УДК 378.147

И. В. Белько, А. А. Тиунчик, Е. А. Криштапович,
г. Минск, Беларусь

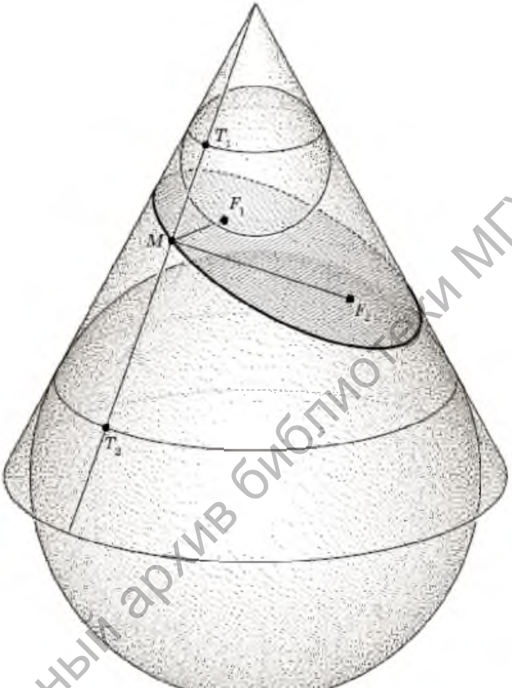
ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕМЫ «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШАРОВ ДАНДЕЛЕНА

Рассматривается возможность повышения наглядности при объяснении эквивалентности различных определений и свойств кривых второго порядка за счет применения шаров Данделена с использованием как наглядных объектов, так и средств компьютерной графики.

Ключевые слова: преподавание аналитической геометрии, эллипс, парабола, гипербола, фокус, директриса, круговой конус, шары Данделена.

Уменьшение количества аудиторных часов, выделяемых на курсы математики и высшей математики, ведет к необходимости выбора наиболее компактных и наглядных средств представления и доказательства свойств основных математических объектов, изучаемых в рамках этих курсов. Современная компьютерная графика открывает большие возможности визуализации, однако актуальной остается проблема выбора вспомогательных математических объектов, которые обеспечили бы наглядность сущности изучаемых явлений.

Шары Данделена [1] (фокальные сферы) — одна или две сферы, касающиеся боковой поверхности бесконечного кругового конуса и плоскости, пересекающей этот конус. Шары Данделена позволяют наглядно перейти от конических определений эллипса, гиперболы и параболы к их фокальным и директориальным определениям [2, с. 8–11].

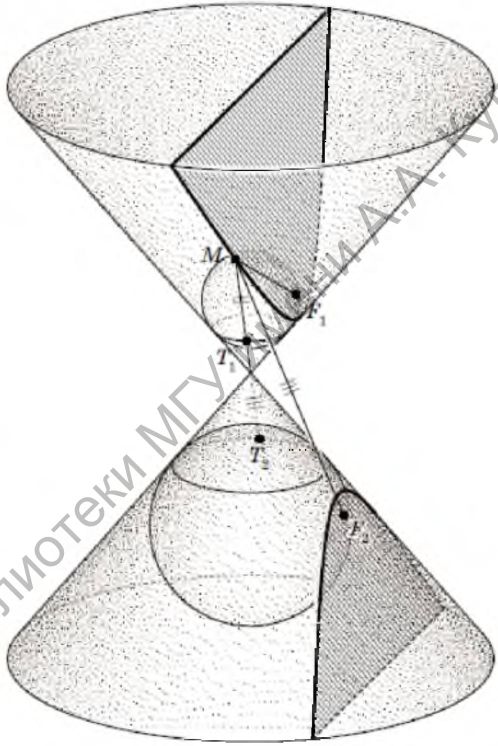


Изложение материала удобно начинать традиционно — с эллипса. В этом случае в круговой конус вписано две сферы: одна расположена над секущей плоскостью π, другая — под ней. Пусть сферы касаются поверхности конуса по окружностям, расположенным в плоскостях τ_1 и τ_2, и касаются секущей плоскости π в точках F_1 и и F_2.

Выберем на эллипсе произвольную точку M. Точки пересечения образующей конуса, проходящей через точку M, с окружностями обозначим T_1 и T_2. При перемещении точки M по эллипсу расстояние $|T_1T_2|$ остается постоянным и равным сумме расстояний $|T_1M|$ и $|MT_2|$. При этом $|MT_1| = |MF_1|$ и $|MT_2| = |MF_2|$ как расстояния от вершины угла M до точек касания. Таким образом, наглядно получаем определение эллипса как геометрического места точек M, сумма расстояний от которых до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$|T_1T_2| = |T_1M| + |MT_2| = |F_1M| + |MF_2|.$$

Используя равенство касательных к сфере из точки M, можно также показать, что прямые, получающиеся при пересечении плоскостей τ_1 и τ_2 плоскостью π, являются директрисами эллипса [3, с. 46–47], откуда наглядно следует директориальное определение эллипса.



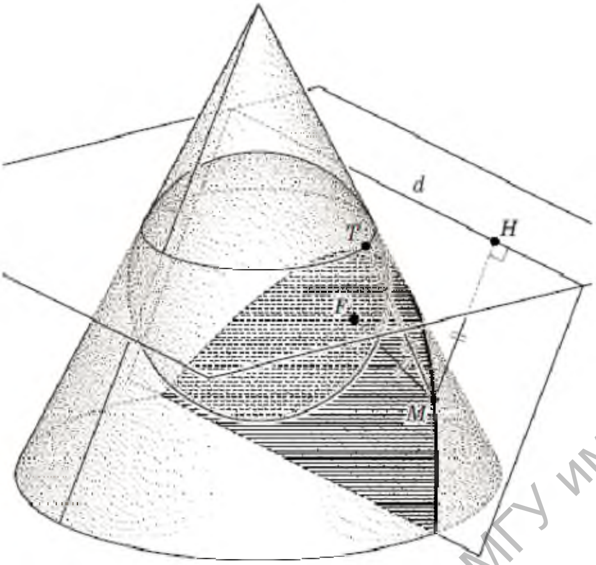
В случае гиперболы вписанных сфер снова две, но расположены они по одну сторону от секущей плоскости π: одна сфера расположена в данном конусе, вторая — в конусе, симметричном данному относительно вершины. Пусть сферы касаются поверхности конуса по окружностям, расположенным в плоскостях τ_1 и τ_2, и касаются секущей плоскости π в точках F_1 и F_2.

При перемещении точки M по гиперболе постоянным остается расстояние $|T_1T_2|$, равное разности расстояний $|MT_2|$ и $|MT_1|$. Это утверждение становится более наглядным, если выполнить «отражение» одного конуса в другой относительно вершины. Равенства $|MT_1| = |MF_1|$ и $|MT_2| = |MF_2|$ выполняются как равенства расстояния от вершины угла M до точек касания. Таким образом, наглядно получаем определение гиперболы как геометрического места точек M, разность расстояний от которых до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$|T_1T_2| = |MT_2| - |MT_1| = |MF_2| - |MF_1|.$$

Директориальное определение гиперболы выводится аналогично случаю эллипса.

В случае параболы вписанная сфера одна, расположена она в том же конусе над секущей плоскостью π. Пусть сфера касается поверхности конуса



по окружности, расположенной в плоскости τ, и касается секущей плоскости π в точке F. Прямую пересечения плоскостей τ и π обозначим d. Перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую d, обозначим MH.

При перемещении точки M по параболе расстояния $|MT|$ и $|MH|$ будут оставаться равными, так как треугольник TMH равнобедренный. Действительно, отрезок MT лежит на образующей конуса, а отрезок MH находится в плоскости π и параллелен другой образующей. Следовательно, отрезки MT и MH образуют равные углы с плоскостью τ. С другой стороны, отрезки MT и MF тоже равны как касательные, проведенные к сфере из одной точки.

Таким образом, наглядно получаем определение параболы как геометрического места точек M, расстояния от которых до фокуса F и директрисы d есть величина постоянная:

$$|MH| = |MT| = |MF|.$$

Повышению наглядности изложения этих свойств способствует использование различных материальных объектов типа биллиардного шара, теннисного мяча и т. п. [4]. При этом точечный источник света позволяет получать тень в виде эллипса, одним из фокусов которого является точка касания шара с плоскостью. Однако наибольшая наглядность может быть достигнута в результате применения средств компьютерной графики. Анимированное движение точки по кривой второго порядка сопровождается движением по конусу образующей, соответствующей этой точке. Движение образующей определяет движение соответствующих точек по сферам и делает очевидным сохранение расстояния между ними, что является ключевой идеей доказательства. В случае гиперболы для наглядности следует осуществить отображение одного конуса в другой. Выделение равенства углов повышает наглядность доказательства в случае параболы. Контроль за углами делает видимым и процесс получения директориальных определений.

Список использованной литературы

1. Dandelin, G. Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon / G. Dandelin // Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. 1826. – T. III. – P. 3–16.
2. Протасов, В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии / В. Ю. Протасов. — Москва : МЦНМО. – 56 с.
3. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. — Москва : Наука, 1983. – 288 с.
4. Нилов, Ф. Сферы Данделена. Лекция на Малом мехмате МГУ / Ф. Нилов, 2011 г. – Режим доступа: http://www.geometry.ru/video.htm. – Дата доступа: 10.02.2019.