по которой число предельных циклов системы (1) равно числу положительных нулей функции $\varphi(u)=\tilde F(u)-\tilde F(-u)$, где $\tilde F(u)=F(\varphi(u))$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $\varphi(u)$ – функция, обратная функции $u=\sqrt{2G(x)}sign(x)$, $G(x)=\int_0^x g(t)dt$. Число положительных нулей функции $\varphi(u)$ равно числу решений системы

$$G(x)=G(y),\quad F(x)=F(y),\quad x<0,\quad y>0, \tag{2}$$

то есть задача оценки числа предельных циклов системы (1) сводится к алгебраической задаче исследования решений полиномиальной системы. Этим же методом строятся системы (1) с распределениями предельных циклов, изображенных на рисунке 1.

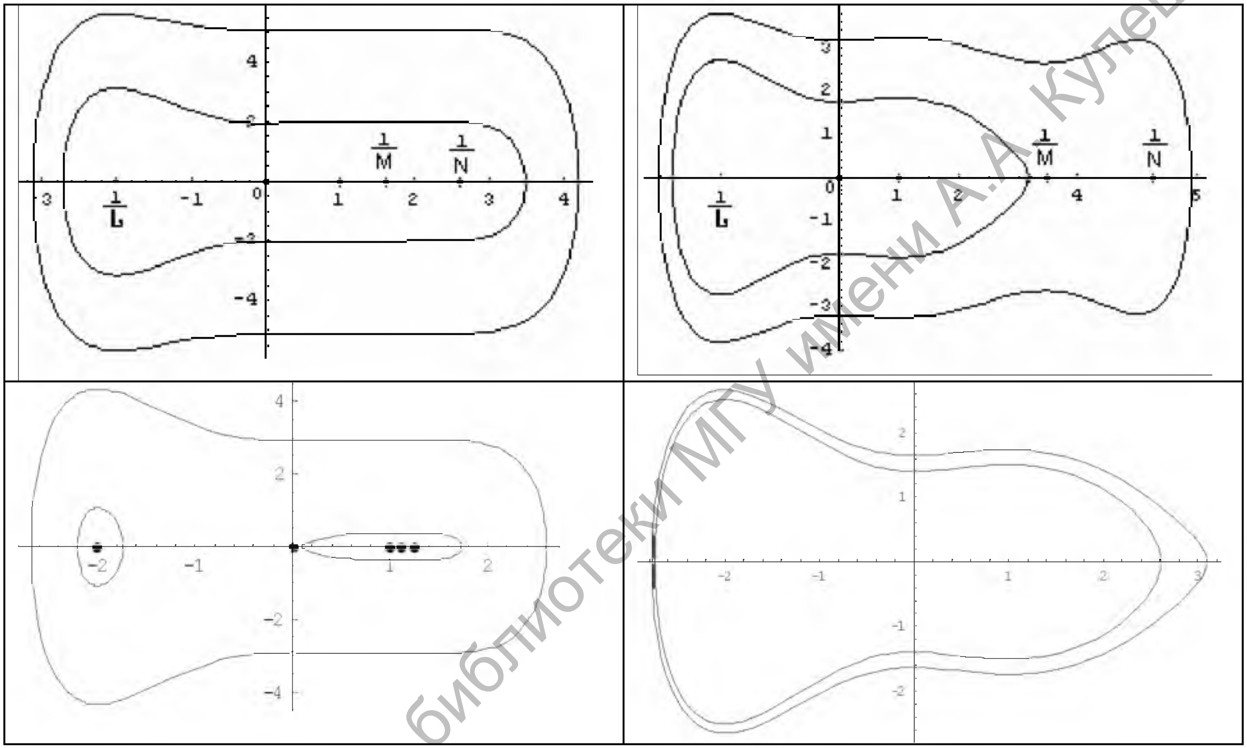
При исследовании систем, полученных описанным выше способом, возникают ситуации, когда предельные циклы располагаются в фазовом пространстве в непосредственной близости друг к другу, что значительно усложняет численный эксперимент. «Улучшить» такие системы можно с помощью метода, основанного на возмущении негрубого фокуса [2]. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y,a),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y,a), \tag{3}$$

где P, Q – многочлены некоторой степени, a – вектор их коэффициентов. Пусть при $a = a_0$ система (3) имеет негрубый фокус O (0,0) кратности k. Тогда можно определить функцию последования Д(x_0, a) = $x(T, x_0, a) - x_0$, где $x(t)$, $y(t)$ – решение системы (3), $x(0) = x_0$, $y(0)=0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки O (0,0). Выберем на промежутке $I = [p, q]$, $p > 0$ точки $x_1,...,x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x_i,a_0 + \Delta a)$, $x\in I$, Δ_a некоторое возмущение системы (3). Разложим функцию последования в ряд Тейлора в окрестности точки a_0, учитывая, что $\Delta(x_i,a^0)\neq 0$, т. к. траектории в окрестности a_0 являются спиралями. Тогда $\Delta(x_i,a^0+\Delta a)=\Delta(x_i,a^0)+\sum_{j=1}^{n}tp(i,j)\Delta a_j+o(\Delta a)$, где $tp(i,j)=\dfrac{\partial\Delta(x_i,a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Как известно [4], вопрос о числе предельных циклов у системы (3) эквивалентен вопросу о числе достаточно малых действительных корней функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 положительна (отрицательна) и т. д. При этом Δa должны быть достаточно малыми, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L\to\min,\ \pm(-1)^i\left(\Delta(x_i,a^0)+\sum_{j=1}^{n}tp(i,j)\Delta a_j\right)\geq 0,\ i=\overline{1,k+1},\ \left|\Delta a_j\right|\leq L. \tag{4}$$

В неравенствах (4) выбираем знак «плюс», если фокус неустойчивый, и знак «минус» – в противном случае. Если задача (4) имеет решение $\Delta a=\Delta a^*$, L = L^*, то проверяем неравенства $(-1)^i\Delta(x_i,\Delta a^*)>0$, $i=\overline{1,k+1}$, если они выполняются, то система (3) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и Δa^* велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и Δa^* сравнительно небольшое, то систему можно «улучшить», взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$ сделав, таким образом, процесс «улучшения» итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x,\ a_0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.



Различные распределения предельных циклов системы Льенара (1) с пятью особыми точками

Литература

1. Сидоренко, И. Н. О построении функции предельных циклов для системы Льенара с четырьмя особыми точками / И. Н. Сидоренко // Итоги научных исследований ученых МГУ имени А. А. Кулешова 2015 г. : материалы научно-методической конференции / под ред. Е. К. Сычовой. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2016. – С. 149–152.
2. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2009. – № 4 (34). – С. 167–174.
3. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы “нормального размера” некоторых полиномиальных систем Льенара / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2007. – № 1 (26). – С. 163–170.
4. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 419 с.