УДК 372.851

*Я. С. Гриншпон,*
г. Томск, Россия

# ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ И ПРИ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

*Показывается, что логическое обоснование изучаемых школьниками фактов помогает учащимся как в освоении базового курса математики, так и при подготовке к математическим конкурсам и олимпиадам.*

**Ключевые слова:** математическая логика, обучение математике в школе, доказательство, теория чисел.

Отличительной чертой математического знания является возможность обоснования любого факта (теоремы), формулируемого в терминах изучаемого раздела математики, с помощью строгих логических рассуждений на основе небольшого числа непроверяемых исходных фактов (аксиом). Во многом именно эта отличительная черта является главной характеристикой, выделяющей математику среди других наук.

Значит, должно казаться естественным, чтобы в процессе обучения любому разделу математики знакомство со специальными правилами, формулами и теоремами изучаемой предметной области сопровождалось изучением логической структуры этой области, т. е. чтобы все применяемые факты либо обосновывались с некоторой допустимой для соответствующей возрастной группы степенью строгости, либо предоставлялись основные идеи такого доказательства (в случае его громоздкости или технической сложности), либо сообщались соответствующие исторические сведения. Однако в школьном курсе математики такая логически-последовательная и доказательная форма подачи материала присуща только геометрии. При освоении теоретико-числовых и алгебраических навыков логические рассуждения почти полностью либо опущены, либо заменены на приведение ряда примеров (т. е. неполная индукция). Данная проблема была отмечена еще в 1965 г. А. А. Столяром в [1].

Особо ярко бездоказательный подход проявляется при изучении свойств натуральных чисел, примерами здесь могут служить алгоритмы выполнения арифметических действий «в столбик», основная теорема арифметики, признаки делимости и т. д. Важно отметить, что с методической точки зрения значительную трудность представляет не только само обоснование этих утверждений на доступном для учеников 5–6 классов уровне, но и обоснование необходимости доказательства таких, казалось бы, «абсолютно очевидных», правил, да и еще подкрепляемых большим числом примеров. Здесь могут помочь модели, в которых аналоги доказываемых утверждений неверны. Например, в недесятичных системах счисления не выполняются привычные нам признаки делимости (но зато работают другие признаки). Например, в $p$-ичной системе признаки делимости на делители числа ($p$ – 1) совпадают с признаками делимости на 3 и 9 в десятичной системе, такие наблюдения могут привести к идее общего доказательства, верного для любой позиционной системы. Вопрос о единственности разложения натуральных чисел на простые множители становится естественным, если рассмотреть подмножество тех натуральных чисел, которые дают остаток один при делении на 4. В этом подмножестве 441 = 21·21 = 9·49, т.е. разложение не единственно.

В [2] показано, как можно доступно обосновать корректность алгоритмов сложения, вычитания и умножения «в столбик» и деления «уголком». Более того, как и в случае с признаками делимости, это обоснование дает дополнительный результат: облегчает в дальнейшем освоение навыков работы с многочленами от одной переменной.

Безусловно, требовать абсолютной приверженности курса школьной математики аксиоматическому методу безрассудно. Строгое построение основных числовых систем даже у студентов математических специальностей вызывает затруднения! Но принципиальная возможность такого построения, а значит, и возможность проверки любого утверждения о числах (рассказанного ли учителем, напечатанного ли в учебнике, или найденного в интернете) является важной концептуальной идеей, познакомиться с которой должен каждый и грамотный культурный человек!

Точность и однозначность формулировок, являющихся неотъемлемыми признаками дедуктивного рассуждения, важны в любой сфере человеческой деятельности, но сейчас они приобрели особую актуальность в связи с бурным развитием математического и компьютерного моделирования.

Другим следствием прогресса в IT-сфере стало увеличение числа школьников, интересующихся компьютерными технологиями. Поэтому у многих учеников находит живой отклик проведение параллелей между школьными курсами математики и информатики. Этот прием эффективен при объяснении логических математических конструкций, при изучении десятичной записи натуральных чисел и при решении задач, допускающих конечный перебор ([3]), так как эти вопросы тесно взаимосвязаны с такими разделами курса информатики, как элементы математической логики, системы счисления, алгоритмизация и программирование.

Знакомство на информатике учащихся с формальной логикой и языками программирования (которые являются формальными языками) открывает возможность для доказательства теорем на формально-логическом языке. Однако учащиеся лучше усваивают доказательства на естественном языке. Поэтому видится целесообразным формулировать теоремы и их доказательства на естественном языке, возможно, поясняя при этом некоторые моменты правилами формальной логики. Наиболее актуальны такие пояснения при применении метода доказательства от противного, так как построение отрицания высказывания, содержащего логические операции и кванторы, часто оказывается непреодолимым препятствием для многих учеников. Да и сам метод доказательства от противного становится прозрачнее, если его пояснить на основе закона исключенного третьего.

Также весьма полезным оказывается обращение к законам логики при пояснении принципов, по которым для математически корректного решения достаточно (или наоборот недостаточно) приведения примера или контрпримера. Эти вопросы не обязательно объяснять на формальном языке, в средней школе (начиная с 5 класса) их можно доходчиво растолковать на естественном языке (например, как в [4]).

Необходимо заметить, что на уроке информатики не изучаются предикаты и кванторы. Тем не менее, при работе с ними на уроках математики можно опираться на известные ученикам свойства логических операций, трактуя квантор существования как дизъюнкцию, а квантор всеобщности — как конъюнкцию относительно множества значений связанной переменной.

При внеурочной работе с мотивированными школьниками (факультативы, кружки, олимпиадные тренинги и т. д.) развитие культуры логического мышления становится первоочередной задачей. Многие специальные методы решения олимпиадных задач основаны на применении законов логики (принцип Дирихле, оценка и пример, бесконечный спуск, дискретная непрерывность и т. д.). А без хорошей логической базы многим ученикам трудно не только решить задачу, но даже понять ее условие! Например, основная трудность следующей задачи состоит в правильном прочтении ее условия и формулировании отрицания к заключению: «Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдутся, по крайней мере, две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну» [5].

**Список используемой литературы**

1. Столяр, А. А. Логические проблемы преподавания математики [Текст] / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1965. – 254 с.

2. Гриншпон, Я. С. Алгоритмы выполнения арифметических действий над натуральными числами и над многочленами от одной переменной в школьном курсе математики [Текст] / Я. С. Гриншпон, А. Л. Лапатин // Дневник науки. – 2018. – № 3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.dnevniknauki.ru/images/publications/2018/3/pedagogics/Grinshpon_Lapatin.pdf
3. Гриншпон, Я. С. Особенности решения теоретико-числовых задач при изучении математики и информатики в школе [Текст] / Я. С. Гриншпон, Д. Д. Лемешко // Материалы Междунар. форума по мат. образ. «Н. И. Лобачевский и математическое образование в России». – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 2017. – С. 60–64.
4. Раскина, И. В. Логика для всех: от пиратов до мудрецов [Текст] / И. В. Раскина. – Москва : МЦНМО, 2017. – 202 с.
5. Интернет-проект «Задачи». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.problems.ru