УДК 372. 851:510

Б. Н. Дроботун,
г. Павлодар, Казахстан

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В данной заметке вводится понятие уравнения от одной переменной над произвольной алгебраической системой, определяются теоретико-множественные уравнения как уравнения над булевой алгеброй подмножеств непустого абстрактного множества и предлагаются частные и общие методы их решения.

Ключевые слова. Алгебраическая система, сигнатура, термальная операция, уравнение, алгебра подмножеств, формульный предикат.

Широкое применение методов алгебраических систем в математике обусловило необходимость введения применительно к этим системам различных аналогов тождеств, неравенств и уравнений, традиционно рассматриваемых над полем действительных чисел. Определение уравнения над произвольной алгебраической системой является естественным обобщением этих аналогов.

Пусть $M = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ — алгебраическая система [1] произвольной сигнатуры σ, $a_1; a_2; \ldots; a_n \in M$, $t_1 = t_1(x; x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $t_2 = t_2(x; x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — термы сигнатуры σ Формульный предикат $P(x)$:

$$({}^{\varphi}t_1(x; a_1; a_2;\ldots; a_n)={}^{\varphi}t_2(x; a_1; a_2;\ldots; a_n)) \quad (1)$$

будем называть уравнением от одной переменной x с «коэффициентами» $a_1; a_2; \ldots; a_n$ над системой $\boldsymbol{M}$.

По аналогии с понятием корня алгебраического уравнения

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = 0 \qquad (2)$$

элемент $a \in M$ будем называть решением (корнем) уравнения (1), если высказывание $P(a)$ является истинным, то есть если значения ${}^{\varphi}t_1(a; a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и ${}^{\varphi}t_2(a; a_1; a_2; \ldots; a_n)$ термальных операций ${}^{\varphi}t_1(x; a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и ${}^{\varphi}t_2(x; a_1; a_2; \ldots; a_n)$ при $x = a$ в системе $\boldsymbol{M}$ совпадают.

С проблемой решения уравнения (2) связывается проблема выражения корней этого уравнения через коэффициенты с помощью арифметических операций (то есть основных операций поля действительных чисел) и операций извлечения корней (то есть производных операций). Подобным образом, можно поставить задачу нахождения решений (корней) уравнения (1) и связать с ней задачу выражения этих решений через «коэффициенты» $a_1; a_2; \ldots; a_n$ этого уравнения с помощью основных и производных операций системы $\boldsymbol{M}$.

Рассматривая, в частности, вместо системы $\boldsymbol{M}$, булеву алгебру

$$\boldsymbol{B}(U) = \langle B(U); \cup; \cap; \overline{}; \emptyset; U \rangle \text{ —}$$

подмножеств некоторого непустого множества U, как алгебраическую систему сигнатуры $\sigma = \langle P_1^2; P_2^2; P_3^1; c_1; c_2 \rangle$, можно по схеме определения уравнений вида (1), определить уравнения от одной переменной над системой $\boldsymbol{B}(U)$, которые, в соответствии с природой элементов носителя этой системы, естественно назвать «теоретико-множественными» уравнениями.

Примером такого уравнения от переменной X с коэффициентами $A; B \in \boldsymbol{B}(U)$ является формульный предикат

$$((\overline{X \cap A}) \cap (\bar{X} \cup A)) = ((\bar{B} \cup A) \cap (X \cup (\overline{B \cap \bar{A}}))).$$

К наиболее применяемым методам решения алгебраических уравнений над полем действительных чисел можно отнести метод сведения этих уравнений к уравнениям простейших типов, множества решений которых находятся, в дальнейшем посредством применения алгоритмов канонического характера. По аналогии с этим, выделим ряд простейших теоретико-множественных уравнений, определим условия их совместности и дадим описания множеств их решений. Уравнения:

а) $(A \cup X) = X$; в) $(A \cup X) = A$; д) $(A \cup X) = B$;

б) $(A \cap X) = X$; г) $(A \cap X) = A$; е) $(A \cap X) = B$,

где $A; B \in \boldsymbol{B}(U)$, назовем простейшими «теоретико-множественными» уравнениями от переменной X.

Очевидно, что при любом $A \in U$ уравнения а) … г) совместны и множествами их решений являются, соответственно, множества

$$\boldsymbol{P}_1 = \{C/(C \in B(U))\&(A \subseteq C)\}; \quad \boldsymbol{P}_2 = \{C/(C \in B(U))\&(C \subseteq A)\};$$
$$\boldsymbol{P}_3 = \{C/(C \in B(U))\&(C \subseteq A)\}; \quad \boldsymbol{P}_4 = \{C/(C \in B(U))\&(A \subseteq C)\}$$

Из определения и свойств операций $\cup$, $\cap$ и $\bar{\ }$ непосредственно следует, что условиями совместности уравнений д) и е) являются, условия $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ соответственно. При выполнении этих условий множествами их решений являются множества

$$\boldsymbol{P}_5 = \{C/\big(C \in B(U)\big)\&((B \cap \bar{A}) \subseteq C \subseteq B)\}$$

и

$$\boldsymbol{P}_6 = \{C/\big(C \in B(U)\big)\&(B \subseteq C \subseteq (B \cup \bar{A}))\}.$$

Во многих случаях посредством тождественных преобразований левой и правой частей теоретико-множественных уравнений, их удается свести к одному из простейших уравнений, в которых в качестве коэффициентов A и B могут выступать любые сложные множества. После такого сведения, используя формальное строение множеств $\boldsymbol{P}_1$ … $\boldsymbol{P}_6$ — решений простейших уравнений, можно получить описания множеств решений исходных уравнений.

Переходя к изложению общего метода решения теоретико-множественных уравнений, напомним, что каждое такое уравнение представляется в виде одноместного формульного предиката

$$\boldsymbol{A}(A_1; \dots; A_n; X) = \boldsymbol{B}(A_1; \dots; A_n; X). \tag{3}$$

Далее приводятся предписания алгоритма решения этого уравнения.

1. Основываясь на утверждении $(A = B) \Leftrightarrow ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \emptyset)$, заменим уравнение (3) равносильным ему уравнением

$$(((\boldsymbol{A}(A_1; \dots; A_n; X) \cap \overline{\boldsymbol{B}(A_1; \dots; A_n; X)}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}(A_1; \dots; A_n; X)} \cap$$
$$\cap\, \boldsymbol{B}(A_1; \dots; A_n; X))) = \emptyset. \tag{4}$$

2. Приводя левую часть уравнения (4) к СДНФ, получим уравнение

$$\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;\sigma) \in \pi} (A_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n} \cap X^{\sigma}) = \emptyset, \quad \pi \subseteq E^{n+1};\ E = \{0;1\} \tag{5}$$

3. Учитывая, что $X^{\sigma} = \begin{cases} X, \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{X}, \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$ и применяя законы коммутативности и ассоциативности для операций $\cup$ и $\cap$, сгруппируем логические слагаемые, содержащие переменную X, и логические слагаемые, содержащие отрицание $\bar{X}$ этой переменной, то есть переходим от уравнения (5) к уравнению

$$\left(\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;1)\in\pi_1}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\cap X\right)\right)\cup$$

$$\cup\left(\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;0)\in\pi_2}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\cap\bar{X}\right)\right)=\emptyset, \pi_1\cap\pi_2=\emptyset, \pi_1\cup\pi_2=\pi. \quad (6)$$

4. Применяя обобщенные законы дистрибутивности операции $\cap$ относительно операции $\cup$, преобразовываем уравнение (6) к виду:

$$\left(\left(\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;1)\in\pi_1}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\right)\right)\cap X\right)\cup$$

$$\cup\left(\left(\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;0)\in\pi_2}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\right)\right)\cap\bar{X}\right)=\emptyset, \quad (7)$$

то есть в первом слагаемом левой части уравнения (6) «выносим за скобки» переменную X, а во втором – ее отрицание $\bar{X}$.

5. От уравнения (7) переходим, основываясь на утверждении

$$(A\cup B=\emptyset)\Leftrightarrow((A=\emptyset) \text{ и } (B=\emptyset))),$$

к равносильной этому уравнению системе двух уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)\cap X=\emptyset;\\ \boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)\cap\bar{X}=\emptyset,\end{cases} \quad (8)$$

где $\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)=\bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;1)\in\pi_1}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\right)$ и

$\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n) == \bigcup_{(\sigma_1;\dots;\sigma_n;0)\in\pi_2}\left(A_1^{\sigma_1}\cap\dots\cap A_n^{\sigma_n}\right)$.

Используя равносильность $((A\cap B=\emptyset)\Leftrightarrow(B\subseteq\bar{A})$, из первого уравнения системы (8) получаем, что $X\subseteq\overline{\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)}$, а из второго, что $\bar{X}\subseteq\overline{\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)}$ или $\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)\subseteq X$. Из этих включений следует, что

$$\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)\subseteq X\subseteq\overline{\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)}. \quad (9)$$

Соотношение (9) показывает, что система (8) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)\subseteq\overline{\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)}. \quad (10)$$

При выполнении условия (10), множество $\boldsymbol{P}$ всех решений системы (8), а, следовательно, и исходного уравнения (3) будет иметь вид:

$$\boldsymbol{P}=\{D/\boldsymbol{C}(A_1;\dots;A_n)\subseteq D\subseteq\overline{\boldsymbol{B}(A_1;\dots;A_n)}\}.$$

Список использованной литературы

1. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – Москва : Наука, 1970. – 392 с.