УДК 514

Д. М. Фрейверт,
г. Хайфа, Израиль

НОВАЯ ТЕМА В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ: ТЕОРИЯ «ТОЧЕК ПАСКАЛЯ», ФОРМИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ ОКРУЖНОСТИ НА СТОРОНАХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Излагаются фрагменты новой темы в евклидовой геометрии. Из более 40 свойств темы приведены Основная теорема и 12 избранных свойств, наиболее подходящих для обучения школьников. Часть свойств выполняется для любого четырехугольника, часть — для вписанного в окружность, и часть — для четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

Ключевые слова: выпуклый четырехугольник; окружность; точки Паскаля на сторонах четырехугольника; окружность, формирующая точки Паскаля; окружность точек Паскаля; четырехугольник (прямоугольник), вписанный в четырехугольник.

Введение

Одна из важных задач школьного математического образования — найти способы ознакомить учеников с новыми открытиями в области математики и тем самым изменить их неверные представления о ней как о науке старой и полностью исследованной, и привести к пониманию того, что математика это динамически развивающаяся область знания. Трудность в реализации этой задачи состоит в том, что обычно существует очень большой разрыв между теми проблемами, которые исследуются современной математикой, и той основой математики, которая изучается в школе. Во многом такое положение верно и в области геометрии — области, которая исследуется уже на протяжении тысячелетий. Большинство современных исследований в геометрии далеки от того, что изучается в школе. В то же время геометрия не исчерпывается лишь теми темами, которые известны и разработаны к настоящему времени.

Наше исследование показало, что можно найти новые темы даже в области евклидовой геометрии на плоскости, причем такие, которые допускают простые наглядные интерпретации, доступные для понимания школьниками. Разработанная нами теория выпуклого четырехугольника и окружности, формирующей на его сторонах особые точки (называемые «точками Паскаля»), исследует положение, при котором осуществляется новый вид связи между этими фигурами: связи, которая не исследовалась в прошлом. Результаты проведенного исследования опубликованы в последние 4 года. Многие из результатов (теорем) наглядны и доступны для школьников. Часть из них имеет «школьные» доказательства, то есть такие, в которых используются известные ученикам методы. Поэтому возможно и полезно ознакомление с ними учеников в рамках кружковых или факультативных занятий. В продолжение обучения ученикам могут быть предложены задания на применение рассмотренных свойств и, в частности, задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Избранные результаты.

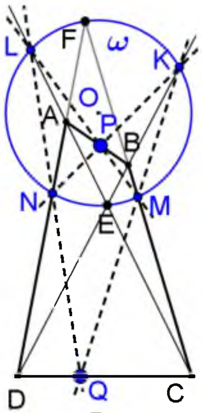

Рис. 1

В новой теме исследуется геометрическая ситуация, в которой даны выпуклый четырехугольник $ABCD$, не являющийся параллелограммом, и окружность ω, удовлетворяющая следующим двум требованием: (i) ω проходит через точку E пересечения диагоналей четырехугольника и точку F пересечения продолжений сторон BC и AD; (ii) ω пересекает стороны BC и AD в их внутренних точках (M и N на рис. 1). В дополнение, пусть K и L — точки пересечения ω с продолжением диагоналей соответственно BD и AC. В указанной геометрической ситуации выполняется следующая **основная теорема** (см. [1], [2]):

Прямые KN и LM пересекаются в точке (P на рис. 1), *принадлежащей стороне AB, прямые KM и LN пересекаются в точке* (Q на рис. 1), *принадлежащей стороне CD.*

Определения:

(1) Точки P и Q будем называть **«точки Паскаля на сторонах *AB* и *CD* четырехугольника».**

(2) Любую окружность, удовлетворяющую требованием (i) и (ii), будем называть **«окружность, формирующая точки Паскаля на сторонах *AB* и *CD* четырехугольника»** (см. [2]).

Легко доказывается, что, если для четырехугольника $ABCD$ существует «окружность, формирующая точки Паскаля на сторонах AB и CD», то существует бесконечно много таких окружностей.

Обозначим множество всех таких окружностей следующим образом: $\{\omega\}$.

В дальнейшем будем использовать следующие общие данные: *$ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором E — точка пересечения диагоналей, F — точка пересечения продолжений сторон BC и AD; ω_i — произвольная* *окружность с центром O_i, проходящая через точки E и F и через внутренние точки M_i и N_i сторон BC и AD соответственно; P_i и Q_i — точки Паскаля, образованные с помощью ω_i на сторонах AB и CD.* (3) Четырехугольник $P_iM_iQ_iN_i$ будем называть **«четырехугольник, определяемый окружностью ω_i, формирующей точки Паскаля»**.

<u>4 свойства, выполняемые в любом выпуклом четырехугольнике.</u>

<u>Свойство 1</u>. *Для любых трех окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 из множества $\{\omega_i\}$ выполняется:* $\frac{P_1P_2}{P_2P_3}=\frac{Q_1Q_2}{Q_2Q_3}=\frac{O_1O_2}{O_2O_3}$ (см. [2] и рисунок 2), *т. е. точки Паскаля на стороне AB, точки Паскаля на стороне CD и центры окружностей образуют пропорциональные отрезки.*

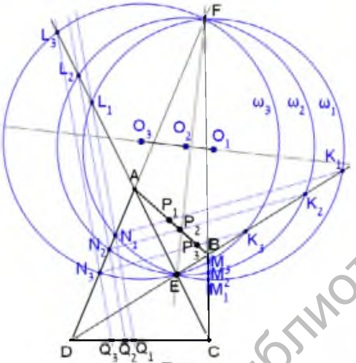

Рис. 2

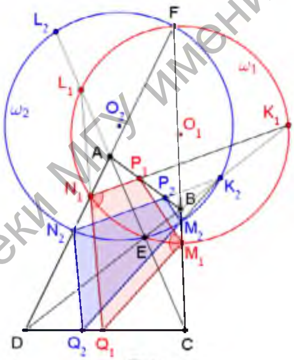

Рис. 3

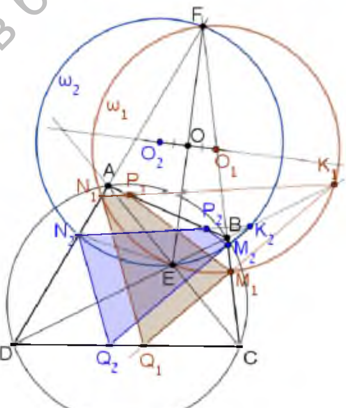

Рис. 4

Свойство 2. *Для любых двух окружностей* $\{\omega_1\}$ *и* $\{\omega_2\}$ *из множества* $\{\omega_i\}$, *определяемые ими четырехугольники* $P_1M_1Q_1N_1$ *и* $P_2M_2Q_2N_2$ *имеют соответственно параллельные стороны* (см. [2] и рис. 3).

Свойство 3. *Если точки Паскаля* P_i *и* Q_i, *сформированные окружностью* ω_i, *коллинеарны с ее центром* O_i, *то четырехугольник* $P_iM_iQ_iN_i$, *определяемый* ω_i, *является дальтоном* (см. [2]).

Свойство 4. *В каждом четырехугольнике* $P_iM_iQ_iN_i$, *вписанном в четырехугольник ABCD и определяемом окружностью* ω_i, *противоположные углы при вершинах* M_i *и* N_i *равны* (см. рис. 3).

3 свойства, выполняемые для вписанного в окружность четырехугольника

Свойство 5. *Для любых двух окружностей* ω_1 *и* ω_2 *из множества* $\{\omega_i\}$ *определяемые ими четырехугольники* $P_1M_1Q_1N_1$ *и* $P_2M_2Q_2N_2$ *имеют равные периметры* (см. [3] и рисунок 4).

Свойство 6. *Пусть окружность* ω_{EF} *диаметра EF. пересекает стороны BC и AD в точках* M_0 *и* N_0 *и формирует точки Паскаля* P_0 *и* Q_0 *на сторонах AB и CD. Тогда выполняются следующие свойства* (см. [3]): (a) *Точки* P_0 *и* Q_0 *коллинеарные с центром O окружности* ω_{EF};

(b) *Точки* P_0 *и* Q_0 *середины сторон соответственно AB и CD*;

(b) *Точки* P_0 *и* Q_0 *середины сторон соответственно AB и CD*;

(c) *Четырехугольник* $P_0M_0Q_0N_0$ *является дальтоном* (см. рис. 5);

(d) *Среди всех четырехугольников* $P_iM_iQ_iN_i$, *определяемых окружностями из множества* $\{\omega_i\}$, *дальтон* $P_0M_0Q_0N_0$ *имеет максимальную площадь.*

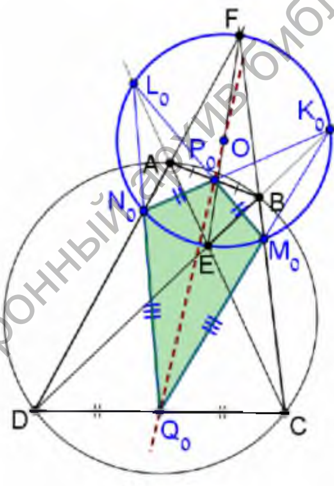

Рис. 5

Свойство 7. (см. [6]). *Пусть* ω_1 *и* ω_2 — *две окружности из множества* $\{\omega_i\}$ *и пусть O — середина отрезка EF. Если для центров* O_1 *и* O_2 *окружностей* ω_1 *и* ω_2 *выполняется условие* $OO_1 = OO_2$ (см. рис. 4), *то определяемые окружностями четырехугольники* $P_1M_1Q_1N_1$ *и* $P_2M_2Q_2N_2$ *конгруэнтны.*

5 свойств, выполняемых для четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями

Пусть P_i и Q_i — точки Паскаля, сформированные с помощью окружности ω_i на сторонах *AB* и *CD*. **Окружность** $\sigma_{P_iQ_i}$ **с диаметром** P_iQ_i **будем называть “окружностью точек Паскаля** P_i **и** Q_i**”.**

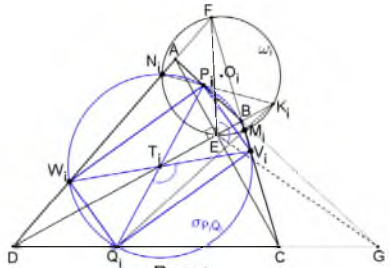

Рис. 6

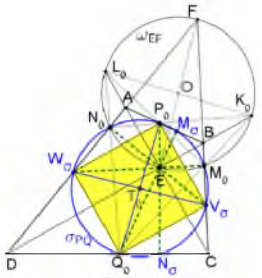

Рис. 7

<u>Свойство 8.</u> *Пусть окружность* ω_i *пересекает стороны* BC *и* AD *в точках* M_i *и* N_i *и формирует точки Паскаля* P_i *и* Q_i *на сторонах* AB *и* CD. *Тогда выполняются следующие свойства* (см. [5]):(a) *Окружность точек Паскаля* $\sigma_{P_iQ_i}$ *пересекает сторону* BC *в точках* M_i *и* V_i *и сторону* AD *в точках* N_i *и* W_i *(точки* M_i *и* V_i *или* N_i *и* W_i *могут совпадать)*;

(b) *Отрезок* V_iW_i *является диаметром окружности* $\sigma_{P_iQ_i}$;

(c) *Четырехугольник* $P_iV_iQ_iW_i$ *является прямоугольником, вписанным в четырехугольник* $ABCD$ (см. рисунок 6).

<u>Свойство 9.</u> *Существует бесконечно много прямоугольников* $P_iV_iQ_iW_i$, *вписанных в четырехугольник* $ABCD$ *и определяемых парами окружностей* ω_i *и* $\sigma_{P_iQ_i}$ (P_i *и* Q_i *формируются с помощью* ω_i) (см. [5]).

Обозначим множество этих прямоугольников следующим образом: $\mathbb{M}_{\odot}$.

<u>Свойство 10</u> (см. [5]. *Пусть* P_0 *и* Q_0 *— точки Паскаля, формируемые окружностью* ω_{EF} *на сторонах* AB *и* CD. *Тогда выполняются следующие свойства*:

(a) *Окружность точек Паскаля* $\sigma_{P_0Q_0}$ *пересекает* $ABCD$ *в следующих 8 точках: сторону* AB *в точках* P_0 *и* M_σ, *сторону* BC *в точках* M_0 *и* V_σ, *сторону* CD *в точках* Q_0 *и* N_σ *и сторону* AD *в точках* N_0 *и* W_σ ;

(b) *Хорды* $V_\sigma N_0$, $M_\sigma M_0$, $M_\sigma Q_0$ *и* $N_\sigma P_0$ *окружности* $\sigma_{P_0Q_0}$ *пересекаются в точке* E (см. рисунок 7).

<u>Свойство 11.</u> Если в четырехугольнике $ABCD$ пересекаются также стороны AB и CD (в точке G), то выполняется: *Для всех прямоугольников из множества* $\mathbb{M}_{\odot}$ *угол между диагоналями есть величина постоянная, не зависящая от выбора окружности* ω_i, *а именно, угол* $V_iT_iQ_i$ *между диагоналями прямоугольника* $P_iV_iQ_iW_i$ *равен углу* EFG (см. рис. 6).

<u>Свойство 12.</u> *Среди всех прямоугольников из множества* $\mathbb{M}_{\odot}$ *прямоугольник, определяемый с помощью окружностей* ω_{EF} *и* $\sigma_{P_0Q_0}$:

(a) *имеет минимальные периметр и площадь*;

(b) *является единственным прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям четырехугольника* $ABCD$.

Список использованной литературы

1. Фрейверт, Д. М. Индуктивно-дедуктивное исследование одной геометрической ситуации / Д. М. Фрейверт // Математическое образование современное состояние и перспективы (к 95-летию со дня рождения А. А. Столяра) : материалы Международной научной конференции, 19–20 февраля 2014 г., МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. – С. 32–36.
2. Fraivert, D., The theory of a convex quadrilateral and a circle that forms «Pascal points» – the properties of «Pascal points» on the sides of a convex quadrilateral, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 2016, 40, 1–34. http://dx.doi.org/10.18642/jmsaa_7100121666.
3. Fraivert, D. The Theory of an Inscribable Quadrilateral and a Circle that Forms Pascal Points, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 2016, 42, 81–107. http://dx.doi.org/10.18642/jmsaa_7100121742.
4. Fraivert, D., Properties of the Tangents to a Circle that Forms Pascal Points on the Sides of a Convex quadrilateral, *Forum Geometricorum*, 2017, 17, 223–243. http://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201726.pdf.
5. Fraivert, D. Properties of a Pascal points circle in a quadrilateral with perpendicular diagonals, *Forum Geometricorum*, 2017, 17, 509–526. http://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201748.pdf.
6. Fraivert, D. Properties of a cyclic quadrilateral and the Pascal points on its sides, *The Mathematical Gazette*, 2019, in press.