УДК 517

Р. А. Мельников,
г. Елец, Россия

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕРО

В статье акцентируется внимание на содержательных и процессуальных компонентах конструирования занятия, посвященного изучению дифференциального уравнения Клеро. Основное внимание уделяется структуре общего и особого решений этого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Клеро, общее решение, особое решение.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка заметную роль играют уравнения, не разрешенные относительно производной. Одним из уравнений, относящихся к данному классу, является *дифференциальное уравнение Клеро*. К таким уравнениям приходят при решении некоторых геометрических задач, например, когда требуется определить кривую по какому-либо свойству ее касательной, не зависящему от положения точки касания. Кроме того, решение уравнений этого класса приводит к едва ли не лучшей иллюстрации такого важного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия, как *особое решение*. Изучение особых решений дифференциального уравнения Клеро подразумевает знакомство с такими понятиями, как «дискриминантная кривая» или «огибающая семейства кривых».

Начинать изучение уравнения Клеро следует с определения. Дифференциальным уравнением Клеро, называется уравнение вида

$$y=xy'+f\left(y'\right). \qquad (1)$$

Существует также неявная форма записи уравнения Клеро

$$F\left(y\text{-}xy';y'\right)=0. \qquad (2)$$

После этого следует сообщить некоторые исторические сведения, связанные с этим дифференциальным уравнением. Например, что названо оно в честь французского математика и астронома XVIII в. *Алексиса Клода Клеро* (1713–1765). Это уравнение вошло в научный оборот после публикации его труда «Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Équation donnée». Работа эта была напечатана в 1734 г. в мемуарах королевской академии наук Франции.

Следующим этапом изучения уравнений Клеро является выявление метода решения уравнений этого класса. Сначала следует подчеркнуть, что «уравнение Клеро» является частным случаем дифференциального уравнения Лагранжа, также относящегося к уравнениям, не разрешенным относительно производной. Так как изучение уравнения Лагранжа предшествует изучению уравнения Клеро, то получение решения (как общего, так и особого) должно происходить по уже известной схеме, а именно:

1. Полагая $y' = p$ и дифференцируя соотношение (1) по x, получают

$$y'=\left(xp+f\left(p\right)\right)_x' = p + x\cdot\frac{dp}{dx} + f'\left(p\right)\cdot\frac{dp}{dx}$$

или

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + f'(p) \cdot \frac{dp}{dx}$$

Откуда получается, что

$$\left(f'(p) + x\right) \cdot \frac{dp}{dx} = 0. \tag{3}$$

2. Уравнение (3) равносильно совокупности двух более простых дифференциальных уравнений $\frac{dp}{dx} = 0$ и $f'(p) + x = 0$.

3. Первое из этих уравнений позволяет установить общее решение уравнения Клеро. Ясно, что $p = c$, следовательно, $y = C \cdot x + f(C)$ — семейство прямых линий. Заметим, что это *характеристическое свойство* уравнения Клеро: общим решением дифференциального уравнения Клеро является семейство прямых линий, для получения которого достаточно в записи самого уравнения заменить y' на C.

4. Уравнение $f'(p) + x = 0$ приводит к *особому решению* (которое, как известно, нельзя выделить из общего решения ни при каком значении постоянной C). В этом случае «график» особого решения называют *огибающей* семейства прямых. Отдельно отметим тот факт, что через каждую точку этой кривой, проходит более одного решения.

Кроме того, заметим, что если дифференциальное уравнение Клеро задано в форме (2), то сначала рекомендуется выполнить *преобразование Лежандра* (см. подробнее книгу [2, с. 157–159]).

Далее рассмотрим геометрическую задачу, решение которой приводит к составлению и решению дифференциального уравнения Клеро:

найти кривую, касательные которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной 2 [1, с. 119–120].

Решение. Составим уравнение касательной «в отрезках», т. е.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b — отрезки, отсекаемые прямой (касательной) на координатных осях. В таком случае площадь треугольника записывается в виде $S = \frac{1}{2}ab$. Следовательно, $ab = 4$ или $b = \frac{4}{a}$, и тем самым получается семейство прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{ay}{4} = 1. \tag{4}$$

Далее следует исключить параметр a из уравнения полученного семейства, дифференцируя обе части последнего равенства по x. Получаем

$$\frac{1}{a}+\frac{ay'}{4}=0,\ a^2=\frac{-4}{y'},\ a=2\sqrt{\frac{-1}{y'}}.$$

Подставляя найденное значение a в равенство (4), будем иметь

$$\frac{x\sqrt{-y'}}{2}+\frac{y}{2\sqrt{-y'}}=1$$

или

$$y=xy'+2\sqrt{-y'}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой дифференциальное уравнение Клеро, записанное в форме (1).

Очевидно, что его общее решение — семейство прямых линий, определяемое формулой

$$y=Cx+2\sqrt{-C}. \qquad (6)$$

Далее можно либо решить уравнение вида $f'(p)+x=0$, которое, как мы знаем, приводит к особому решению, либо продифференцировать обе части равенства (6) по параметру C, чтобы в дальнейшем исключить этот параметр из уравнения, определяющего семейство прямых линий.

Действительно,

$$0=x-\frac{1}{\sqrt{-C}},\ C=-\frac{1}{x^2}.$$

Значит,

$$y=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x};\ y=\frac{1}{x};\ xy=1.$$

Таким образом, искомой кривой является равносторонняя гипербола $xy=1$.

В конце занятия следует решить несколько уравнений Клеро, сделав графическое изображение общего и особого решений.

Список использованной литературы

1. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – 10-е изд. – Москва : Издательство ЛКИ, 2008. – 472 с.
2. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – 3-е изд. – СПб : Лань, 2003. – 448 с.