УДК 512.563 + 378.147

С. В. Костин,
г. Москва, Россия

ТОЖДЕСТВА БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ И ЛОГИЧЕСКИЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ

Рассмотрен метод доказательства тождеств алгебры множеств (теоретико-множественных тождеств), который основан на замене этой задачи на задачу доказательства определенной логической равносильности. Отмечена роль известного математика и педагога И. М. Яглома в популяризации теории булевых алгебр.

Ключевые слова: алгебра множеств, алгебра высказываний, И. М. Яглом.

На протяжении последнего времени прослеживается тенденция к постепенному увеличению доли так называемых «дискретных», или «конечных», разделов математики (таких как комбинаторика, теория графов, кодирование и др.) в общем объеме математических знаний, которые преподаются студентам университетов и технических вузов. В значительной степени это связано, по-видимому, с развитием вычислительной техники, поскольку в основе ее работы лежат дискретные устройства (логические вентили, триггеры и т. д.).

Необходимость более глубокого изучения дискретных объектов влечет за собой увеличение внимания к алгебраическим структурам (таким, как группы, кольца, конечные поля, решетки и т. д.). Важное место среди этих алгебраических структур занимают булевы алгебры. Примером булевой алгебры является булева алгебра множеств, то есть непустая совокупность множеств, замкнутая относительно операций дополнения, пересечения и объединения.

Опыт преподавания математики показывает, что для того, чтобы студенты глубже овладели теоретико-множественными понятиями, крайне полезными являются задачи на доказательство различных тождеств булевой алгебры множеств. Как известно, эти тождества можно доказывать с помощью разных методов. Например, в книге [1] рассматриваются пять методов: метод двух включений, метод эквивалентных преобразований, метод характеристических функций, метод логических функций и теоретико-множественный метод.

В данной статье мы хотели бы рассмотреть еще один метод доказательства тождеств алгебры множеств, который основан на замене задачи доказательства тождества алгебры множеств (теоретико-множественного тождества) задачей доказательства определенной логической равносильности.

Пусть Ф – формула булевой алгебры множеств. Произведем в этой формуле следующие изменения:

1) заменим символы $A, B, C, \ldots$, обозначающие множества, на символы $a, b, c, \ldots$, обозначающие булевы переменные;

2) заменим операцию дополнения на операцию отрицания ($\overline{A} \to \overline{a}$), операцию пересечения — на операцию конъюнкции ($A \cap B \to a \wedge b$), операцию объединения — на операцию дизъюнкции ($A \setminus B \to a \wedge b$), операцию разности на конъюнкцию первого операнда с отрицанием второго операнда ($A \setminus B \to a \wedge \overline{b}$), операцию симметрической разности — на операцию сложения по модулю два ($A \,\Delta\, B \to a \oplus b$).

В результате указанных изменений мы получим некоторую формулу алгебры логики $\widetilde{\Phi}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Равенство $\Phi_1 = \Phi_2$ является тождеством булевой алгебры множеств тогда и только тогда, когда равенство $\widetilde{\Phi}_1 = \widetilde{\Phi}_2$ является логической равносильностью.

Используя эту теорему, можно свести задачу доказательства тождества булевой алгебры множеств к задаче доказательства логической равносильности. Для решения последней задачи можно использовать различные логические законы, многие из которых известны студентам из курса информатики.

Описанный метод доказательства тождеств булевой алгебры множеств мы предлагаем называть методом перехода к логической равносильности.

Рассмотрим конкретный пример. Докажем с помощью метода перехода к логической равносильности следующее тождество булевой алгебры множеств:

$$(A \setminus C) \cup (C \setminus B) = (A \cup C)\,\Delta\,(B \cap C). \tag{1}$$

В результате описанных выше изменений из данного равенства булевой алгебры множеств мы получаем следующее логическое равенство:

$$a\,\bar{c} \vee c\,\bar{b} = (a \vee c) \oplus \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Отметим, что для краткости (а также для облегчения зрительного восприятия формул) конъюнкцию булевых переменных x и y мы обозначаем просто xy (а не $x \wedge y$). Также мы считаем, как это обычно принято, что операция конъюнкции обладает приоритетом по сравнению со всеми другими бинарными операциями и потому опускаем соответствующие круглые скобки.

Преобразуем правую часть равенства (2), используя выражение суммы по модулю два через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию ($x \oplus y = x\,\bar{y} \vee y\,\bar{x}$), а также используя законы де Моргана и другие логические законы:

$$\begin{gathered}(a \vee c) \oplus bc = (a \vee c)\,\overline{bc} \vee bc\,(\overline{a \vee c}) = \\ = (a \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee bc\,\bar{a}\,\bar{c} = a\,\bar{b} \vee c\,\bar{b} \vee a\,\bar{c}\end{gathered}.(3)$$

Правая часть формулы (3) равносильна левой части формулы (2) в силу так называемого обобщенного закона склеивания. Таким образом, равенство (2) является логической равносильностью, а значит, равенство (1) является тождеством булевой алгебры множеств.

В завершение нашей статьи отметим, что булевы алгебры (в частности, булевы алгебры множеств) занимали большое место в творчестве известного отечественного математика, педагога и методиста И. М. Яглома, который значительную часть своей жизни (с 1949 по 1956 год) работал в Орехово-Зуевском педагогическом институте (ныне МГОГИ). Булевым алгебрам посвящены, в частности, его книги [2] и [3].

Автор будет благодарен читателям за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Список использованной литературы

1. Рязанов, Ю. Д. Дискретная математика / Ю. Д. Рязанов. – Белгород : Изд-во БГТУ, 2010. – 274 с.
2. Яглом, И. М. Необыкновенная алгебра / И. М. Яглом. – Москва : Наука, 1968. – 72 с.
3. Яглом, И. М. Булева структура и ее модели / И. М. Яглом. – Москва : Сов. радио, 1980. – 192 с.